

ISSN 2712-9942

# УСПЕХИ КИБЕРНЕТИКИ

RUSSIAN JOURNAL OF CYBERNETICS

2025  
T. 6 N° 4

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ СИСТЕМНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО  
ЦЕНТРА «КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»**

---

## **Успехи кибернетики**

---

## **Russian Journal of Cybernetics**

**Том 6  
№ 4**

**Vol. 6  
No. 4**

Москва  
2025

## Учредитель и издатель

Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный центр  
Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра  
«Курчатовский институт»  
(НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ)

«Успехи кибернетики» — это рецензируемый научный журнал, в котором публикуются научные статьи по следующим специальностям (физико-математические, технические науки):

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ;
- 2.2.2. Электронная компонентная база микро- и наноэлектроники, квантовых устройств;
- 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации.

Миссия журнала — развитие научных направлений по заявленной тематике в России и за рубежом, соответствующих приоритетным направлениям научно-технологического развития Российской Федерации, а также перечню важнейших наукоемких технологий.

Журнал ориентирован на пропаганду передовых идей в области физики, математики, технических наук, участие в реализации задач Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации, обеспечение печатными площадями высококвалифицированных кадров, повышение качества диссертационных исследований в данных отраслях путем развития механизма профессионального и общественного обсуждения их научных результатов, воспитание молодого поколения ученых.

Журнал принимает к публикации оригинальные статьи; переводы статей, опубликованных в зарубежных журналах (при согласии правообладателя на перевод и публикацию); обзоры; эссе; комментарии; другие информационные материалы.

Издание будет полезно ученым, работающим в соответствующих областях наук, а также аспирантам и студентам.

### Главный редактор

*Бетелин Владимир Борисович*, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель, НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Москва

### Заместитель главного редактора

*Галкин Валерий Алексеевич*, д. ф.-м. н., профессор, директор, Сургутский филиал НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Сургут

### Члены редакционной коллегии

*Панченко Владислав Яковлевич*, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, вице-президент РАН, председатель Высшей аттестационной комиссии при Минобрнауки России, вице-президент НИЦ «Курчатовский институт», заведующий кафедрой медицинской физики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

*Власов Сергей Евгеньевич*, д. т. н., заместитель директора по стратегическим инфокоммуникационным и квантовым технологиям, НИЦ «Курчатовский институт», Москва

*Савин Геннадий Иванович*, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель, МСПЦ — филиал НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Москва

*Сойфер Виктор Александрович*, академик РАН, д. т. н., профессор, президент, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории автоматизированных систем научных исследований, Самарский национальный исследовательский университет им. ак. С. П. Королева, Институт систем обработки изображений РАН, Самара

*Чубариков Владимир Николаевич*, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

*Чаплыгин Юрий Александрович*, академик РАН, д. т. н., профессор, президент, Московский институт электронной техники, Москва

*Петров Игорь Борисович*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой информатики, Московский физико-технический институт, Москва

*Смирнов Николай Николаевич*, д. ф.-м. н., профессор, заместитель декана механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

заместитель директора по стратегическим информационным технологиям, НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Москва

*Тишкин Владимир Федорович*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, профессор кафедры вычислительных методов,

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

*Губайдуллин Амир Анварович*, д. ф.-м. н., профессор, директор, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, Тюмень

*Яковлевский Михаил Владимирович*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, заместитель директора по научной работе, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

*Шагалев Рашид Мирзагалиевич*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., заместитель директора Федерального научного центра

*Старков Сергей Олегович*, д. ф.-м. н., профессор, начальник отделения интеллектуальных кибернетических систем, Обнинский институт атомной энергетики, Обнинск

*Еськов Валерий Матвеевич*, д. ф.-м. н., д. б. н., профессор, заведующий отделом, Сургутский филиал НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Сургут

*Кабанихин Сергей Игоревич*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, главный научный сотрудник Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

*Лавертнев Михаил Михайлович*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, заместитель директора по научной работе, Институт автоматизации и электротехники Сибирского отделения РАН, Новосибирск

*Пятков Сергей Григорьевич*, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

*Ильин Валерий Павлович*, д. ф.-м. н., профессор, профессор кафедры прикладной математики, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

*Крыжановский Борис Владимирович*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., руководитель, Центр оптико-нейронных технологий НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Москва

*Нагорнов Олег Викторович*, д. ф.-м. н., профессор, первый проректор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

*Земто Ясунари*, PhD (Physics), Университет Хосэй, Токно, Япония

*Пападопулос Атанас*, Doctorat d'Etat (Habilitation), mathematics, Университет Страсбурга, Национальный центр научных исследований Франции, Страсбург, Франция

### Ответственный секретарь

Гавриленко Тарас Владимирович, к. т. н.

### Ответственный редактор

Чалова Анна Петровна, к. филол. н.

### Технические редакторы

Моргун Дмитрий Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент

Амелин Максим Евгеньевич, Батуро Серафим Александрович, Бобровская Ольга Павловна, Гавриленко Михаил Тарасович, Горбунов Дмитрий Владимирович

### Переводчик

Тронцкий Дмитрий Игоревич, к. т. н., доцент

### Художественное оформление обложки

© Горбунов Александр Сергеевич

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77-78857 от 04.08.2020.

Решением Высшей аттестационной комиссии с 27 июня 2022 года журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук».

Издается с 2020 года. Выпускается 4 раза в год.

Адрес редакции:

НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, 117218, г. Москва, Нахимовский просп., дом 36, корпус 1.  
Телефон: +7 9226-54-57-88, факс: +7 (495) 719-76-81, e-mail: taras.gavrilenko@gmail.com. Сайт: jcyb.ru.

**Founder and Publisher**

Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”  
(NRC “Kurchatov Institute” – SRISA)

Russian Journal of Cybernetics is peer-reviewed.

The journal publishes papers on physics, mathematics, and engineering. The key areas of interest are:

- simulation, numerical methods, and simulation software
- electronic components for micro- and nanoelectronics, and quantum devices
- system analysis, control, and information processing.

Our mission is advancing these research areas in Russia and globally, supporting Russia’s national science and technology priorities, and science-intensive sectors.

The Journal promotes advanced concepts in physics, mathematics, engineering, and facilitates Russia’s Science and Technology Development Strategy. We offer an opportunity for professional researchers to publish. We improve the doctorate research quality through public peer review and educate the new generation of researchers.

The Journal accepts original papers; translations of papers from international journals (consent of the right holders for the translation and publication is required); reviews; essays; remarks, and event reports.

The Journal is intended for researchers, university, and doctorate students.

**Chief Editor**

Prof. *Vladimir B. Betelin*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS),  
Doctor of Science (Phys&Math), Academic Director, NRC “Kurchatov Institute” – SRISA, Moscow

**Vice Chief Editor**

Prof. *Valery A. Galkin*, Doctor of Science (Phys&Math), Director, Surgut Branch of NRC “Kurchatov Institute” – SRISA, Surgut

**Editorial Board**

Prof. *Vladislav Ya. Panchenko*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Vice President of the Russian Academy of Sciences, Head of the National Academic Degrees Authority, Russian Ministry of Science and Education, Vice President of the NRC “Kurchatov Institute”, Chairperson of the Department of Medical Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow

Prof. *Sergey E. Vlasov*, Deputy Director for Strategic Information, Communication, and Quantum Technologies, NRC “Kurchatov Institute”, Moscow

Prof. *Gennady I. Savin*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math),

Academic Director, Joint Supercomputer Center – Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow

Prof. *Viktor A. Soifer*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Engineering), President, Chief Researcher Lab for Automated Research Systems, Korolev Samara National Research University, Academic Director, Institute of Image Processing Systems, RAS, Samara

Prof. *Vladimir N. Chubarikov*, Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Mathematical and Computer Analysis Methods, Lomonosov Moscow State University, Moscow

Prof. *Yuri A. Chaplygin*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Engineering), President, National Research University of Electronic Technology, Moscow

Prof. *Igor B. Petrov*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Informatics,

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow

Prof. *Nikolay N. Smirnov*, Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Dean, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Deputy Director for Strategic Information

Technology, NRC “Kurchatov Institute” – SRISA, Moscow

Prof. *Vladimir F. Tishkin*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Professor, Department of Computational Methods, Lomonosov

Moscow State University, Moscow

Prof. *Amir A. Gubaidullin*, Doctor of Science (Phys&Math), Director, Tyumen Division, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, RAS Siberian Branch, Tyumen

Prof. *Mikhail V. Jakobovskii*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Director for Research, Keldysh Institute of Applied

Mathematics, RAS, Moscow

Prof. *Rashit M. Shagaliyev*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Director, Federal Research Center

Prof. *Sergey O. Starkov*, Doctor of Science (Phys&Math), Head, Division of Intelligent Cybernetic Systems, Obninsk Institute of Atomic Energy, Obninsk

Prof. *Valery M. Eskov*, Doctor of Science (Phys&Math), Doctor of Science (Biology), Head of Division, Surgut Branch of NRC “Kurchatov Institute” – SRISA, Surgut

Prof. *Sergey I. Kabanikhin*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Principal Researcher, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian

Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

Prof. *Mikhail M. Lavrentiev*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Director for Research, Institute of Automation and

Electrometry, RAS Siberian Branch, Novosibirsk

Prof. *Sergey G. Pyatkov*, Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Further Mathematics, Yugra State University, Khanty-Mansiysk

Prof. *Valerii P. Ilyin*, Doctor of Science (Phys&Math), Professor, Department of Applied Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk

Prof. *Boris V. Kryzhanovskii*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Director, Opto-neural Technologies Center, NRC “Kurchatov

Institute” – SRISA, Moscow

Prof. *Oleg V. Nagornov*, Doctor of Science (Phys&Math), First Vice-Rector, National Research Nuclear University MEPhI, Moscow

Prof. *Yasunari Zempo*, PhD (Physics), Hosei University, Tokyo, Japan

Prof. *Athanase Papadopoulos*, Doctorat d’Etat (Habilitation), Mathematics, University of Strasbourg, French National Centre for Scientific Research, Strasbourg, France

**Executive Editor**

Taras V. Gavrilenko, Ph.D. (Engineering)

**Managing Editor**

Anna P. Chalova, Ph.D. (Linguistics)

**Technical Editors**

Dmitry A. Morgun, Ph.D. (Phys&Math), Assoc. Prof.

Maksim E. Amelin

Olga P. Bobrovskaya

Serafim A. Baturo

Mikhail T. Gavrilenko

Dmitry V. Gorbunov

**Translator**

Dmitry I. Troitsky, Ph.D. (Engineering), Assoc. Prof.

**Cover Design**

© Alexander S. Gorbunov

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Mass media registration certificate EL No. FS 77-78857 dated on 04.08.2020.

On June 27, 2022 the National Board for Academic Degrees and Titles put the Russian Journal of Cybernetics on the list of leading journals for publishing papers by doctorate students.

Published since 2020. 4 issues per year.

**Editorial Board Address:**

NRC “Kurchatov Institute” – SRISA, Russia 117218, Moscow, Nakhimovsky pr., 36/1.

Tel.: +7(922)654-5788, fax: +7(495)719-76-81, e-mail: taras.gavrilenko@gmail.com. Web: jcyb.ru.

## СОДЕРЖАНИЕ

XIV Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова, с элементами школы молодых ученых и международным участием . . . . .	8
<b>С. З. Дунин, О. В. Нагорнов, В. П. Трифоненков</b>	
Моделирование температурного поля испаряющихся капель на твердой подложке . . . . .	9
<b>А. В. Александров, Л. В. Дородницын</b>	
Высокоточное моделирование акустики при обтекании криволинейного тела турбулентным потоком . . . . .	17
<b>Н. А. Артёмова, О. В. Ушакова</b>	
О развитии алгоритма морфинга сеток для деформированных объемов . . . . .	24
<b>Ю. Б. Чен-лен-сон</b>	
Выделение высокопроводящих путей фильтрации и зон трещиноватости при помощи акустического каротажа . . . . .	29
<b>Т. П. Гаврилова</b>	
О различных подходах к определению температуры объекта по граничным измерениям . . . . .	35
<b>А. А. Колеватов, И. В. Афанаскин</b>	
Уточнение влияния трещинной составляющей пустотного пространства на процесс фильтрации флюидов с помощью промысловых данных . . . . .	42
<b>Ю. А. Крыжановская</b>	
Применение нейронных сетей для генерации криптографических ключей и анализа сетевого трафика . . . . .	50
<b>Б. В. Крыжановский, В. И. Егоров</b>	
Вырождение состояний одномерной спиновой цепочки . . . . .	55
<b>Д. А. Маслов</b>	
Аналитические по малому параметру решения одного класса нелинейных краевых задач для уравнения прогиба балки . . . . .	64
<b>Г. Морар, А. И. Карпов, А. А. Шаклеин</b>	
Интеграция различных платформ с открытым кодом для расчета параметров турбулентного диффузионного горения полимерных материалов . . . . .	71
<b>А. В. Острик, М. А. Ахметова, Д. Н. Николаев</b>	
Малопараметрические уравнения состояния поликристаллических тел для газодинамических кодов . . . . .	77
<b>М. Н. Перельмутер</b>	
Решение задач нестационарной термоупругости с трещинами методом граничных интегральных уравнений . . . . .	87
<b>Н. В. Плотникова</b>	
Траекторное планирование робота с помощью сплайн-функций . . . . .	95
<b>Л. А. Прокудина</b>	
Математическое моделирование долговременного нелинейного развития и взаимодействия возмущений в жидкой пленке . . . . .	101
<b>Д. Ф. Сергиенко, Р. И. Паровик</b>	
Сравнение эффективности численных методов и нейросетевого подхода к исследованию математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии с одним дислокационным источником . . . . .	106

---

<b>И. В. Смолехо</b>	
Алгоритм решения системы уравнений статики жидких кристаллов . . . . .	114
<b>И. А. Цепелев, А. И. Короткий</b>	
Реконструкция реологии текущей лавы в модели тонкого слоя движения вязкой жидкости . . . . .	121
<b>О. Ф. Воропаева</b>	
Связь нелинейных систем уравнений с запаздыванием и систем ОДУ высокой размерности в математических моделях генных сетей . . . . .	127
<b>Д. Д. Япаров, С. В. Бессмертный, Ю. Д. Данилова</b>	
Разработка модели системы предотвращения лобового столкновения нейроэволюционным методом . . . . .	134
<b>А. Д. Япаров, Н. М. Япарова</b>	
Численный метод решения нелинейной задачи теплопереноса в тонких прослойках . . . . .	140

## CONTENTS

Current Problems of Applied Mathematics and Mechanics 14th International Conference and School for Young Researchers Commemorating A. Sidorov, Member of the Russian Academy of Sciences . . . . .	8
<b>S. Z. Dunin, O. V. Nagornov, V. P. Trifonenkov</b>	
Simulation of the Temperature Field of Evaporating Drops on a Solid Substrate . . . . .	9
<b>A. V. Aleksandrov, L. V. Dorodnitsyn</b>	
High-Precision Acoustic Simulation of a Turbulent Flow over a Curved Body . . . . .	17
<b>N. A. Artyomova, O. V. Ushakova</b>	
Advanced Mesh Morphing Algorithm for Deformed Volumes . . . . .	24
<b>Yu. B. Chen-len-son</b>	
Stoneley Wave Analysis for Detection of High-Conductivity Flow Paths and Fracture Zones in Oil and Gas Reservoirs . . . . .	29
<b>T. P. Gavrilova</b>	
Approaches to Determining an Object's Temperature from Boundary Measurements . . . . .	35
<b>A. A. Kolevatov, I. V. Afanaskin</b>	
Using Production Data to Assess the Effects of Fractures in the Void Space on Fluid Filtration . . . . .	42
<b>Yu. A. Kryzhanovskaya</b>	
Neural Networks for Cryptographic Key Generation and Network-Traffic Analysis . . . . .	50
<b>B. V. Kryzhanovskiy, V. I. Egorov</b>	
Degeneracy of States in a One-Dimensional Spin Chain . . . . .	55
<b>D. A. Maslov</b>	
Analytical Solutions for a Class of Nonlinear Boundary Value Problems for Beam Deflection with a Small Parameter . . . . .	64
<b>G. Morar, A. I. Karpov, A. A. Shaklein</b>	
Integration of Open-Source Platforms for Modeling Turbulent Diffusion Combustion of Polymeric Materials . . . . .	71
<b>A. V. Ostriki, M. A. Akhmetova, D. N. Nikolaev</b>	
Low-Parametric Equations of State for Polycrystalline Bodies Used in CFD Applications . . . . .	77
<b>M. N. Perelmuter</b>	
Solution of Nonstationary Thermoelasticity Problems with Cracks Using the Boundary Integral Equations Method . . . . .	87
<b>N. V. Plotnikova</b>	
Robot Path Planning Using Spline Functions . . . . .	95
<b>L. A. Prokudina</b>	
Simulation of the Long-Term Nonlinear Evolution and Interaction of Disturbances in a Liquid Film . . . . .	101
<b>D. F. Sergienko, R. I. Parovik</b>	
Comparison of Numerical Methods and Neural Network Approaches for Simulating High-Frequency Geoacoustic Emission from a Single Dislocation Source . . . . .	106
<b>I. V. Smolekha</b>	
Algorithm for Solving the System of Equations Describing Liquid Crystal Statics . . . . .	114
<b>I. A. Tsepelev, A. I. Korotkii</b>	
Reconstruction of Lava Rheology in a Thin-Layer Model of Viscous Flow . . . . .	121

**O. F. Voropaeva**

The Relationship between Nonlinear Systems of Delay Differential Equations and High-Dimensional ODE Systems in Mathematical Models of Gene Networks . . . . . 127

**D. D. Yaparov, S. V. Bessmertnyi, Iu. D. Danilova**

Development of a Frontal Collision Avoidance System Using a Neuroevolutionary Approach . . . . . 134

**A. D. Yaparov, N. M. Yaparova**

Numerical Method for Solving Nonlinear Heat Transfer Problems in Thin Layers . . . . . 140

## XIV ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ», ПОСВЯЩЕННАЯ ПАМЯТИ АКАДЕМИКА А.Ф. СИДОРОВА, С ЭЛЕМЕНТАМИ ШКОЛЫ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ И МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ

Со 2 по 8 сентября 2025 года в пос. Джанхот (Краснодарский край) состоялась XIV Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова, с элементами школы молодых ученых и международным участием (<https://afsid.uran.ru/>).

Конференция была организована Институтом математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (ИММ УрО РАН) (Екатеринбург) и Уральским федеральным университетом им. первого Президента России Б.Н. Ельцина (Екатеринбург), проводилась при участии и поддержке Уральского математического центра (РНОМЦ-УМЦ), Сургутского филиала НИЦ «Курчатовский институт» – НИИСИ (Сургут) и АО «ПФ «СКБ Контур» (Екатеринбург).

Основная тематика конференции включала в себя следующие направления:

- математическое моделирование физических и природных процессов;
- аналитические методы в задачах газовой динамики и механики сплошной среды, точные решения;
- численные методы решения задач математической физики;
- проблемы построения оптимальных сеток;
- актуальные проблемы освоения Арктики;
- актуальные проблемы углеродного цикла, климатические проекты;
- информационные технологии, искусственный интеллект, машинное обучение, робототехника и компьютерная безопасность.

В порядке подготовки к конференции были изданы сборники тезисов докладов и научная программа. Сборник тезисов участников конференции размещен в Научной электронной библиотеке на сайте [elibrary.ru](http://elibrary.ru), индексируется в РИНЦ (<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=82831942>). Формат конференции предусматривал пленарные, секционные заседания, сессию молодых исследователей и заочную секцию.

В работе конференции приняли участие около 100 ученых. Конференция проходила в смешанном формате. Заочные участники имели возможность выставить свои презентации на сайте конференции, а также выступить онлайн. Среди участников конференции было 34 молодых ученых (до 39 лет). В научную программу конференции было включено около 64 докладов и лекций, часть из которых была сделана заочно с представлением презентаций докладов. В работе конференции приняли участие ученые из 19 городов: Воронеж, Екатеринбург, Ижевск, Казань, Калуга, Комсомольск-на-Амуре, Красноярск, Липецк, Москва, Нижний Новгород, Новороссийск, Новосибирск, Октябрьский, Петропавловск-Камчатский, Самара, Санкт-Петербург, Сургут, Челябинск, Черноголовка. В конференции приняли участие 22 доктора наук, 36 кандидатов наук, 6 аспирантов и 5 студентов. Было прочитано 5 лекций (одна – в онлайн-формате) ведущими российскими учеными в области прикладной математики, математического моделирования и информационных технологий.

В качестве пленарных докладчиков выступили: Галкин В.А. (Сургутский филиал НИЦ «Курчатовский институт» – НИИСИ, Сургут), Ряшко Л.Б. (УрФУ, Екатеринбург), Филимонов М.Ю. (ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург), Сесекин А.Н. (УрФУ, Екатеринбург).

Участники конференции отметили высокий научный уровень представленных докладов, разнообразие тематик и новые оригинальные подходы к построению математических моделей и их численному исследованию, а также возросший интерес к участию в работе конференции молодых ученых. Избранные статьи участников конференции были рекомендованы для публикации в журнале «Успехи кибернетики».

В решении конференции было предложено провести XV Всероссийскую конференцию «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященную памяти академика А.Ф. Сидорова, со 2 по 8 сентября 2026 года в поселке Джанхот Краснодарского края.

**Председатель оргкомитета конференции:** д. ф.-м. н., в.н.с. Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, заведующий кафедрой высокопроизводительных компьютерных технологий Института естественных наук и математики Уральского федерального университета им. первого президента России Б.Н. Ельцина Филимонов Михаил Юрьевич.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ИСПАРЯЮЩИХСЯ КАПЕЛЬ НА ТВЕРДОЙ ПОДЛОЖКЕ

С. З. Дунин<sup>a</sup>, О. В. Нагорнов<sup>b</sup>, В. П. Трифоненков<sup>c</sup>

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Российская Федерация

<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0005-3588-6889>, [szdunin@gmail.com](mailto:szdunin@gmail.com)

<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1355-788X>, [ovnagornov@mephi.ru](mailto:ovnagornov@mephi.ru)

<sup>c</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0002-8979-964X>, [vp trifonenkov@mephi.ru](mailto:vp trifonenkov@mephi.ru)

*Аннотация:* исследуется спонтанное испарение капель жидкости с горизонтальных подложек в неизотермическом приближении. Получены аналитические выражения для температуры и концентрации пара как функции безразмерных параметров, выраженные через термодинамические параметры подложки, жидкости и пара. Учет температурных поправок позволяет рассчитать силу Марангони, определяющую термокапиллярные течения в капле. Определены значения параметров, при которых немонотонный профиль температур порождает силы Марангони, которые меняют знак, и возникают линии стагнации. Установлены максимальные значения краевых углов, при которых имеются точки стагнации в капле при различных соотношениях теплопроводностей. Определены критические значения коэффициентов теплопроводностей жидкости и подложки, при которых возбуждаются разнонаправленные течения. Проведены сравнения температурных полей с экспериментальными данными. Проведен анализ динамики изменения краевого угла и испарения массы капли.

*Ключевые слова:* испарение капли, сила Марангони, точки стагнации.

*Для цитирования:* Дунин С. З., Нагорнов О. В., Трифоненков В. П. Моделирование температурного поля испаряющихся капель на твердой подложке. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):9–16.

*Поступила в редакцию:* 20.10.2025.

*В окончательном варианте:* 19.11.2025.

## SIMULATION OF THE TEMPERATURE FIELD OF EVAPORATING DROPS ON A SOLID SUBSTRATE

S. Z. Dunin<sup>a</sup>, O. V. Nagornov<sup>b</sup>, V. P. Trifonenkov<sup>c</sup>

National Research Nuclear University MEPHI, Moscow, Russian Federation

<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0005-3588-6889>, [szdunin@gmail.com](mailto:szdunin@gmail.com)

<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1355-788X>, [ovnagornov@mephi.ru](mailto:ovnagornov@mephi.ru)

<sup>c</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0002-8979-964X>, [vp trifonenkov@mephi.ru](mailto:vp trifonenkov@mephi.ru)

*Abstract:* we studied the free evaporation of a non-isothermal sessile liquid drop on a horizontal solid substrate. We derived exact expressions for the temperature and vapor-concentration fields as functions of the dimensionless thermodynamic parameters of the drop, the vapor, and the substrate. The non-uniform temperature distribution along the drop surface generates thermocapillary (Marangoni) stresses whose direction changes in the vicinity of stagnation points. We determined the directions of these stresses and the locations of the stagnation points as functions of the contact angle and the thermodynamic parameters of the model. We established the conditions under which stagnation points appear and derived the maximum contact angle at which they can exist. We compared the calculated temperature field with experimental measurements. We also computed the time evolution of the contact angle and the evaporative mass loss of the drop.

*Keywords:* drop evaporation, Marangoni force, stagnation points.

*Cite this article:* Dunin S. Z., Nagornov O. V., Trifonenkov V. P. Simulation of the Temperature Field of Evaporating Drops on a Solid Substrate. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):9–16.

*Original article submitted:* 20.10.2025.

*Revision submitted:* 19.11.2025.

### Введение

Анализ испарения капли, находящейся на твердой подложке, представляет интерес для ряда прикладных задач, в которых требуется распределить твердые частицы, растворенные в капле, в заданной геометрии (производство новых электронных и оптических материалов, биохимическое тестирование, DNA/RNA исследования).

Одновременный учет температурных и скоростных полей, сложность математического описания из-за возникающих сингулярностей в плотности потока на краях капли, проблемы численного счета заставляют авторов упрощать модели, учитывая те или иные факторы как определяющие процесс испарения [1–19]. Концентрация насыщенных паров на поверхности капли непостоянна, что приводит к температурной неоднородности вдоль поверхности. Эта неоднородность определяет силы Марангони, влияющие на скоростные потоки в капле, которые, как было показано в [4–8], при наличии растворенного в капле вещества могут выносить его на периферию и в другие части высыхающей капли (наличие стагнационных точек, определяемых силами Марангони). В работах [5–8] экспериментально подтвержден этот вывод и дан количественный критерий направленности конвективных потоков. В ряде работ используется метод конечных элементов для исследования поведения испаряющейся капли.

В данном исследовании получены аналитические выражения для локальных температурных полей и полей концентрации, вычислены интегральные характеристики теплового и массового потока, а также локальные тепловые и массовые потоки с поверхности капли.

### Постановка задачи

Рассмотрим каплю, находящуюся на плоской твердой поверхности. Во время испарения капли краевой угол уменьшается, при этом значительное время область прилипания капли остается неизменной. Начальные параметры капли следующие:  $R$  — радиус контактной линии капли, краевой угол смачивания  $\theta_c$  меньше  $90^\circ$ ,  $h_0$  — высота капли. Для капель небольшого размера из-за малости числа Бонда  $B_0 = \rho g R h_0 / \sigma \sim 0.03\text{--}0.4$  каплю можно считать сферическим сегментом,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения.

Последнюю фазу жизни капли перед ее быстрым исчезновением мы исключим из нашего рассмотрения.

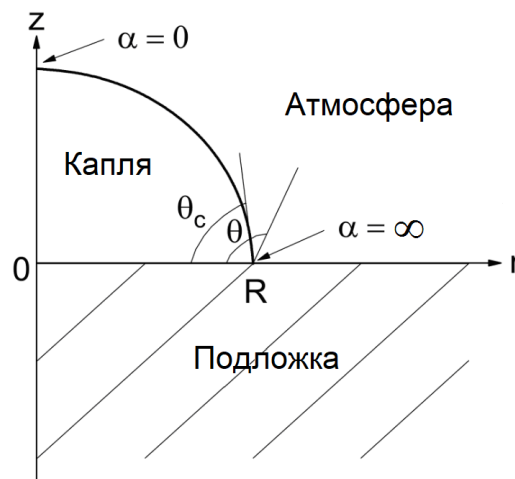


Рис. 1. Сферическая капля на твердой подложке

В силу медленного изменения параметров капли по сравнению с характерным временем распространения тепла в пределах размеров капли ( $t \gg R^2 k_{L,S}^{-1} = t_{L,S}$  — время диффузионного выравнивания поля концентрации и температуры на размере капли радиуса  $R$ ) можно пренебречь временным слагаемым в уравнении теплопроводности и конвективным — из-за малости числа Пекле  $Pe \ll 1$ . Тогда температурное поле в капле  $T_L$  и подложке  $T_S$  можно определить из решения уравнений Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta T_L = 0 \\ \Delta T_S = 0 \end{cases} .$$

В газовой фазе массовая концентрация  $c(\alpha, \theta)$  удовлетворяет стационарному уравнению Лапласа  $\Delta c(\alpha, \theta) = 0$  (считаем газовую фазу неподвижной и пренебрегаем конвективным слагаемым в силу малости числа Пекле  $Pe \ll 1$ ).

Влияние тепловых характеристик подложки и жидкости на массовые и тепловые потоки при спонтанном естественном испарении посаженной капли учитывается через граничные условия (равенство температур и тепловых потоков на границе жидкость — подложка). Предполагается, что основной

тепловой поток, стимулирующий процесс испарения, исходит из подложки (пренебрегаем коэффициентом теплопроводности газа) и поступает к поверхности капли, где благодаря фазовому превращению трансформируется в массовый паровой поток, диффундирующий от поверхности капли (тепловым потоком из газовой фазы пренебрегаем). При выбранной конфигурации капли удобно решать систему уравнений Лапласа для полей концентрации и температур в тороидальной системе координат  $\alpha, \theta$  (рис. 1, границы капли совпадают с  $\theta_c$  — краевым углом капли и  $\theta = 0$ ). Полагаем равенство нулю нормальных производных концентраций в газовой фазе и температур в подложке на их общей границе и равенство температур и тепловых потоков на жидкой границе капли.

Решения для температур и концентрации с указанными граничными условиями на подложках, толщина которых значительно превышает радиус основания капли, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} T_L(\alpha, \theta) &= T_\infty + \{2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta)\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[ \int_0^\infty d\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} A_s(\tau) \times \frac{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta}{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c} \right], \quad 0 < \theta < \theta_c \\ c_V(\alpha, \theta) &= c_\infty + \{2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta)\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[ \int_0^\infty d\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} B_D(\tau) \times \frac{\operatorname{ch} \tau(\pi - \theta)}{\operatorname{ch} \tau(\pi - \theta_c)} \right], \quad \theta_c < \theta < \pi, \\ T_s(\alpha, \theta) &= T_\infty + \{2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta)\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[ \int_0^\infty d\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} A_s(\tau) \times \frac{\operatorname{ch} \tau(\pi - \theta)}{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c} \right], \quad \pi < \theta < 2\pi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $c_V$  — концентрация пара,  $k_R = k_s/k_L$ ,  $T_\infty$  и  $c_\infty$  — окружающая температура и концентрация пара, соответственно,  $\theta_c$  — краевой угол,  $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$  — функции Лежандра [20], которые можно выразить через гипергеометрические функции Римана и гамма-функцию:

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{(i\tau)}{\sqrt{\pi}(0.5 + i\tau)} (2 \operatorname{ch} \alpha)^{-0.5+i\tau} F\left(\frac{3}{4} - i\tau/4, \frac{1}{4} - i\tau/4, 1 + i\tau; \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha}\right) + KC.$$

Это позволяет нам провести вычисления интегралов в комплексной плоскости  $\tau$ . Распространив интегрирование на всю действительную ось и замыкая контур через бесконечную полуокружность в верхней полуплоскости  $\tau$ , получим ряд по степеням  $(1 - r^2/R^2)^{-m}$ . Наибольший вклад в окрестности края капли вносят полюса, ближайšie к действительной оси (в работах [1, 2] приведен именно этот вклад полюсов  $B_D(\tau)$ ). Полюс гамма-функции, лежащий на действительной оси, определяет температуру и концентрацию пара на краях капли. Ядра  $B_D, A_s$  в интегральных выражениях, определяющие поведение температурных и концентрационных полей в пространстве, определяются из граничных условий на границе капли. Так, считая, что приток тепла к поверхности капли от газовой фазы отсутствует, определяем значения:

$$\begin{aligned} L_{jL}(\alpha, \theta_c) \approx q_L(\alpha, \theta_c) L_{j_c}(\alpha, \theta_c) &= -L \frac{D}{R} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_c) \frac{d}{d\theta_c} c(\alpha, \theta_c) = \\ &= -\frac{k_L}{R} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_c) \frac{d}{d\theta_c} T_L(\alpha, \theta_c), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $L$  — удельная теплота испарения,  $j_L$  — поток массы,  $q_L$  — тепловой поток. Считая, что на всей поверхности капли граничные условия такие же, как в окрестности края капли, получим связь между ядрами интегральных представлений:

$$-LDB_D(\tau) \tan \tau(\pi - \theta_c) = k_L A_s(\tau) (\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c). \quad (3)$$

В квазистационарном режиме испарения на поверхности капли выполнено условие Клапейрона–Клаузиуса, связывающее концентрацию насыщенных паров и температуру в любой точке газовой фазы. Ограничиваясь линейной зависимостью концентрации пара от температуры:

$$A_V(\alpha, \theta_c) - A_{s\infty} = c'_{sT} (T_L(\alpha, \theta_c) - T_\infty), \quad (4)$$

определим ядро  $B_D(\tau)$ , зависящее от параметров жидкости, подложки и газовой фазы:

$$\begin{aligned} B_D(\tau) &= B_D(\tau, \theta_c, k_R, \Gamma) = \hat{B}_D(\tau)(c_{S\infty} - c_\infty), \\ \hat{B}_D(\tau) &= \left\{ 1 + \Gamma \tan \tau (\pi - \theta_c) \times \frac{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c} \right\}^{-1}, \\ \Gamma &= c'_{ST} \frac{DL p_{atm}}{k_L p}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $c_{S\infty}$  — концентрация насыщенного пара в окружающей среде,  $D$  — коэффициент диффузии,  $p$  — давление. Важно отметить, что в неизотермическом случае ядро зависит как от краевого угла, теплопроводящих свойств жидкости и подложки  $k_L, k_S$ , так и от термодинамических параметров жидкости и газа ( $c'_{ST} = \frac{dc_s}{dT}$ ,  $D, L$ ).

Полный поток массы с поверхности капли и изменение краевого угла находим из выражений:

$$\begin{aligned} -\dot{M}(t) &= \frac{Q_L}{L} = J_D(\theta_c) = 4\pi R D (c_{n\infty} - c_\infty) \dot{f}_D(\theta_c) \\ \dot{\theta}_c &= -\frac{\pi}{\rho R^2} (1 + \cos^2 \theta_c) \dot{f}_D(\theta_c); \quad \dot{f}_D(\theta_c) = \int_0^\infty d\tau \hat{B}_D(\tau) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi}. \end{aligned} \quad (6)$$

При  $\Gamma = 0$  значение  $\dot{f}_D(\theta_c)$  с высокой точностью совпадает с широко используемым в литературе выражением для скорости массового потока, приведенным в статье И. О. Попова [14]. Зависимость  $J_D(\theta_c)$  от коэффициента диффузии  $D$  в нашем исследовании нелинейная, что было отмечено в экспериментах [10, 15, 16] с разными газами/подложками и переменным давлением  $p$ . Как видно из формулы (6), массовый поток определяется как характеристиками жидкой и газовой фаз, так и теплопроводящими свойствами подложки.

Из (1)–(5) можно вычислить представляющую интерес среднюю температуру по поверхности капли, то есть параметр, определяющий меру охлаждения капли:

$$\prec T_L(\alpha, \theta_A) \succ_{S(\theta_A)} = T_\infty - \frac{c_{n\infty}}{c'_{HT}} (1 - H) \left[ 4 \operatorname{ctg} \frac{\theta_c}{2} \int_0^\infty d\tau \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c \operatorname{sh} \tau \theta_A}{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \pi} \operatorname{ch}[\tau(\pi - \theta_A)] \hat{B}_D(\tau) - 1 \right], \quad (7)$$

и температурный профиль вдоль поверхности капли:

$$\begin{aligned} T_L(\alpha, \theta_A) - T_\infty &= \\ &= \frac{c_{n\infty}}{c'_{HT}} (1 - H) \left[ -1 + \{2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_A)\}^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty d\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} \operatorname{ch}[\tau(\pi - \theta_A)] \hat{B}_D(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда находим уравнение для температуры на краю капли:

$$\Delta T = \frac{T_L(\infty, \theta_c) - T_\infty}{\frac{c_{S\infty}}{c'_{ST}} (1 - H)} = \Gamma_{atm} \frac{p_{atm}}{p} \times \frac{(1 - \frac{\theta_c}{\pi})}{k_R + \frac{\theta_c}{\pi} + \Gamma_{atm} \frac{p_{atm}}{p} (1 - \frac{\theta_c}{\pi})}, \quad \left( \frac{c_{S\infty}}{c'_{ST}} \right)^{-1} = \frac{\mu L}{RT_\infty^2}. \quad (9)$$

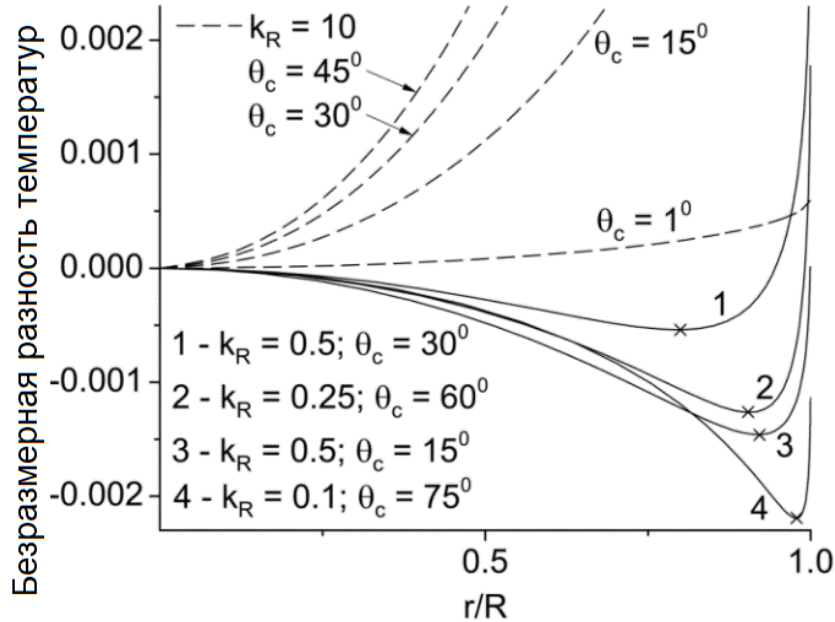
Силу Марангони в любой точке поверхности капли можно вычислить через градиент температуры вдоль поверхности капли:

$$F_M(\alpha, \theta_c) = \nabla_\tau \sigma(\alpha, \theta_c) = \sigma'_T \nabla_\tau T_L(\alpha, \theta_A) = \frac{\sigma'_T}{R} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_A) \frac{d}{d\alpha} T_L(\alpha, \theta_A), \quad \sigma'_T = \frac{d\sigma}{dT}. \quad (10)$$

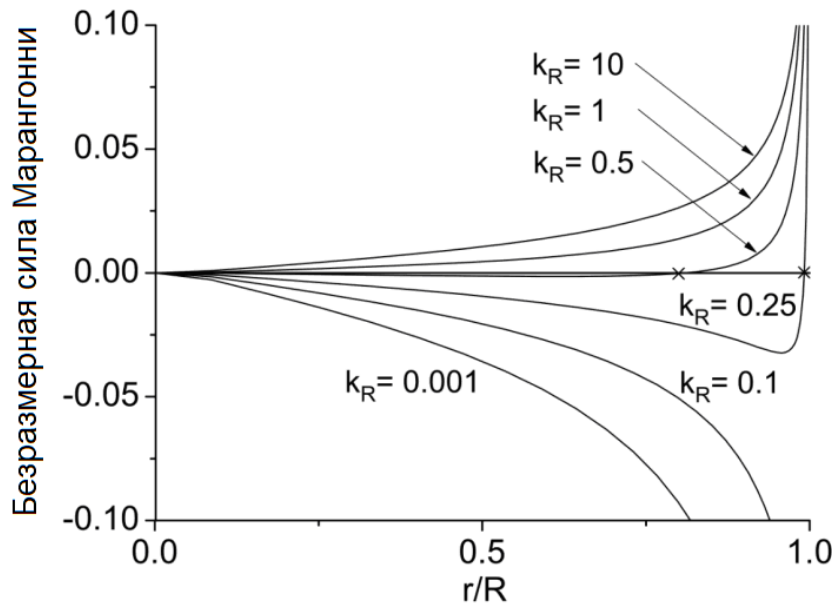
### Результаты и анализ

На основании полученных соотношений проанализируем особенности температурного поля капли, а также силы Марангони, точки стагнации и динамику массы испаряющейся капли. Аналитические решения для испаряющихся капель на подложке рассматривались ранее в [11–13, 21]. Температура на краю капли не зависит от радиуса капли и при больших  $k_R$  стремится к 0 по закону обратной пропорциональности. Для подложек с высокой теплопроводностью (из алюминия, золота, меди, силикона) температура края капли близка к температуре окружающей каплю атмосферы (базовая модель в терминологии [17]). Экспериментальные данные измерений разности температуры на краю капли

на подложках из материалов PTFE, Масог и золота и окружающего газа при атмосферном давлении ( $T_{ambient} - T_S \approx 1.3^\circ C$ ) [17] согласуются с нашими результатами для воды в атмосфере ненасыщенного воздуха  $\Gamma_{ref} \approx 0.11$ ,  $c_{s\infty} c'_{sT}^{-1} = 17.3^\circ C$  при  $H=0.55$  на PTFE, при  $\theta_c = 30^\circ$ :  $\Delta T_{PTFE} \approx 1.3 C^0$ ,  $\Delta T_{Al} \approx 0$ . Наши результаты показывают не только правильный тренд, но и хорошее численное совпадение с экспериментальными данными. Расчеты показывают, что для спонтанно испаряющейся капли по мере уменьшения краевого угла температура в вершине капли при определенных условиях может быть выше, чем на краях капли. На рис. 2 показана зависимость безразмерной разности температур произвольной точки поверхности капли и в ее вершине для различных подложек и контактных углов.



**Рис. 2.** Безразмерная разность температур вдоль поверхности капли для различных подложек и краевых углов



**Рис. 3.** Безразмерная сила Марангони вдоль поверхности капли для различных подложек и краевых углов

По мере уменьшения контактного угла температура меняется монотонно (увеличивается к краю капли) при  $k_R \geq k_c = 0.57$  и становится немонотонной при  $k_R \leq 0.57$ . В точках стагнации (отмечены крестом), в которых температура достигает минимума, сила Марангони меняет направление (безраз-

мерная сила Марангони приведена на рис. 3). Экспериментально эффекты охлаждения каплей исследовались в [22]. Изменение направления силы Марангони зависит от краевого угла. Это ранее было отмечено в работах [2, 6].

Точки стагнации, где температура достигает минимума, сдвигаются к краю капли при уменьшении краевого угла. Около этих точек направление сил Марангони изменяется, и можно ожидать существование течений в противоположных направлениях. Направления сил и положение точек стагнации являются функциями краевого угла и термодинамических параметров модели.

Сравнение результатов с экспериментальными данными для испарения водной капли демонстрирует хорошее согласие (рис. 4;  $\theta_c = 67^\circ\text{C}$  и  $\Gamma = 0.37$ ; кривые 1–3 соответствуют разным температурам, кривая 4 получена для базовой модели [17], квадраты — экспериментальные данные [17]). При низких давлениях наша модель работает хуже.

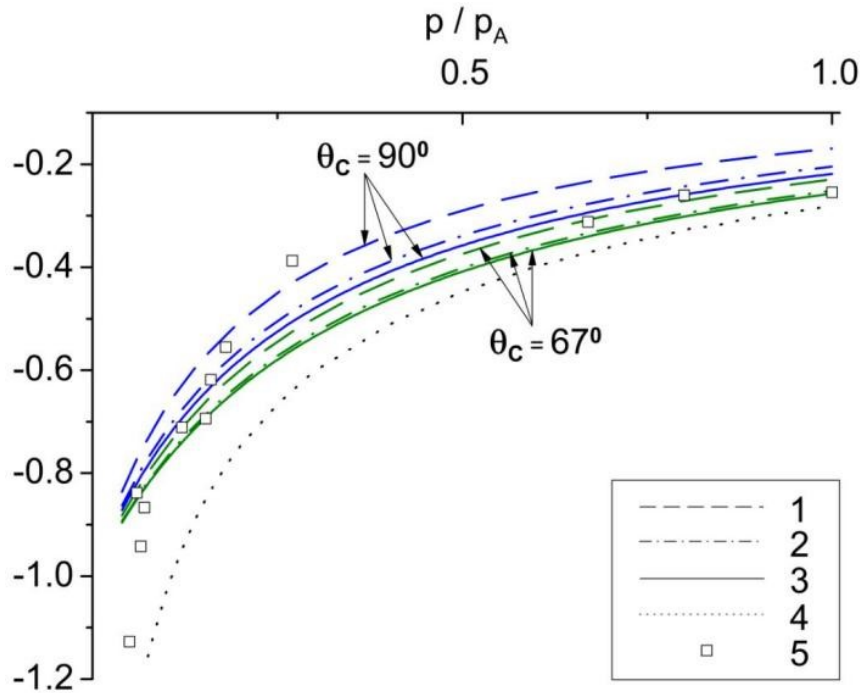


Рис. 4. Разница температур капли и окружающей среды при различных давлениях пара

Разграничение областей монотонного и немонотонного поведения температуры показано на рис. 5 (при нормальных условиях).

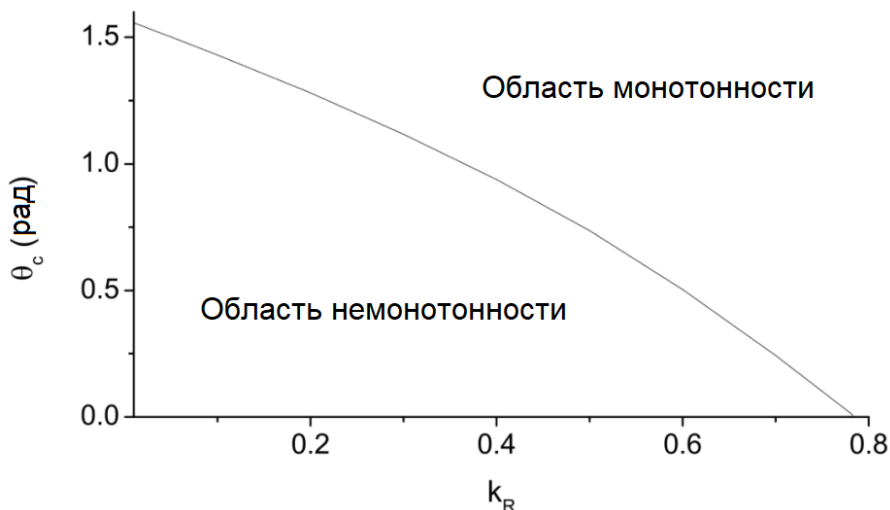


Рис. 5. Разделение областей монотонности и немонотонности температурного профиля

Влияние теплопроводности подложки на геометрию капли и динамика массы капли показаны на рис. 6. Увеличение времени жизни капли на подложках с более низкой проводимостью также отмечалось в [13, 23].

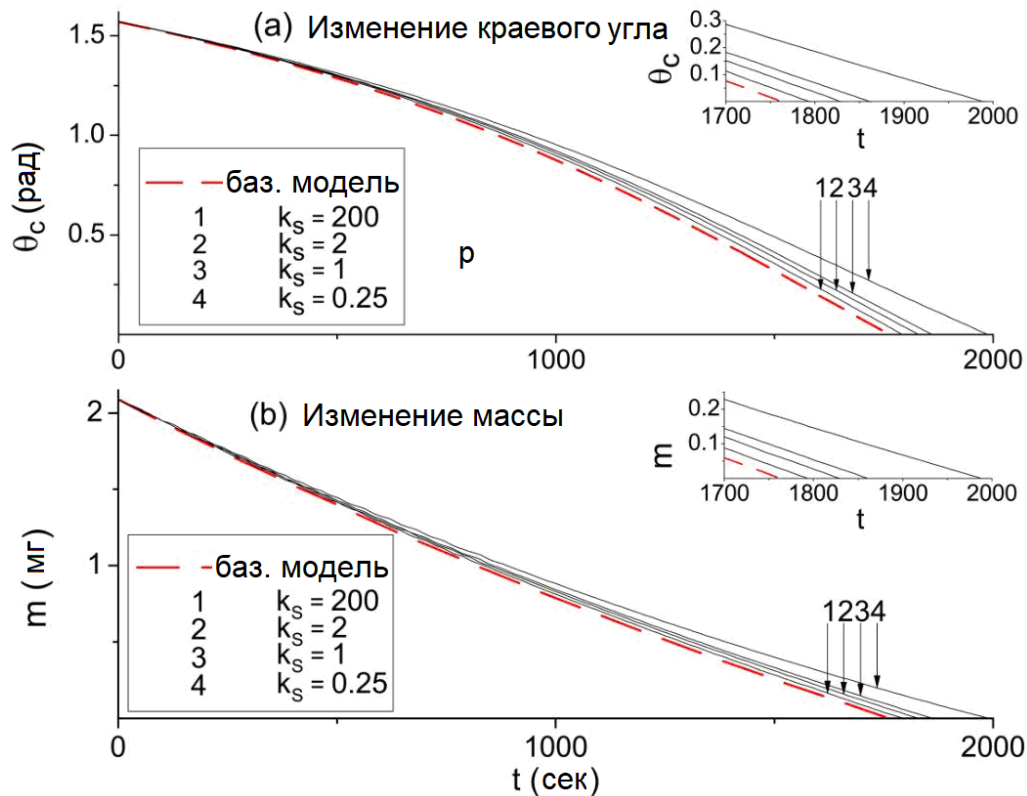


Рис. 6. Динамика критических краевых углов и динамика массы капли ( $\Gamma=0.11$ ,  $R=1$  мм)

### Заключение

Получены аналитические выражения для температуры и концентрации пара для испарения покоящейся капли с закрепленной линией контакта, учитывающие теплопроводящие свойства подложки и жидкости и термодинамические параметры газовой фазы. Исследовано влияние краевого угла и термодинамических параметров на положение точек стагнации, изучена зависимость изменения направления силы Марангони от краевого угла и значений теплопроводностей капли и подложки. Определено критическое значение параметра  $k_c$ , при котором поведение системы меняется. Для  $k_R \geq k_c = 0.57$  температура на поверхности капли монотонная и температура вершины ниже, чем температура рядом с линией контакта. В этом случае возможно формирование течения, направленного к центру около подложки и к краю капли около поверхности капли. Температура на поверхности капли немонотонна при  $k_R \leq k_c$ , что приводит к возникновению точек стагнации, в которых сила Марангони меняет свое направление. Из-за этого формируются противоположно направленные течения. Положение точек стагнации зависит от свойств материалов жидкости и подложки и от краевого угла. При уменьшении краевого угла линии стагнации перемещаются к краям капли. Изменение направления силы Марангони в зависимости от краевого угла ранее отмечалось в работах [2, 6].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Deegan R. D., Bakajin O. T., Dupont F., Huber G., Nagel S. R., Witten T. A. Capillary Flow as the Cause of Ring Stains From Dried Liquid Drops. *Nature*. 1997;389:827–829.
2. Deegan R. D., Bakajin O., Dupont T. F., Huber G., Nagel S. R., Witten T. A. Contact Line Deposits in an Evaporating Drop. *Phys. Rev. E*. 2000;62:756–765.
3. Deegan R. D. Pattern Formation in Drying Drops. *Phys. Rev. E*. 1998;61:475–485.
4. Ristenpart W. D., Kim P. G., Domingues C., Wan J., Stone H. A. Influence of Substrate Conductivity on Circulation Reversal in Evaporating Drops. *Phys. Rev. Lett*. 2007;99:234502.

5. Hu H., Larson R. G. Analysis of the Effects of Marangoni Stresses on the Microflow in an Evaporating Sessile Droplet. *Langmuir*. 2005;21:3972–3980.
6. Hu H., Larson R. G. Evaporation of a Sessile Droplet on a Substrate. *J. Phys. Chem. B*. 2002;106:1334–1344.
7. Hu H., Larson R. G. Analysis of the Micro Fluid Flow in an Evaporating Sessile Droplet. *Langmuir*. 2005;21:3963–3971.
8. Hu H., Larson R. G. Marangoni Effect Reverses Coffee-Ring Depositions. *J. Phys. Chem. B*. 2006;110(14):7090–7094.
9. Watanabe T. Simulation of Surface Flows on a Droplet in an Oscillating Pressure Field. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2011;8(5):1398–1405.
10. Torfi S., Nejad S. Droplet Simulation, a Case Study: Evaporation. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*. 2011;3(6):192–197.
11. Nagornov O. V., Starostin N. V. Influence of Substrate Properties on Evaporation of the Sessile Drop. *Advances in Engineering Mechanics and Materials*. 2014;98–100.
12. Nagornov O. V., Starostin N. V. Influence of Properties of Liquid and Substrate on Evaporation of the Sessile Drop. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*. 2014;9(1):221–225.
13. Dunin S. Z., Nagornov O. V., Starostin N. V., Trifonenkov V. P. Analytical Solution for Evaporating Sessile Drops on Solid Substrates. *Recent Advances in Applied Mathematics, Modelling and Simulation*. 2014;252–255.
14. Popov Y. O. Evaporative Deposition Patterns: Spatial Dimensions of the Deposit. *Phys. Rev. E*. 2005;71:036313.
15. Dunn G. J., Wilson S. K., Duffy B. R., David S., Sefiane K. The Strong Influence of Substrate Conductivity on Droplet Evaporation. *J. Fluid Mech*. 2009;623:329–351.
16. Sefiane K., Wilson S. K., David S., Dunn G. J., Duffy B. R. On the Effect of the Atmosphere on the Evaporation of Sessile Droplet of Water. *Phys. Fluids*. 2009;21:062101.
17. David S., Sefiane K., Tadrist L. Experimental Investigation of the Effect of Thermal Properties of the Substrate in the Wetting and Evaporation of Sessile Drops. *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*. 2007;298:108–114.
18. Semenov S., Starov V. M., Rubio R. G., Agogo H., Velarde M. G. Evaporation of Sessile Water Droplets: Universal Behaviour in Presence of Contact Angle Hysteresis. *Colloids Surf. Aspects*. 2011;391:135–144.
19. Saada M. A., Chikh S., Tadrist L. Evaporation of a Sessile Drop With Pinned or Receding Contact Line on a Substrate With Different Thermophysical Properties. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2013;58:197–208.
20. Lebedev N. N. *Special Functions and Their Applications*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ. 1965:227–230.
21. Gossali G. E., Tonini S. Analytical Solutions for Modelling the Evaporation of Sessile Drops. *Applied Mathematical Modelling*. 2023;114:61–77.
22. Emelyanenko K. A., Emelyanenko A. M., Boinovich L. B. Supercooling of Evaporating Water Droplets on Superhydrophobic Surface at Low Temperatures. *Colloid Journal*. 2025;87(4):481–491.
23. Schofield F., Pritchard D., Wilson S. K., Sefiane K. The Lifetimes of Evaporating Sessile Droplets of Water Can Be Strongly Influenced by Thermal Effects. *Fluids*. 2021;6(4):141.

## ВЫСОКОТОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИКИ ПРИ ОБТЕКАНИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ТЕЛА ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ

А. В. Александров<sup>1,а</sup>, Л. В. Дородницын<sup>2,б</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

<sup>а</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4568-3805>, ✉ [anatoly.v.alexandrov@gmail.com](mailto:anatoly.v.alexandrov@gmail.com)

<sup>б</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5775-2794>, [dorodn@cs.msu.ru](mailto:dorodn@cs.msu.ru)

*Аннотация:* в работе представлена методика численного моделирования акустических возмущений, возникающих в результате рассеяния искусственно сгенерированных турбулентных полей на криволинейных препятствиях. Для расчетов применялись схемы, сохраняющие дисперсионные соотношения, широко используемые в задачах вычислительной аэроакустики. Эти разностные схемы имеют широкий шаблон, обеспечивающий их высокую точность и сеточное разрешение высоких гармоник. С учетом широкого шаблона схемы в центре внимания работы находится проблема постановки численных граничных условий на поверхности твердого тела. Авторы применяют подход, связанный с использованием фиктивной точки (ghost point), расположенной за пределами расчетной области, внутри области твердого тела рядом с границей. Получены новые теоретические результаты для случая криволинейных границ. При задании искусственного турбулентного поля применялась ранее разработанная авторами технология тензорной фильтрации белого шума, адаптированная к двумерной постановке задачи. Приведены результаты выполненного с помощью данной методики моделирования рассеяния турбулентного следа на эллиптическом цилиндре с образованием волн давления.

*Ключевые слова:* акустика, синтетическая турбулентность, разностные схемы, сохраняющие дисперсионные соотношения.

*Благодарности:* результаты работы автора из ИПМ имени М.В. Келдыша РАН получены в рамках госзадания.

*Для цитирования:* Александров А. В., Дородницын Л. В. Высокоточное моделирование акустики при обтекании криволинейного тела турбулентным потоком. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):17–23.

*Поступила в редакцию:* 17.10.2025.

*В окончательном варианте:* 08.11.2025.

## HIGH-PRECISION ACOUSTIC SIMULATION OF A TURBULENT FLOW OVER A CURVED BODY

A. V. Aleksandrov<sup>1,а</sup>, L. V. Dorodnitsyn<sup>2,б</sup>

<sup>1</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

<sup>а</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4568-3805>, ✉ [anatoly.v.alexandrov@gmail.com](mailto:anatoly.v.alexandrov@gmail.com)

<sup>б</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5775-2794>, [dorodn@cs.msu.ru](mailto:dorodn@cs.msu.ru)

*Abstract:* we present a method for numerical modeling of acoustic disturbances generated by the scattering of artificially created turbulent fields on curved obstacles. We performed the calculations using dispersion-preserving finite-difference schemes commonly applied in computational aeroacoustics. These schemes employ wide stencils, providing high accuracy and resolving high-frequency harmonics. Given the wide stencil, we focused on the problem of setting numerical boundary conditions on the surface of a solid body. We applied an approach using a ghost point located inside the solid body near the boundary, outside the computational domain. We obtained new theoretical results for curved boundaries. To generate the artificial turbulent field, we applied a previously developed method of tensor filtering of white noise, adapted to a two-dimensional formulation. We present results of modeling the scattering of a turbulent wake on an elliptical cylinder, demonstrating the formation of pressure waves using this approach.

*Keywords:* acoustics, synthetic turbulence, difference schemes, dispersion-relation-preserving scheme.

*Acknowledgements:* the author, affiliated with the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, worked under a government contract.

*Cite this article:* Aleksandrov A. V., Dorodnitsyn L. V. High-Precision Acoustic Simulation of a Turbulent Flow over a Curved Body. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):17–23.

*Original article submitted:* 17.10.2025.

*Revision submitted:* 08.11.2025.

## Введение

Расчет акустических полей, возникающих в результате взаимодействия турбулентных следов с препятствиями различного рода, является, с одной стороны, важным для инженерных приложений, а с другой — довольно сложной задачей. Например, широко востребовано моделирование акустических полей, возникающих при взаимодействии турбулентного следа, генерируемого винтом вертолета или двигателем с открытым ротором, с находящимися вниз по потоку элементами конструкции. Расчет таких задач напрямую — без привлечения искусственно генерируемых турбулентных полей — представляется очень дорогостоящим, если в принципе возможным. Другим затрудняющим моделирование фактором является необходимость использования в задачах аэроакустики схем высокой точности, которая достигается за счет широких шаблонов. Применение таких схем, в свою очередь, требует корректной численной постановки граничных условий.

Моделирование взаимодействия турбулентного следа с препятствием проводится в три этапа. Вначале решается газодинамическая задача стационарного обтекания тела, для чего применяется метод установления. Затем в подобласти вверх по потоку от тела задаются турбулентные возмущения скорости. Наконец, решается задача нестационарного обтекания, в ходе которого происходит генерация и распространение акустических возмущений.

В настоящей работе приведена оригинальная методика моделирования акустических полей, генерируемых при обтекании криволинейного тела турбулентным потоком. Для численного моделирования как стационарной, так и основной задачи применялись высокоточные схемы, сохраняющие дисперсионные соотношения [1]. Особенность данных схем заключается в использовании для сохранения дисперсионных характеристик более широкого шаблона, чем это необходимо для четвертого порядка аппроксимации. Применение данных схем в задаче с криволинейной границей потребовало доработки численной постановки граничных условий. Процедура генерации турбулентного следа основана на предложенном ранее авторами методе тензорной фильтрации белого шума [2].

В работе описываются вычислительные алгоритмы и технология генерации синтетического турбулентного поля. На основе предложенной методики выполнен расчет рассеяния турбулентного следа на эллиптическом препятствии.

## Вычислительные алгоритмы

Основой газодинамического моделирования служат нелинейные уравнения Эйлера, записанные в квазилинейной форме. В декартовых координатах эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + C_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{U} = (\rho \ u \ v \ p)^\top, \quad (1)$$

$$C_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix}, \quad C_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}.$$

Уравнения Эйлера (1) аппроксимируются на равномерной сетке  $(x_i, y_j)$  с шагами  $(\Delta x, \Delta y)$  разностной схемой

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_x \mathcal{D}_x^h \mathbf{U} + C_y \mathcal{D}_y^h \mathbf{U} = 0.$$

Используется DRP-аппроксимация [1] на 7-точечном шаблоне:

$$\mathcal{D}_x^h u \equiv \frac{1}{\Delta x} [a_1 (u_{i+1} - u_{i-1}) + a_2 (u_{i+2} - u_{i-2}) + a_3 (u_{i+3} - u_{i-3})],$$

$$a_1 = 0.79926643, \quad a_2 = -0.18941314, \quad a_3 = 0.02651995.$$

Ввиду широкого шаблона, DRP-схема вблизи границ области не может задаваться в неизменном виде. Для 7-точечной схемы возникают приграничные полосы шириной в три узла. Иными словами, DRP-схема требует большего числа граничных условий, чем уравнения Эйлера. Условия на внешних границах расчетной области изучались, в частности, в [1, 3]. Для задачи, рассматриваемой в настоящей работе, особо остро стоит вопрос об уравнениях в узлах, прилегающих к твердой стенке обтекаемого тела.

В качестве решения проблемы постановки пристеночных разностных граничных условий лучше других зарекомендовала себя технология «фиктивного узла» (Ghost point) [4]. Она приводит к устойчивым алгоритмам без потери точности в приграничной зоне, в отличие, например, от подхода [5].

Пусть граница твердого тела проходит вдоль прямой  $y = 0$ . В приграничной полосе (узлы  $j = 0, 1, 2$ ) уравнения Эйлера аппроксимируются с использованием несимметричных шаблонов по  $y$ , где коэффициенты выписаны в [1, 4]. Производная давления  $\partial p / \partial y$  реализуется на шаблоне с фиктивным узлом ( $j = -1, 0, \dots, 5$ ). Все остальные производные по  $y$  – на шаблоне в пределах области ( $j = 0, 1, \dots, 6$ ).

На границе ( $j = 0$ ) вертикальная скорость  $v \equiv 0$ . Отсюда

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Аппроксимация на 7-точечном шаблоне в узле  $j = 0$  определяет значение давления в фиктивной точке  $p_{j=-1}$ .

Перейдем к схемам в криволинейных координатах. Базовые идеи заложены в работах [6–8]. Связь между декартовыми  $(x, y)$  и криволинейными  $(\xi, \eta)$  координатами выражается функциями  $\xi(x, y)$ ,  $\eta(x, y)$ . Область в криволинейных координатах изоморфна прямоугольнику

$$\xi_0 \leq \xi \leq \Xi, \quad \eta_0 \leq \eta \leq H.$$

При этом граница  $\eta = \eta_0$  лежит на поверхности тела.

В процессе построения уравнений участвует матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix},$$

которой отвечает якобиан  $\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ . Детальный вывод содержится в [7, 9].

Квазилинейные уравнения Эйлера в криволинейных координатах приобретают вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_\xi \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} + C_\eta \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} = 0, \quad \mathbf{U} = (\rho \ u \ v \ p)^T, \quad (2)$$

$$C_\xi = \xi_x C_x + \xi_y C_y = \begin{pmatrix} u\xi_x + v\xi_y & \rho\xi_x & \rho\xi_y & 0 \\ 0 & u\xi_x + v\xi_y & 0 & \xi_x/\rho \\ 0 & 0 & u\xi_x + v\xi_y & \xi_y/\rho \\ 0 & \gamma\rho\xi_x & \gamma\rho\xi_y & u\xi_x + v\xi_y \end{pmatrix},$$

$$C_\eta = \eta_x C_x + \eta_y C_y = \begin{pmatrix} u\eta_x + v\eta_y & \rho\eta_x & \rho\eta_y & 0 \\ 0 & u\eta_x + v\eta_y & 0 & \eta_x/\rho \\ 0 & 0 & u\eta_x + v\eta_y & \eta_y/\rho \\ 0 & \gamma\rho\eta_x & \gamma\rho\eta_y & u\eta_x + v\eta_y \end{pmatrix}.$$

Обращаем внимание на то, что вектор неизвестных  $\mathbf{U}$  не изменился по сравнению с (1) и компоненты скорости декартовы.

При построении граничных условий введем обозначения для касательной скорости  $U$  и поперечной скорости  $V$ :

$$U = u\xi_x + v\xi_y, \quad V = u\eta_x + v\eta_y.$$

На твердой стенке скорость направлена по касательной:  $V \equiv 0$ . Этому соответствует уравнение для давления

$$U\eta_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + U\eta_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0. \quad (3)$$

Для ортогональных координат, которые рассматривались в [6],  $\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0$ , и в выражении (3) исчезает один член.

Дискретизация уравнений проводится по аналогии со случаем декартовых координат, и давление в фиктивной точке вычисляется из уравнения для  $\partial p / \partial \eta$ , вытекающего из (3).

### Генерация турбулентного поля скоростей

Синтетическая турбулентность — направление, имеющее более чем полувековую историю. Из многочисленных публикаций по этой тематике упомянем [10, 11]. Генерируемое турбулентное поле должно обладать детерминированными и статистическими свойствами, близкими к реальной физике. Важнейшие характеристики перечислены ниже.

1. Поле пульсационных скоростей является бездивергентным (соленоидальным).
2. Основные параметры турбулентности, а также возникающего акустического поля определяет тензор двухточечных пространственных ковариаций скоростей (корреляции второго порядка). Однако для этого тензора нет ни законченной теории, особенно в случае анизотропной турбулентности, ни достаточно полных экспериментальных данных.
3. Необходимо иметь *модельный* тензор, обеспечивающий бездивергентность и количественные характеристики пульсационного поля: тензор турбулентных напряжений Рейнольдса; масштабы турбулентности; энергетический спектр турбулентности.

Для генерации синтетического турбулентного поля в данной работе применяется разновидность метода фильтрации [12, 13]. Строится поле функции тока, ротором которой является пульсационная скорость, в виде свертки поля белого шума с детерминированным ядром. А именно, использовался тензорный метод фильтрации [2] в двумерном (квазитрехмерном) приближении [13].

В двумерном случае функция тока является скалярной  $\psi(\mathbf{x}, t)$  и ее статистику описывает корреляция

$$C(\mathbf{r}) \equiv \langle \psi(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

Преобразование Фурье ставит в соответствие  $C(\mathbf{r})$  спектральную корреляционную функцию  $\hat{C}(\mathbf{k})$ .

Настоящая работа опирается на анизотропную модель [14], развитую затем в [2, 13, 15]:

$$\hat{C}(\mathbf{k}) = 2 l_x l_y l_z f(\xi), \quad \xi^2 = l_x^2 k_x^2 + l_y^2 k_y^2. \quad (4)$$

Здесь фигурируют: волновой вектор  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ , интегральные масштабы турбулентности  $l_x, l_y, l_z$ , изотропная безразмерная спектральная функция  $f(\xi)$ . В работе использовалась функция Липмана (Lipmann)

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi^2 (1 + \xi^2)^3}.$$

Дискретная двумерная модель [12, 13] белого шума представляет собой регулярную решетку точечных вихрей с центрами

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^{(ij)} = (x_i, y_j), \quad n = 1, \dots, N.$$

Поле функции тока дается формулой

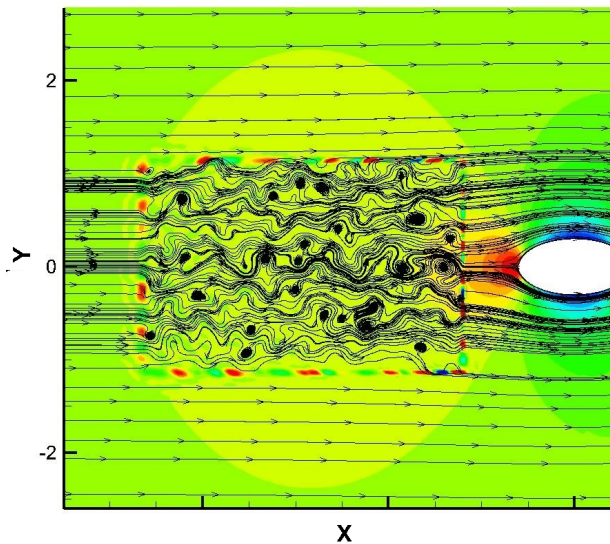
$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N G(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n) \Omega^n \sqrt{\Delta_x \Delta_y}. \quad (5)$$

Здесь  $\Delta_x, \Delta_y$  — расстояния между центрами соседних вихрей; случайная величина  $\Omega^n = \pm 1$  с вероятностью 1/2. Фактически сумма берется только по вихрям, ближайшим к текущей точке  $\mathbf{x}$ .

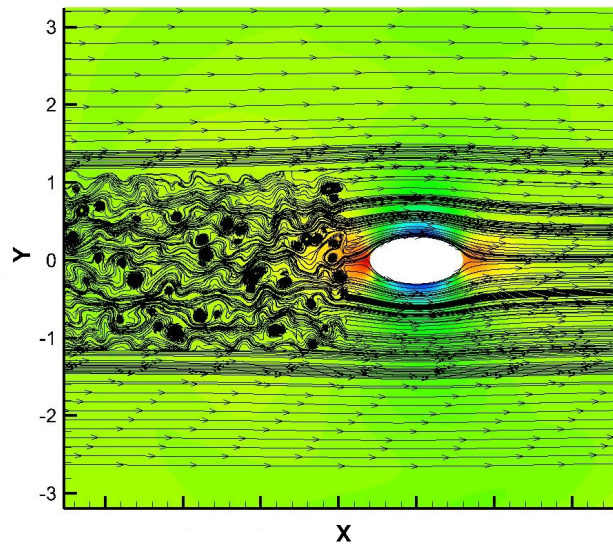
Скалярное ядро фильтра  $G(\mathbf{r})$  с учетом (4) имеет вид:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{g(\zeta)}{\sqrt{l_x l_y l_z}}, \quad g(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{f(\xi)} J_0(\xi \zeta) \xi d\xi, \quad \zeta(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{x^2}{l_x^2} + \frac{y^2}{l_y^2}}, \quad (6)$$

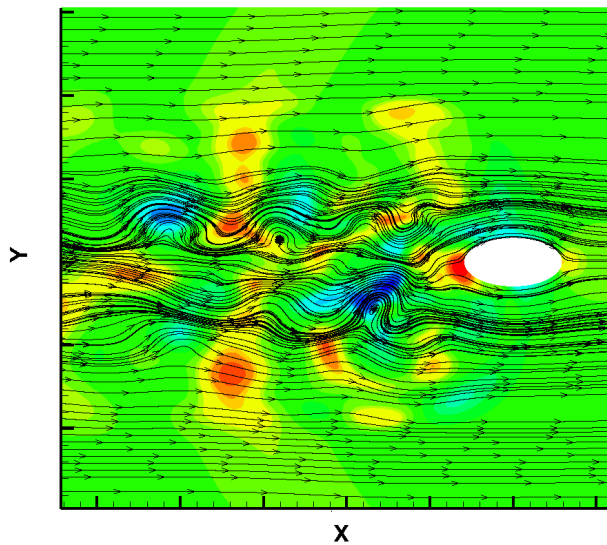
где  $J_0(z)$  — функция Бесселя 1-го рода индекса 0.



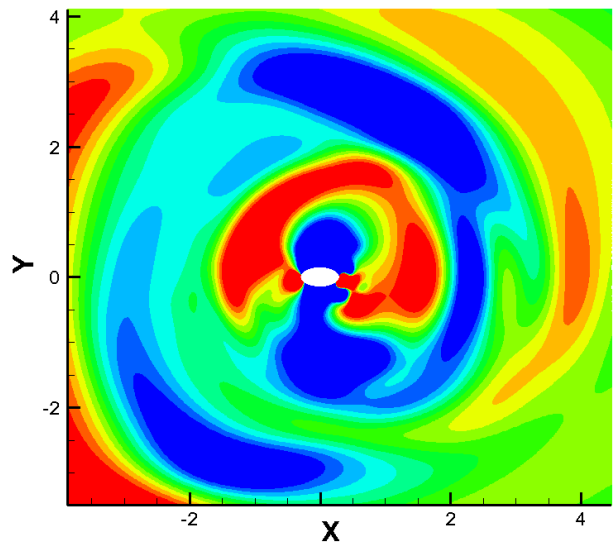
**Рис. 1.** Искусственное турбулентное поле в первые моменты времени



**Рис. 2.** Искусственное турбулентное поле после ухода нефизических возмущений



**Рис. 3.** Искусственное турбулентное поле в первые моменты времени



**Рис. 4.** Искусственное турбулентное поле после ухода нефизических возмущений

### Результаты расчетов

Представленная выше методика применялась для моделирования рассеяния искусственно турбулентного поля, имитирующего турбулентный след, на эллиптическом цилиндре в двумерной постановке. Набегающий невозмущенный поток имел число Маха  $M = 0.3$ . Расчетная область представляла собой пространство между двумя соосными подобными цилиндрами. Полуоси внутреннего эллипса равнялись 0.7 и 0.35 безразмерным единицам, а внешнего — соответственно 300 и 150. Использованная расчетная сетка из  $1000 \times 500$  узлов по  $(\xi, \eta)$  не являлась ортогональной: косинус угла между сторонами ячейки сетки достигал значения 0.6.

Искусственное турбулентное поле задавалось в прямоугольнике, правая сторона которого находилась на расстоянии 0.5 от границы обтекаемого цилиндра вверх по потоку (рис. 1). В первые моменты времени по периметру области искусственно заданной турбулентности образовывались нефизические возмущения, которые в дальнейшем уходили (рис. 2).

Рисунок 3 демонстрирует возмущенное поле скорости в момент, когда турбулентное пятно достигало цилиндра.

На рисунке 4 приведено поле давления вокруг эллиптического цилиндра после прохождения

турбулентного следа. Заметно образование акустических пульсаций, возникших в результате взаимодействия турбулентного следа с препятствием.

### Заключение

Изложена методика моделирования акустических пульсаций, вызванных взаимодействием начального турбулентного следа с препятствием достаточно произвольной формы, имеющим гладкую границу. Теоретической основой алгоритмов является оригинальный метод тензорной фильтрации белого шума для генерации синтетического турбулентного поля скоростей с заданными характеристиками, а также модификация схемы, сохраняющей дисперсионные соотношения, с учетом криволинейных границ твердого тела.

Методика продемонстрировала свою работоспособность на примере моделирования рассеяния турбулентного следа прямоугольных очертаний на препятствии эллиптической формы. Полученные результаты качественно соответствуют физике процесса.

В перспективе предполагается применение данной методики в целях исследования спектральных характеристик шума в дальнем поле, вызванного взаимодействием турбулентного потока с элементами конструкции летательного аппарата.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Tam C. K. W., Webb J. C. Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics. *J. Comput. Phys.* 1993;107:262–281.
2. Александров А. В., Дородницын Л. В. Прямой тензорный метод фильтрации для генерации синтетических турбулентных полей скорости. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2021;95. 15 с. DOI: 10.20948/prepr-2021-95.
3. Александров А. В., Дородницын Л. В. Использование аэроакустических схем высокой точности на регулярных сетках для моделирования вязких течений. *Матем. моделирование.* 2017;29(1):63–83.
4. Tam C. K. W., Dong Z. Wall Boundary Conditions for High-Order Finite-Difference Schemes in Computational Aeroacoustics. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* 1994;6:303–322.
5. Berland J., Bogey C., Marsden O., Bailly C. High-Order, Low Dispersive and Low Dissipative Explicit Schemes For Multiple-Scale and Boundary Problems. *J. Comput. Phys.* 2007;224:637–662. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.10.017.
6. Tam C. K. W. *Computational Aeroacoustics: A Wave Number Approach.* Cambridge University Press; 2012.
7. Marsden O., Bogey C., Bailly C. High-Order Curvilinear Simulations of Flows Around Non-Cartesian Bodies. *J. Comput. Acoustics.* 2005;13(4):731–748. DOI: 10.1142/S0218396X05002906.
8. Marsden O., Bogey C., Bailly C. Direct Noise Computation around a 3-D NACA 0012 Airfoil. *AIAA 2006-2503.* DOI: 10.2514/6.2006-2503.
9. Александров А. В., Дородницын Л. В. Методика моделирования искусственных турбулентных полей высокоточными схемами на криволинейных сетках в присутствии твердых границ. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2025;20. 20 с. Режим доступа: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-20>.
10. Kraichnan R. Diffusion by a Random Velocity Field. *Phys. Fluids.* 1970;13(1):22–31.
11. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. K., Travin A. K. Synthetic Turbulence Generators for RANS-LES Interfaces in Zonal Simulations of Aerodynamic and Aeroacoustic Problems. *Flow Turbulence Combust.* 2014;93(1):63–92. DOI: 10.1007/s10494-014-9534-8.
12. Gea-Aguilera F., Gill J., Zhang X. Synthetic Turbulence Methods for Computational Aeroacoustic Simulations of Leading Edge Noise. *Comp. Fluids.* 2017;157:240–252. DOI: 10.1016/j.compfluid.2017.08.039.
13. Shen Z., Zhang X. Direct Anisotropic Filter Method of Generating Synthetic Turbulence Applied to Turbulence-Airfoil Interaction Noise Prediction. *J. Sound Vibr.* 2019;458:544–564. DOI: 10.1016/j.jsv.2019.07.003.
14. Kerschen E. J., Gliebe P. R. Noise Caused by The Interaction of a Rotor with Anisotropic Turbulence. *AIAA Journal.* 1981;19:717–723.

- 
15. Александров А. В., Дородницын Л. В. Численное моделирование образования отраженных акустических волн при взаимодействии турбулентного следа с прямоугольным профилем. *Прикладная математика и информатика*. 2024;75:52–65.

## О РАЗВИТИИ АЛГОРИТМА МОРФИНГА СЕТОК ДЛЯ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ОБЪЕМОВ

Н. А. Артёмова<sup>1,a</sup>, О. В. Ушакова<sup>1,2,b</sup><sup>1</sup> *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация*<sup>2</sup> *Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация*<sup>a</sup> *ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7305-6799>, [ana@imm.uran.ru](mailto:ana@imm.uran.ru)*<sup>b</sup> *ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-5009-8423>, [uov@imm.uran.ru](mailto:uov@imm.uran.ru)*

*Аннотация:* в связи с усложнением деформирующего тела в технологии построения трехмерных структурированных сеток, предназначенной для моделирования процессов многокомпонентной гидродинамики, описаны исследования с целью расширения возможностей развиваемой технологии: описана модификация алгоритма морфинга сеток для случаев деформации телами, образованными поверхностями вращения с параллельными осями, когда образующие поверхностей вращения могут быть и дугами окружностей. Ранее алгоритм морфинга был реализован для образующих, состоящих только из отрезков прямых. В новой модификации морфинга усложнен и способ формирования тел. Для деформирующих тел рассматриваются парные образующие — левые и правые. В случаях возникновения для них разных по типу тел вращения (для задания отрезками прямых возникают цилиндр и конус) при осуществлении морфинга налагалось ограничение принадлежности узлов обоим телам. Сейчас это ограничение снято (в том числе и для дуг окружностей) и разработан универсальный алгоритм: узел может принадлежать только одному телу вращения. Модификация алгоритма реализована в виде программы на языке C++ по единым для технологии требованиям и может быть выбрана основой системы искусственного интеллекта.

*Ключевые слова:* структурированные сетки, оптимальные сетки, алгоритм морфинга, деформированные объемы.

*Для цитирования:* Артёмова Н. А., Ушакова О. В. О развитии алгоритма морфинга сеток для деформированных объемов. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):24–28.

*Поступила в редакцию:* 10.10.2025.

*В окончательном варианте:* 13.11.2025.

## ADVANCED MESH MORPHING ALGORITHM FOR DEFORMED VOLUMES

N. A. Artyomova<sup>1,a</sup>, O. V. Ushakova<sup>1,2,b</sup><sup>1</sup> *N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*<sup>2</sup> *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*<sup>a</sup> *ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7305-6799>, [ana@imm.uran.ru](mailto:ana@imm.uran.ru)*<sup>b</sup> *ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-5009-8423>, [uov@imm.uran.ru](mailto:uov@imm.uran.ru)*

*Abstract:* we studied how to extend a simulation of 3D structured meshes for multicomponent hydrodynamic processes. We focused on an improved mesh morphing algorithm for cases where the deforming body consists of surfaces of revolution with parallel axes, and the generatrix curve may also be a circular arc. Earlier work implemented morphing only for a generatrix made of straight-line segments.

In the new version, we expanded the body construction method. We introduced two generatrix curves: left and right. When these curves produce different types of surfaces of revolution (for example, a cylinder and a cone), the previous algorithm required each node to belong to both bodies. We removed this restriction (also for circular arcs) and developed a general rule: a node belongs to only one surface of revolution.

We implemented the modified algorithm in C++. It can be used in AI applications.

*Keywords:* structured meshes, optimal meshes, morphing algorithm, deformed volumes.

*Cite this article:* Artyomova N. A., Ushakova O. V. Advanced Mesh Morphing Algorithm for Deformed Volumes. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):24–28.

*Original article submitted:* 10.10.2025.

*Revision submitted:* 13.11.2025.

### Описание целей исследований

В статье описывается дальнейшее развитие алгоритма морфинга сеток, разрабатываемого для моделирования процессов многокомпонентной гидродинамики, см. [1]. Модификация алгоритма осуществлена с целью расширения возможностей технологии расчета сеток [2], для этого она реализована в виде программы на языке C++ по единым для технологии требованиям. Морфинг применяется для построения сеток в объемах вращения, деформированных телами, образованными поверхностями вращения с параллельными осями, называемыми обобщениями объемов вращения. Он осуществляется путем плавной деформации объема вращения и сетки для него с последующей оптимизацией — процедуры, позволяющей улучшить качество деформированной сетки и сделать сетку оптимальной — удовлетворяющей критериям оптимальности [3] и требованиям, необходимым для моделирования многокомпонентных сред, подробно перечисленным в [1]. Процесс морфинга осуществляется до достижения деформации объема нужной степени. Ранее алгоритм был разработан для случаев объемов вращения, деформированных другими объемами вращения [3], а также для случаев деформации телами, образованными вращением отрезков прямых (элементов образующей) вокруг параллельных осей [1]. В настоящей работе рассматривается случай, когда элементы образующей деформирующего тела могут включать в себя и дуги окружностей, т.е. само тело может иметь более сложную форму и состоять из частей цилиндров, конусов и сфер. Усложнен и способ формирования тел. Для этого разработаны универсальные алгоритмы проверки попадания узла в тело и проецирования на границу обобщения объема вращения.

Описываемые исследования были проведены также с целью повышения экономичности алгоритма морфинга — важной характеристики генераторов сеток, см. [4]. В отличие от современных методов морфинга [5], основанных на интерполяции (алгебраическом подходе), алгоритм морфинга [1] разработан с помощью вариационного подхода [3], применяемого для оптимизации сеток. Обоснование целесообразности выбора подхода приведено в [3]. Оптимизация предполагает осуществление итераций, сокращение числа которых было еще одной целью исследований.

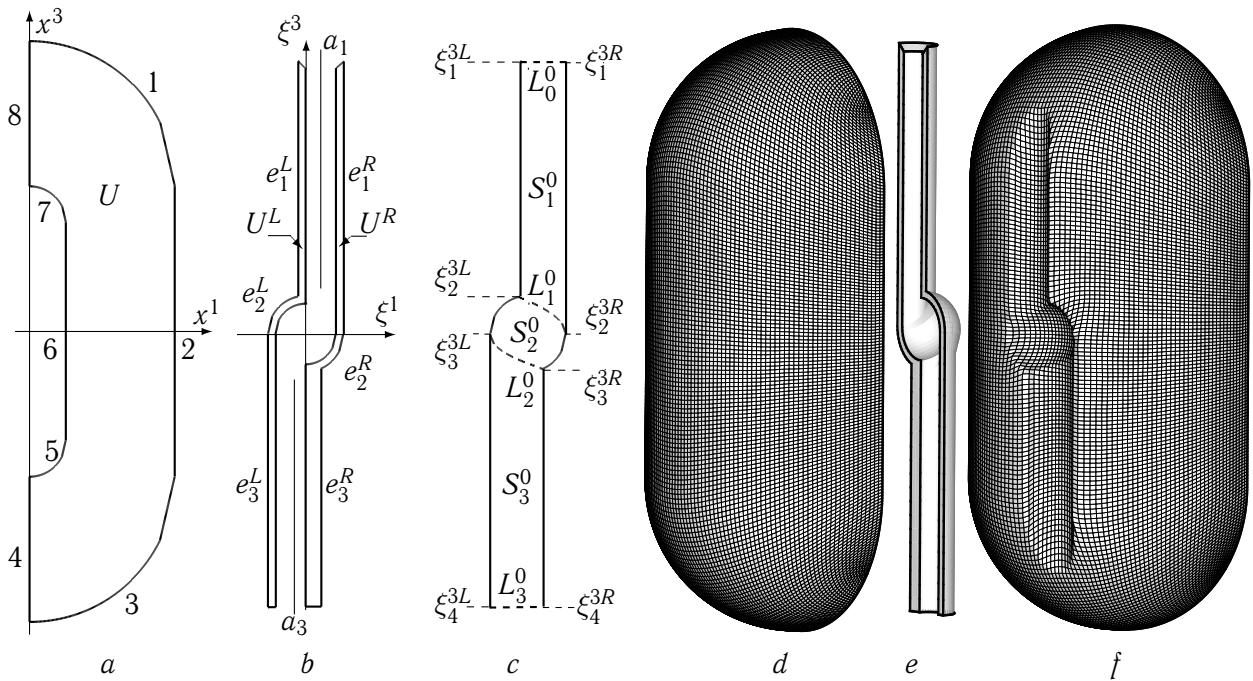
### Изменения в моделировании морфинга сеток

Для описания изменений будем использовать следующие обозначения. Будем называть деформируемый объем также основным объемом, телом, а деформирующий — вспомогательным объемом, телом. Системы координат для задания тел будем называть одноименными телам названиями. На рис. 1(a) элементы образующей основного тела (объема вращения) обозначены цифрами, на рис. 1(b) элементы образующей вспомогательного тела (обобщения объема вращения) —  $e_L^L, e_R^R$  (далее верхние индексы  $L, R$  могут опускаться) для левой и правой образующей соответственно. Элементы образующих вращаются вокруг осей вращения на угол 180 градусов по часовой или против часовой стрелки. Для объема вращения ось вращения — это ось  $x^3$ , а для обобщения объема вращения — это отрезки параллельных прямых  $a_l$ , параллельных оси  $\xi^3$ . На рис. 1(b) обозначены только элементы деформирующей поверхности (они отдельно представлены на рис. 1(c)):  $e_1, e_2, e_3$  (общее число элементов и осей вращения  $I_0 = 8$ ). Ось вращения  $a_2$  совпадает с осью  $\xi^3$ .

Морфинг начинается с генерации [3, 6] структурированной сетки для недеформированного объема вращения (рис. 1(d)) и проводится путем деформации основного тела и сетки для него, которая моделируется движением одного тела на другое, проецированием узлов сетки основного тела (основной сетки), попавших во вспомогательное тело (рис. 1(e)), на деформирующую поверхность (детали см. в [1]). Улучшение качества деформированной сетки осуществляется алгоритмом оптимизации [3]. Итерации повторяются до достижения нужной деформации основного тела, см. рис. 1(f).

Для удобства организации вычислений процесса деформации все проверки проводятся во вспомогательной системе координат, поэтому движется основное тело на вспомогательное. Для достижения плавности процесса деформации возникновение вырождений в деформированной сетке не допускается и движение осуществляется с малым шагом. Для его выбора определяется момент возникновения пересечения тел. Для этого проверяется условие попадания узла в деформирующее тело для узлов приграничной поверхности основной сетки. Условие попадания узла в тело в процессе деформации используется еще раз, но для граничных узлов основного тела, когда тело уже сдвинуто на величину шага деформации. Те узлы, которые попали в тело, проецируются на его поверхность, тем самым сетка деформируется. А далее осуществляется ее оптимизация.

Так как деформация осуществляется с малым шагом, проверка попадания узла в деформиру-



**Рис. 1.** Образующие основного (a) и вспомогательного (b, c) тел, сетка для основного тела (d), вспомогательное тело (e), сетка для деформированного тела (f)

ющее тело осуществляется для обобщения объема вращения с образующей кривой (см. рис. 1(c)), соответствующей только деформирующей поверхности.

Ранее деформирующая поверхность состояла только из цилиндрических и конических поверхностей и условия попадания узла в тело проверялись с помощью условий попадания в конус и цилиндр. При этом на тела налагалось ограничение: при попадании узла в диапазон элементов (третья координата узла попала в диапазоны изменения третьей координаты элементов), когда элементам соответствовали разные тела, условия попадания узла в тело должно выполняться для обоих тел. В этом случае при проецировании узла на соответствующие поверхности вращения в качестве проекции выбиралась ближайшая к узлу (проецирование узлов в этом случае осуществлялось приближенно).

В новой модификации алгоритма морфинга указанное выше ограничение снято (узел может попадать только в одно тело), и разработан универсальный алгоритм (в нем проецирование узлов уже осуществляется во всех случаях точно). Опишем его.

Сначала поясним, как образуется обобщение объема вращения. Элементы  $e_i^L$ ,  $e_i^R$ , описывая одну и ту же поверхность вращения  $S(e_i)$ , формируют тело вращения  $T_i$  (половину от классического тела вращения). Поверхности вращения  $S(e_i)$  и  $S(e_{i+1})$  образуют в пересечении кривые  $L_i = S(e_i) \cap S(e_{i+1})$  с ортогональными проекциями на плоскость  $\xi^1, \xi^3 - L_i^0$  (рис. 1(c)). Криволинейные четырехугольники, ограниченные элементами  $e_i^L$ ,  $e_i^R$  и кривыми  $L_{i-1}^0$  и  $L_i^0$ , обозначим  $S_i^0$  (рис. 1(c)). Для  $S_i^0$  полагается  $L_0^0 = L_0^0$ ,  $e_{i+1}^L = e_i^L$  ( $e_{i+1}^R = e_i^R$ ). Обобщение объема вращения ограничивается областями  $U^L, U^R$  (внутри левой и правой образующих) и поверхностями  $S(e_i)$ , ортогональные проекции которых совпадают с  $S_i^0$ , см. рис. 1(e).

#### Алгоритм проверки попадания узла в тело

Алгоритм состоит в следующем. Пусть  $P = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  — узел сетки во вспомогательной системе координат. Деформирующее тело линейчатými поверхностями, формируемыми прямыми для нахождения ортогональных проекций линий  $L_i$ , проходящими через каждую точку кривой  $L_i$  ортогонально плоскости образующей, разбивается на подтела  $T_i^0$  — части тел вращения  $T_i$ . Ортогональные проекции подтел  $T_i^0$  на плоскость образующей совпадают с четырехугольниками  $S_i^0$  (рис. 1(c)). Для того чтобы проверить, что узел принадлежит телу, достаточно проверить, что он принадлежит какому-либо из его подтел  $T_i^0$ , а для этого нужно проверить, что узел принадлежит телу вращения  $T_i$ , а его ортогональная проекция  $P^0 = (\xi^1, 0, \xi^3) = (\xi^1, \xi^3)$  принадлежит какому-либо из четырехугольников  $S_i^0$ . Это осуществляется с помощью следующего процесса.

Этап 1. Проверка принадлежности узла  $P$  диапазонам элементов. Для элементов образующих

деформирующей поверхности — отрезков прямых  $e_l^L = [P_l^L, P_{l+1}^L]$ ,  $e_l^R = [P_l^R, P_{l+1}^R]$ , ( $P_l = (\xi_l^1, \xi_l^2, \xi_l^3)$ ) либо дуг окружностей  $e_l^L = \cup P_l^L, P_{l+1}^L$ ,  $e_l^R = \cup P_l^R, P_{l+1}^R$  в порядке их нумерации  $l = 1, 2, \dots, K$ , где  $K$  — число элементов, формирующих деформирующую поверхность, проверяем, принадлежит ли третья координата  $\xi^3$  узла сетки  $P$  левому или правому диапазону:  $\xi^3 \in [\xi_l^3, \xi_{l+1}^3]$  (рис. 1(c)). Считаем, что  $\xi_1^{3L} = \xi_1^{3R}$  и  $\xi_K^{3L} = \xi_K^{3R}$ , нумерация элементов осуществляется в порядке убывания третьих компонент  $\xi_l^3$  их концов ( $\xi_{l+1}^3 < \xi_l^3$ ), отрезки прямых, перпендикулярные оси вращения, в образующей деформирующей поверхности не допускаются, дуги окружностей задаются однозначными функциями  $\xi^3 = \xi^3(\xi^1)$ . Если условие выполнено, переходим к этапу 2. Если нет, переходим к следующему элементу.

Этап 2. Проверка  $P \in T_l$ . Проверяем выполнение неравенств:  $f_l \leq 0$ , где

$$\begin{aligned} f_l &= (\xi^1 - a_l)^2 + (\xi^2)^2 - R_l^2, \\ f_l &= (\xi^1 - a_l)^2 + (\xi^2)^2 - t^2(\xi^3 - \xi_{V_l}^3)^2, \\ f_l &= (\xi^1 - a_l)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3 - \xi_{O_l}^3)^2 - R_l^2 \end{aligned}$$

для цилиндра, конуса и сферы с центром  $O_l = (a_l, 0, \xi_{O_l}^3)$ , соответственно. Радиус  $R_l$  цилиндра определяется как разность координат  $\xi^1$  для образующей цилиндра (см., например,  $e_1^R$  на рис. 1(b)) и оси вращения (например,  $a_l$ ), радиус  $R_l$  сферы задается пользователем в файле с описанием геометрии образующей кривой. Параметр  $a_l$  — это координата  $\xi^1$  оси вращения  $a_l$  (для удобства с тем же обозначением). Для конуса  $t = (\xi_l^1 - \xi_{l+1}^1)/(\xi_l^3 - \xi_{l+1}^3)$  координата вершины  $V_l$ :  $\xi_{V_l}^3 = \xi_l^3 - (\xi_l^1 - a_l)/t$ . Если условие выполнено, переходим к этапу 3, если нет — к следующему элементу.

Этап 3. Проверка  $P^0 \in S_l^0$ . После проверок этапов 1, 2 известно: узел  $P$  лежит в диапазоне элементов  $e_l^L, e_l^R$  по  $\xi^3$  и принадлежит телу вращения  $T_l$ . Так как узел принадлежит телу вращения, его ортогональная проекция  $P^0$  принадлежит ортогональной проекции тела вращения  $T_l$ , а значит, находится либо на, либо правее левой границы четырехугольника  $S_l^0$  или на, либо левее его правой границы. Нужно убедиться только для проекций  $P^0$ , попадающих в диапазон линии  $L_{l-1}^0$  по  $\xi^1$ , т.е. когда  $\xi^1 \in [\xi_{l-1}^{1L}, \xi_{l-1}^{1R}]$ , что они лежат не выше линии  $L_{l-1}^0$  (условие а), и только для проекций  $P^0$ , попадающих в диапазон линии  $L_l^0$  по  $\xi^1$ , т.е. когда  $\xi^1 \in [\xi_l^{1L}, \xi_l^{1R}]$ , что они лежат не ниже линии  $L_l^0$  (условие б). Для этого для первого элемента ( $l = 1$ ) нужно проверить выполнение только условия (б), так как  $\xi_1^{3L} = \xi_1^{3R}$ , а для последнего элемента ( $l = K$ ) условие (б) проверять не нужно, так как  $\xi_K^{3L} = \xi_K^{3R}$ . Для него и внутренних элементов ( $l = 2, \dots, K-1$ ) условие (а) проверять в данном процессе тоже не нужно, так как проекции линий пересечения поверхностей — это дуги ветвей парабол  $\xi^1 = \xi^1(\xi^3)$  (как на рис. 1(c) линии  $L_1^0, L_2^0$ ) либо отрезки прямых линий, проходящих через концы элементов и поэтому лежащих не ниже прямой линии  $\xi^3 = \min\{\xi_{l-1}^{3L}, \xi_{l-1}^{3R}\} = \xi_{\min, l-1}^3$  (для примера см. рис. 1(c),  $\xi_{\min, l-1}^3 = \xi_{l-1}^{3R}$ ). Поэтому для всех проекций с диапазоном из условия (а), лежащих ниже прямой линии  $\xi^3 = \xi_{\min, l-1}^3$ , условие (а) выполняется. А для проекций, лежащих на самой линии и выше, это условие также выполняется, так как в этом случае, если проекции узлов не принадлежат проекции верхнего тела  $T_{l-1}$ , то они, очевидно, находятся ниже линии пересечения  $L_{l-1}^0$  его поверхности с поверхностью нижнего тела, а если принадлежат, то для них было не выполнено условие (б) для элемента  $l-1$  (в противном случае соответствующие узлы принадлежали бы подтелу  $T_{l-1}^0$ ), а невыполнение условия (б) для элемента  $l-1$  — это выполнение условия (а) для элемента  $l$ .

Уравнения линий  $L_l^0$  находятся путем решения системы уравнений  $f_l = 0$ ,  $f_{l+1} = 0$  в виде  $\xi^3 = \xi^3(\xi^1)$  (в случае парабол выбирается одна из ветвей — та, которая проходит через концы левого и правого элементов).

Если условие этапа 3 выполнено, узел принадлежит деформирующему телу. Если нужно найти его проекцию на поверхность вращения, находим ее по алгоритму из [3]. Если условие этапа 3 не выполнено, переходим к следующему элементу. Если условия этапов 1–3 не выполнены ни для какого из элементов деформирующей поверхности, то узел не принадлежит деформирующему телу.

Алгоритм проверки попадания узла в тело используется и в алгоритме оптимизации. Так как проецирование узлов на границу области осуществляется точно, возросла точность аппроксимации краевых условий в вариационных задачах построения сеток<sup>1</sup>. Это позволило сократить количество итераций оптимизации (см. примеры расчетов далее).

<sup>1</sup> Их отличия от других вариационных задач оптимизации сеток [7–10] приведены в [3].

### Примеры расчетов

Морфинг для объемов, приведенных на рис. 1(*d,e*), осуществлялся на персональном компьютере<sup>2</sup> с разными параметрами. Для построения сетки из  $101 \times 161 \times 30 = 487830$  узлов на рис. 1(*f*) потребовалось 248 шагов морфинга по 50 итераций оптимизации на каждом шаге (8 часов 43 минуты). На 100-ом (200-ом) шагах морфинга оптимизация проводилась во всем объеме, на остальных шагах — в деформированном фрагменте. На более густой сетке  $151 \times 181 \times 30 = 819930$  узлов с такими же параметрами оптимизации морфинг осуществился за 101 шаг (5 часов 22 минуты). Количество итераций оптимизации в расчетах (см., например, [1]) было 100–300, и морфинг длился несколько суток. В новой модификации морфинга осуществляется 50 итераций оптимизации.

### Выводы

Универсальный алгоритм проверки попадания узла в тело снимает ограничение на геометрию тел, позволяет более точно аппроксимировать граничные условия в вариационных задачах построения сеток и в результате не только осуществить построение сеток для существенно более сложных геометрий, чем в примерах, рассчитанных авторами ранее (и в примерах других авторов [7–10], где рассматриваются либо двумерные примеры, либо для трехмерного случая более простые геометрии), но и сократить в несколько раз количество итераций оптимизации, а как итог — общее время морфинга.

Таким образом, универсальный алгоритм проверки попадания узла в тело позволил существенно расширить класс деформируемых областей и возможности алгоритма морфинга, повысить его эффективность.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Артёмова Н. А., Ушакова О. В. Алгоритм морфинга для построения структурированных сеток в деформированных объемах. *Сиб. журн. вычисл. математики*. 2025;28(3):257–267. DOI: 10.15372/SJNM20250302.
2. Anuchina A. I., Artyomova N. A., Gordeychuck V. A., Ushakova O. V. A Technology for Grid Generation in Volumes Bounded by the Surfaces of Revolutions. *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* 2019;131:281–292. DOI: 10.1007/978-3-030-23436-2\_21.
3. Ушакова О. В. О развитии вариационного подхода построения оптимальных сеток (обзор). *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2023;29(2):217–247. DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-217-247.
4. Cary A. et al. Realizing the Vision of CFD in 2030. *Computing in Science and Engineering*. 2022;24(1):64–70. DOI: 10.1109/MCSE.2021.3133677.
5. Malcevic I., Mousavi A. Explicit Interpolation-Based CFD Mesh Morphing. *SIAM International Meshing Roundtable*. Ruiz-Girones E., Sevilla R., Moxey D. eds. 2023:189–215. DOI: 10.1007/978-3-031-40594-5\_9.
6. Бронина Т. Н. Алгоритмы построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2008;14(1):3–10.
7. Knupp P. Seventeen Criteria for Evaluating Jacobian-Based Optimization Metrics. *Engineering with Computers*. 2024;40(3):1375–1396. DOI: 10.1007/s00366-023-01869-w.
8. Dobrev V., Knupp P., Kolev T., Mittal K., Tomov V. hr-Adaptivity for Nonconforming High-Order Meshes with the Target Matrix Optimization Paradigm. *Eng. Comput.* 2022;38:3721–3737. DOI: 10.1007/s00366-021-01407-6.
9. Dobrev V., Knupp P., Kolev T., Mittal K., Rieben R., Tomov V. Simulation-Driven Optimization of High-Order Meshes in ALE Hydrodynamics. *Computers and Fluids*. 2020;208(4). DOI: 10.1016/j.compfluid.2020.104602.
10. Xu K., Gao X., Chen G. Hexahedral Mesh Quality Improvement via Edge-Angle Optimization. *Comput. Graph.* 2018;70:17–27. DOI: 10.1016/j.cag.2017.07.002.

<sup>2</sup> 2-ядерный процессор Intel Core i3-7100, частота 3.9 ГГц, 16Гб ОЗУ, 64-разрядная ОС.

## ВЫДЕЛЕНИЕ ВЫСОКОПРОВОДЯЩИХ ПУТЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ЗОН ТРЕЩИНОВАТОСТИ ПРИ ПОМОЩИ АКУСТИЧЕСКОГО КАРОТАЖА

Ю. Б. Чен-лен-сон

*Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7484-6872>, ✉ [chen-len-sony@mail.ru](mailto:chen-len-sony@mail.ru)*

*Аннотация:* статья посвящена применению анализа волны Стоунли акустического каротажа полного волнового пакета для выявления высокопроводящих путей фильтрации и зон трещиноватости в нефтегазовых коллекторах. Рассмотрены физические основы распространения волны Стоунли в системе «скважина-порода» и механизмы ее взаимодействия с проницаемыми зонами и трещинами. Показано, что затухание волны Стоунли обусловлено пороупругим взаимодействием, описываемым теорией Био–Розенбаума, и монотонно возрастает с увеличением проницаемости породы. Трещины, пересекающие ствол скважины, проявляются как резкие локальные аномалии затухания и амплитуды волны. Представлена методика измерений и обработки данных, включающая выделение волны Стоунли, расчет ее кинематических и динамических параметров, а также количественную интерпретацию с использованием петрофизических моделей. Проанализированы факторы, влияющие на измерения: условия в скважине, свойства бурового раствора, литология, пористость, насыщенность флюидами, температура и напряженное состояние пород. Рассмотрены современные российские приборы широкополосного акустического каротажа, обеспечивающие технологическую независимость отечественной нефтегазовой отрасли. Описаны практические применения метода на различных этапах освоения месторождений: от поисково-разведочного бурения до оптимизации систем разработки. Метод особенно эффективен для характеристики трещиноватых карбонатных коллекторов, планирования гидроразрыва пласта и контроля обводненности. Включение широкополосной акустики в стандартный комплекс геофизических исследований позволит существенно повысить эффективность разработки месторождений углеводородов.

*Ключевые слова:* волна Стоунли, акустический каротаж, высокопроводящие пути фильтрации, трещиноватость, проницаемость, пороупругость, нефтегазовые коллекторы, геофизические исследования скважин.

*Для цитирования:* Чен-лен-сон Ю. Б. Выделение высокопроводящих путей фильтрации и зон трещиноватости при помощи акустического каротажа. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):29–34.

*Поступила в редакцию:* 23.10.2025.

*В окончательном варианте:* 05.12.2025.

## STONELEY WAVE ANALYSIS FOR DETECTION OF HIGH-CONDUCTIVITY FLOW PATHS AND FRACTURE ZONES IN OIL AND GAS RESERVOIRS

Yu. B. Chen-len-son

*Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”,  
Moscow, Russian Federation*

*ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7484-6872>, ✉ [chen-len-sony@mail.ru](mailto:chen-len-sony@mail.ru)*

*Abstract:* we studied the use of Stoneley-wave analysis from full-waveform acoustic logs to detect and characterize high-conductivity flow paths and fracture zones in oil and gas reservoirs. We examined the physical principles of Stoneley-wave propagation in the borehole-formation system and the mechanisms that control its response to permeable zones and fractures. Stoneley-wave attenuation is controlled by poroelastic effects described by the Biot–Rosenbaum model and increases steadily with formation permeability. Fractures that cut the wellbore appear as sharp local anomalies in Stoneley-wave attenuation and amplitude.

We presented the measurement and processing workflow, including Stoneley-wave extraction, calculation of its kinematic and dynamic parameters, and quantitative interpretation using petrophysical models. We analyzed the main factors that affect these measurements: borehole conditions, drilling-fluid properties, lithology, porosity, fluid saturation, temperature, and in-situ stress. We also reviewed modern Russian broadband acoustic logging tools that support technological independence of the domestic oil and gas sector.

We described practical applications of the method at different stages of field development, from exploration drilling to production optimization. The approach is especially effective for characterizing fractured carbonate reservoirs, planning hydraulic-fracturing operations, and managing water cut. Integrating broadband acoustic logs into standard well-logging programs significantly improves the efficiency of hydrocarbon-field development.

*Keywords:* Stoneley wave, acoustic logging, high-conductivity flow paths, fracturing, permeability, poroelasticity, oil and gas reservoirs, well logging.

*Cite this article:* Chen-len-son Yu. B. Stoneley Wave Analysis for Detection of High-Conductivity Flow Paths and Fracture Zones in Oil and Gas Reservoirs. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):29–34.

*Original article submitted:* 23.10.2025.

*Revision submitted:* 05.12.2025.

## Введение

В современной нефтегазовой промышленности одной из ключевых задач является выявление высокопроницаемых путей фильтрации флюидов в пласте. Эти пути могут быть представлены естественными трещинами, кавернами, зонами повышенной проницаемости или техногенными каналами. Их наличие критически влияет на эффективность разработки месторождений, успешность гидроразрыва пласта, контроль обводненности и прогнозирование прорывов воды или газа [1, 2].

Формирование высокопроницаемых путей фильтрации флюидов в пласте происходит под влиянием различных геологических процессов: тектонических движений, приводящих к образованию систем трещин и разломов; процессов выщелачивания и карстообразования, особенно в карбонатных породах; а также техногенного воздействия на пласт в процессе разработки месторождения [3].

Традиционные методы оценки проницаемости, основанные на анализе керна или стандартных каротажных данных, часто не позволяют обнаружить высокопроницающие пути, особенно если они представлены субвертикальными трещинами или имеют ограниченное распространение. Акустический каротаж полного волнового пакета и, в частности, анализ волны Стоунли (Stoneley wave) предоставляет уникальную возможность дистанционного выявления таких зон непосредственно в скважинных условиях [5, 6].

Волна Стоунли представляет собой интерфейсную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела «скважина-порода». Ее особенность заключается в высокой чувствительности к гидравлической связи ствола скважины с пластом. Когда волна Стоунли проходит мимо проницаемой зоны или трещины, часть ее энергии расходуется на возбуждение движения флюида в пласте, что приводит к затуханию волны и изменению ее скорости [1, 2]. Это регистрируется приемниками акустического зонда и используется для оценки проницаемости и выявления трещин.

## Физические основы распространения волны Стоунли

Волна Стоунли является одним из типов упругих волн, регистрируемых при акустическом каротаже полного волнового пакета. Она распространяется вдоль стенки скважины с низкой скоростью (обычно немного ниже скорости звука в буровом растворе) и характеризуется максимальной амплитудой среди всех типов волн в акустическом сигнале (рис. 1).

Физически волна Стоунли представляет собой колебательную систему, в которой участвуют как флюид в скважине, так и породы околоскважинной зоны. При прохождении волны происходит радиальное перемещение флюида у стенки скважины, которое вызывает деформацию породы. В непроницаемой породе эта деформация является чисто упругой и волна распространяется без потерь энергии, за исключением небольшого геометрического затухания и внутреннего трения в породе и флюиде [7].

Ситуация кардинально меняется при наличии проницаемости. Радиальное движение флюида, вызванное волной Стоунли, создает периодический градиент давления на границе скважины. Этот процесс описывается уравнениями Био [1, 2] и приводит к потерям энергии волны, которые проявляются как затухание.

Величина затухания волны Стоунли зависит от частоты волны, проницаемости породы, вязкости флюида и геометрии порового пространства. Эта зависимость была теоретически описана в работах Био, Розенбаума и других исследователей [1, 2, 3]. Ключевым параметром является так называемая характеристическая частота Био, которая разделяет низкочастотный режим (где флюид в порах успевает следовать за деформацией твердого скелета) и высокочастотный режим (где возникают значительные вязкие потери).

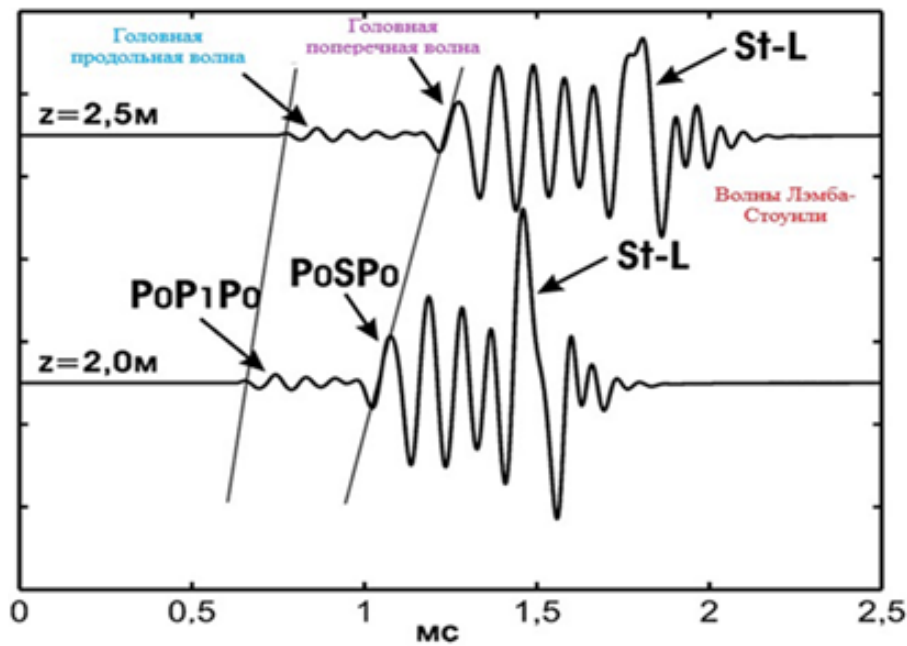


Рис. 1. Волновой пакет акустического каротажа

Для частот волны Стоунли (1–5 кГц) и проницаемостей коллекторов (от миллиарда до нескольких дарси) реализуется переходный режим, в котором затухание волны Стоунли чувствительно к проницаемости. Математическое описание этого процесса достаточно сложно и требует численного моделирования, однако качественно можно утверждать, что затухание волны Стоунли монотонно возрастает с увеличением проницаемости [4, 5].

#### Механизм взаимодействия волны Стоунли с трещинами

Особый интерес представляет взаимодействие волны Стоунли с трещинами, пересекающими ствол скважины. Трещина представляет собой разрыв сплошности породы с раскрытием от микрон до миллиметров.

Когда волна Стоунли достигает открытой в скважину трещины, происходит резкое изменение граничных условий. Трещина действует как зона с высокой «проницаемостью». Это приводит к нескольким наблюдаемым эффектам [5, 6]:

- резкое затухание амплитуды волны. Часть энергии волны расходуется на возбуждение колебаний флюида внутри трещины. Открытая трещина с раскрытием в несколько десятых миллиметра может поглотить до 50–70% энергии волны Стоунли;
- изменение скорости распространения волны. Наличие трещины удлиняет путь волны вдоль границы раздела «скважина-порода», что приводит к уменьшению скорости волны Стоунли в зоне трещины. Этот эффект хорошо заметен для широких открытых трещин.

Чувствительность волны Стоунли к трещинам зависит от их ориентации в пространстве. Трещины, пересекающие скважину под большими углами (субперпендикулярные), создают максимальный эффект, в то время как субпараллельные трещины могут быть практически невидимы для волны Стоунли, но проявляются в изменении скоростей других типов волн (например, поперечных волн) [6, 7].

#### Методика измерений и обработки данных

Современные акустические зонды для каротажа полного волнового пакета представляют собой сложные многоэлементные устройства. Типичный зонд включает один или несколько излучателей (обычно монополюсных или дипольных) и массив приемников, расположенных на различных расстояниях от излучателя.

Излучатель генерирует широкополосный акустический импульс, который возбуждает в системе «скважина-порода» различные типы волн: продольные, поперечные, волну Стоунли. Эти волны распространяются вдоль скважины с различными скоростями и регистрируются приемниками в виде сложного многокомпонентного сигнала [8].

### Выявление высокопроводящих путей фильтрации

Высокопроводящие пути фильтрации в пласте могут быть представлены различными геологическими объектами: естественными трещинами, кавернами. Все эти объекты объединяет то, что они обеспечивают преимущественные пути движения флюидов с проницаемостью, значительно превышающей матричную проницаемость породы.

Волна Стоунли обладает высокой чувствительностью к таким зонам благодаря механизму порупругого взаимодействия [4, 5].

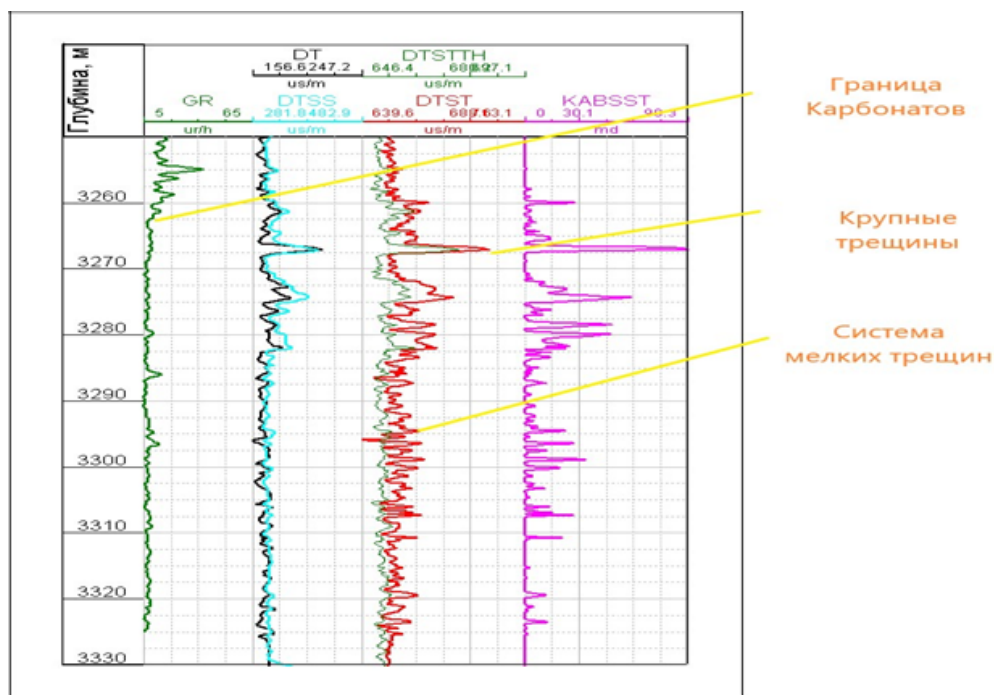


Рис. 2. Пример влияния трещиноватости на волны Стоунли

Типичные признаки высокопроводящего пути на данных волны Стоунли:

- резкое увеличение затухания. В зоне повышенной проницаемости коэффициент затухания волны Стоунли может увеличиваться в несколько раз по сравнению с фоновыми значениями. Для трещин характерна узкая (10–30 см) локализованная аномалия, тогда как зоны повышенной матричной проницаемости создают более широкие (метры) зоны повышенного затухания. Для оценки строится непрерывный каротажный профиль затухания, на котором высокопроницаемые зоны проявляются как пики (рис. 2);

- уменьшение скорости. Высокопроницаемые зоны характеризуются пониженной эффективной жесткостью, что приводит к снижению скорости волны Стоунли. Этот эффект менее выражен, чем изменение затухания, но может служить дополнительным диагностическим признаком.

Важным аспектом является разделение эффектов проницаемости матрицы и трещиноватости. Матричная проницаемость создает относительно плавные изменения затухания волны Стоунли, коррелирующие с литологией и пористостью. Трещины же проявляются как резкие локальные аномалии с характерной шириной, определяемой раскрытием трещины и разрешающей способностью метода (рис. 3).

Корреляция с имиджами ствола скважины (акустическими или резистивиметрическими) позволяет визуально подтвердить наличие трещин и оценить их ориентацию [7, 8].

Современные подходы к интерпретации включают использование машинного обучения и нейронных сетей для автоматического выделения аномальных зон. Обучающие выборки формируются на основе скважин с известными характеристиками (данные керна, испытаний, продуктивности), после чего модель применяется для предсказания свойств в новых скважинах.

На приведенных выше примерах (рис. 2 и рис. 3) показано наличие и отсутствие признаков трещиноватости при анализе волны Стоунли. Эти выводы были подтверждены целым рядом гидродинамических исследований.

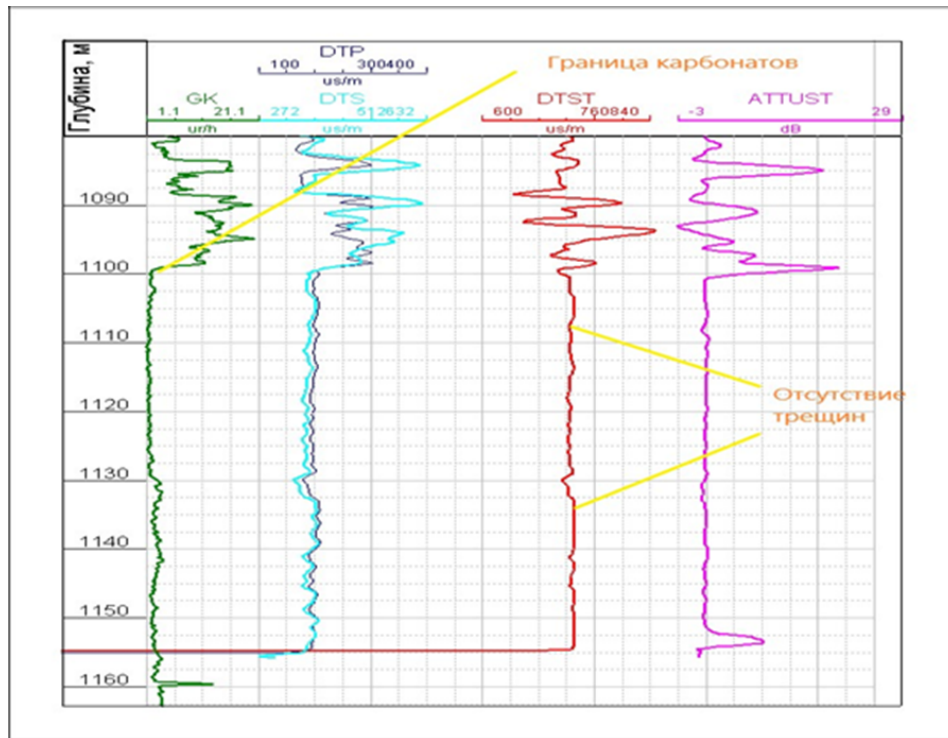


Рис. 3. Пример отсутствия трещиноватости и наличия только матричной проницаемости

#### Детектирование и характеристика трещин

Трещиноватость является одним из наиболее важных факторов, определяющих фильтрационно-емкостные свойства коллекторов, особенно в карбонатных и низкопроницаемых терригенных породах. Трещины могут увеличивать эффективную проницаемость пласта на несколько порядков величины, создавать анизотропию фильтрационных свойств и определять направления преимущественного движения флюидов [9].

Волна Стоунли предоставляет уникальные возможности для выявления и характеристики трещин, пересекающих ствол скважины. Основные параметры трещин, которые могут быть оценены по данным волны Стоунли:

- наличие и положение трещины. Открытая проводящая трещина проявляется как резкая локальная аномалия на профилях затухания и амплитуды волны Стоунли. Ширина аномалии определяется раскрытием трещины, углом ее пересечения со скважиной и разрешающей способностью метода (обычно 15–30 см). Точность локализации трещины составляет 5–10 см, что сопоставимо с данными имиджей ствола скважины [5, 6];

- раскрытие трещины. Величина аномалии затухания или потери амплитуды волны Стоунли связана с раскрытием трещины. Для количественной оценки используются теоретические и эмпирические модели, связывающие измеренное затухание с эффективным раскрытием. Типичный диапазон чувствительности составляет от 10 микрон до нескольких миллиметров. Трещины с раскрытием менее 10 микрон обычно не создают заметного эффекта, в то время как трещины с раскрытием более 1 мм могут практически полностью поглощать волну Стоунли [4, 5];

- частота трещиноватости. В зонах интенсивной трещиноватости, где расстояние между трещинами сопоставимо с разрешением метода, отдельные трещины могут не разрешаться, но проявляется общее повышение затухания волны Стоунли. Это позволяет выделять зоны повышенной трещиноватости и оценивать среднюю проницаемость трещиноватой среды [7, 8].

Важным аспектом является учет ориентации трещин. Волна Стоунли наиболее чувствительна к трещинам, пересекающим скважину под большими углами. Для выявления субвертикальных трещин в вертикальных скважинах эффективнее использовать анализ поперечных волн, возбуждаемых дипольным излучателем, которые чувствительны к азимутальной анизотропии. Комбинирование данных монополюсного (волна Стоунли) и дипольного (поперечные волны) каротажа позволяет получить более полную характеристику системы трещин [6].

### Современные российские приборы широкополосного акустического каротажа

ООО «Научно-производственное предприятие «Тверьгеофизика» — прибор АСПЕКТ (акустическая система для петрофизических исследований и контроля технического состояния).

АО «Сибирская геофизическая научно-производственная компания» (СибГНПК) — приборы ЗВУК-3 и СОННИК.

АО «Ижевский радиозавод» (ИРЗ) — прибор АКРП-1 (акустический каротаж с расширенными параметрами).

ООО «ГеоТЭК» — прибор УЗОР-2 (ультразвуковой зонд для оценки резервуаров).

ОАО «Каротаж» (г. Бийск) — прибор ТЕЛЕСКОП-М.

АО «Научно-производственная фирма «Геофизика» (г. Уфа) — прибор ВОЛНА-АК.

### Выводы

Анализ волны Стоунли для выявления высокопроводящих путей фильтрации и трещин должен находить широкое применение на различных этапах освоения месторождений в процессе оценки коллекторских свойств при поисково-разведочном бурении. Выявление проницаемых интервалов и трещиноватых зон позволяет оптимизировать программу испытаний и отбора керна. Данные волны Стоунли позволят определить интервалы для перфорации и прогнозировать продуктивность пластов. Особенно ценна информация о вертикальной проницаемости и гидравлической связи между пластами, которую сложно получить другими методами.

К сожалению, большая часть работ с широкополосной акустикой в России была выполнена до настоящего времени зарубежными сервисными компаниями, у которых она входит в обязательный комплекс. Этот комплекс могут себе позволить далеко не все нефтяные компании ввиду довольно высокой стоимости. Однако имеются приборы, выпускаемые российскими производителями. Если попытаться включить широкополосную акустику в стандартный комплекс геофизических исследований скважин, который проводится на всех скважинах в России, то мы получим значительный объем дополнительной информации, позволяющей повысить эффективность поиска, разведки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M. A. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956;28(2):168–178. DOI: doi.org/10.1121/1.1908239.
2. Biot M. A. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956;28(2):179–191. DOI: doi.org/10.1121/1.1908241.
3. Rosenbaum J. H. Synthetic Microseismograms: Logging in Porous Formations. *Geophysics*. 1974;39(1):14–32. DOI: doi.org/10.1190/1.1440407.
4. Tang X. M., Cheng C. H., Toksöz M. N. Dynamic Permeability and Borehole Stoneley Waves: A Simplified Biot–Rosenbaum Model. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1991;90(3):1632–1646. DOI: doi.org/10.1121/1.401904.
5. Winkler K. W., Liu H. L., Johnson D. L. Permeability and Borehole Stoneley Waves: Comparison between Experiment and Theory. *Geophysics*. 1989;54(1):66–75. DOI: doi.org/10.1190/1.1442578.
6. Cheng C. H., Toksöz M. N. Determination of Shear Wave Velocities in “Slow” Formations. Paper presented at the SPWLA 24th Annual Logging Symposium, Calgary, Alberta, June 1983. Paper Number: SPWLA-1983-V, published: June 27 1983.
7. Добрынин В. М., Вендельштейн Б. Ю., Кожевников Д. А. *Петрофизика: Учебник для вузов*. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Нефть и газ; 2004. 368 с. ISBN: 5-7246-0295-4.
8. Итенберг С. С., Шнурман Г. А. *Интерпретация результатов каротажа сложных коллекторов*. М.: Недра; 1984. 256 с.
9. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. *Механика насыщенных пористых сред*. М.: Недра; 1970. 339 с.

## О РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДАХ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕМПЕРАТУРЫ ОБЪЕКТА ПО ГРАНИЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

**Т. П. Гаврилова**

*Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет),  
г. Челябинск, Российская Федерация*

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5742-841X>, [✉ gavrilovatp@susu.ru](mailto:gavrilovatp@susu.ru)

*Аннотация:* работа посвящена сравнению двух подходов к решению обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности. Подобные задачи позволяют восстановить распределение температуры в недоступных для прямого измерения областях объекта на основе зашумленных данных, регистрируемых на поверхности объекта и вблизи нее. Актуальность рассматриваемой задачи обусловлена ее широким применением в задачах термического контроля и диагностики при термообработке материалов, при неразрушающем тепловом контроле, а также при диагностике, мониторинге, прогнозировании и оптимизации тепловых режимов технологического оборудования. Математическая модель задачи включает уравнение теплопроводности, известное распределение температуры в начальный момент времени, нестационарную функцию, задающую температуру на одной границе, и дополнительное условие, характеризующее температуру вблизи этой границы. Требуется определить неизвестную температурную функцию на другой границе линейного объекта, на основании которой в последующем прогнозируется температура во всех внутренних точках линейного объекта.

*Ключевые слова:* уравнение теплопроводности, численные методы, преобразование Лапласа, метод регуляризации, конечно-разностные уравнения.

*Для цитирования:* Гаврилова Т. П. О различных подходах к определению температуры объекта по граничным измерениям. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):35–41.

*Поступила в редакцию:* 14.10.2025.

*В окончательном варианте:* 07.11.2025.

## APPROACHES TO DETERMINING AN OBJECT'S TEMPERATURE FROM BOUNDARY MEASUREMENTS

**T. P. Gavrilova**

*South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russian Federation*

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5742-841X>, [✉ gavrilovatp@susu.ru](mailto:gavrilovatp@susu.ru)

*Abstract:* we conducted a comparative analysis of two approaches for solving an inverse boundary problem for the heat conduction equation. These problems allow reconstruction of the temperature distribution in regions of an object that cannot be measured directly, using noisy data recorded on or near the object's surface. This class of problems is highly relevant due to its wide range of applications, including thermal monitoring and diagnostics during material heat treatment, nondestructive thermal testing, and the diagnostics, monitoring, forecasting, and optimization of thermal modes in technological equipment.

The mathematical model uses the heat conduction equation, a known initial temperature distribution, a time-dependent temperature specified on one boundary, and an additional condition describing the temperature near that boundary. Our objective is to determine the unknown temperature function on the opposite boundary of a one-dimensional object, which can then be used to predict the temperature at all internal points.

Two approaches to the numerical solution of this inverse problem are considered. The first approach is based on applying the Laplace integral transform, which reduces the problem to a Volterra integral equation of the first kind. A numerical algorithm with regularization is proposed to solve this equation. The second approach relies on finite-difference approximations, enabling direct numerical simulation of the original problem. A comparative analysis of the proposed approaches is presented in terms of accuracy in reconstructing the temperature distribution and robustness with respect to errors in the input data. The methods discussed can be applied to problems of predicting the thermal state of objects subjected to external thermal effects.

*Keywords:* heat conduction equation, numerical methods, Laplace transform, regularization method, finite difference equations.

*Cite this article:* Gavrilova T. P. Approaches to Determining an Object's Temperature from Boundary Measurements. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):35–41.

*Original article submitted:* 14.10.2025.

*Revision submitted:* 07.11.2025.

### Введение

Разработка методов неразрушающего теплового контроля при термообработке, проведении диагностики различных технических объектов позволит создать новые приборы мониторинга теплового состояния систем. Подобные задачи могут быть сформулированы как граничные обратные задачи теплопроводности, решение которых связано с трудностями по преодолению их некорректности. Многие современные исследователи занимались изучением и разработкой методов решения обратных задач [1–7].

В работе приведено сравнение двух методов решения обратной задачи теплопереноса для линейного объекта с нестационарными граничными условиями, известными вблизи одной из границ. Первый метод предполагает построение интегральной модели процесса теплопереноса на основе преобразования Лапласа и численный метод определения неизвестной функции на другой границе и внутри объекта, основанный на методе Лаврентьева, с апостериорным выбором параметров регуляризации. Второй метод включает построение конечно-разностных уравнений и их численное решение.

Результаты проведенного вычислительного эксперимента позволяют выявить особенности, преимущества и ограничения каждого из предложенных методов решения обратной граничной задачи.

### Постановка задачи

Рассмотрим обратную граничную задачу теплопроводности:

$$u_t = au_{xx}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(x_0, t) = g(t), \quad x_0 \in (0, \ell), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = C, \quad x \in [0, \ell]. \quad (3)$$

В данной задаче требуется найти граничное значение функции

$$u(\ell, t) = \psi(t) \quad (4)$$

и с ее помощью спрогнозировать значение  $u(x, t)$  во внутренних точках линейного объекта.

Согласно [1] во внутренних точках объекта решение задачи (1)–(4) существует и единственно.

При решении поставленной обратной задачи необходимо учитывать наличие погрешностей измерений исходных данных, обусловленных различными факторами, включая шумы и аппаратные погрешности приборов. Формальная постановка указанной ситуации предполагает, что вместо истинных значений  $g_0$  и  $\varphi_0$  определены лишь их приближенные значения  $g_\delta$ ,  $\varphi_\delta$ , удовлетворяющие условию  $\max \{ \|\varphi_\delta - \varphi_0\|, \|g_\delta - g_0\| \} \leq \delta$ , где  $\delta > 0$  устанавливает уровень допустимой погрешности. Таким образом, задача сводится к восстановлению неизвестной граничной температурной функции  $u_\delta(\ell, t)$  по исходным данным  $\delta$ ,  $q_\delta$ ,  $\varphi_\delta$  с последующим прогнозированием температурного распределения во внутренних областях исследуемого объекта.

### Построение интегрального уравнения

Исходя из предположения, что искомая функция  $\psi(t)$  является известной величиной, найдем решение прямой задачи для уравнения теплопроводности. Формальная постановка математической модели прямой задачи представляется следующим образом:

$$u_t = au_{xx}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0 \quad (5)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(\ell, t) = \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = C, \quad x \in [0, \ell]. \quad (7)$$

Учитывая особенности протекания процессов теплопереноса и принимая во внимание выводы, изложенные в исследовании [8], путем применения интегрального преобразования Лапласа к прямой

задаче (5)–(7) и последующей аппроксимации точного решения указанной задачи посредством конечного ряда, мы приходим к следующему аналитическому выражению для искомой функции  $u(x, t)$ :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^n n \sin\left(\frac{\pi n(\ell - x)}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} \tau} d\tau + \\
 & + \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_2} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} \tau} d\tau + \\
 & + \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{\ell^2} t}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим дополнительное условие  $u(x_0, t) = g(t)$  обратной задачи. Для известной температурной функции  $g(t)$  обозначим ее сеточный аналог через  $g_N(t)$ . Тогда решение поставленной задачи (1)–(4) становится эквивалентным поиску решения соответствующего интегрального уравнения вида:

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) \int_0^t \psi(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} (t-\tau)} d\tau = \\
 = g_N(t) - \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_2} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) \int_0^t \varphi(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} (t-\tau)} d\tau - \\
 - \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{\ell^2} t}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Для удобства будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\begin{aligned}
 K_N(t - \tau) &= \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} (t-\tau)}, \\
 L_N(t - \tau) &= \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_2} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} (t-\tau)}.
 \end{aligned}$$

Обозначим интегральный оператор  $\int_0^t K_N(t - \tau) \psi(\tau) d\tau = W\psi$ , а

$$h_N(t) = g_N(t) - \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x_0}{\ell}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} - \int_0^t L_N(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Отсюда вытекает следующая эквивалентная форма записи (9):

$$W\psi = h_N(t) \quad (10)$$

Из уравнения (10), учитывая зашумленность в исходных данных с заданным уровнем допустимого отклонения  $\delta$ , находим температурную функцию  $u_\delta(\ell, t) = \psi_\delta(t)$ , а затем прогнозируем температуру  $u_\delta(x, t)$  во внутренних точках линейного объекта.

### Вычислительная схема метода

Процесс численного прогнозирования температуры основывается на применении метода дискретной регуляризации. При этом параметрами регуляризации становятся величины  $N_1$ ,  $N_2$  и шаг дискретизации по времени  $h_t$ . Для выполнения вычислений процесс разделен на последовательные этапы, первый из которых заключается в выборе значений  $N_1$  и  $N_2$  — количества членов в функциональных рядах выражения (9) и начального значения  $s$ . На втором этапе вводится временная сетка с узлами  $t_i$ , где  $t_i = (i - 1)h_t$ ,  $h_t = T/s$ ,  $1 \leq i \leq s + 1$ , образующими равномерное распределение точек на интервале  $[0, T]$ . Для определения функции  $u_\delta(\ell, t_i) = \psi_\delta(t_i)$  найдем решение интегрального уравнения

(10), применяя для вычисления интегралов формулу средних прямоугольников. На следующем этапе решения оцениваем величину погрешности

$$\Delta(t) = \frac{\max_{t_i \in [0, T]} |\psi_\delta(t_i) - \psi(t_i)|}{\max_{t_i \in [0, T]} |\psi(t_i)|}.$$

Вычислительная процедура заканчивается при достижении установленного критерия точности, задаваемого условием  $\Delta(t) < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заранее фиксированная точность.

### Численный метод на основе конечно-разностных уравнений

Для решения задачи (1)–(4) численным методом с использованием конечно-разностных уравнений введем в области  $[0, \ell] \times [0, T]$  равномерную сетку с узлами  $(x_i, t_j)$ :

$$x_i = ih_x, \quad i = \overline{0, r}, \quad r = \frac{\ell}{h_x}; \quad t_j = jh_t, \quad j = \overline{0, m}, \quad m = \frac{T}{h_t}.$$

Обозначим значения температурных функций в узлах сетки следующим образом:

$$u(x_i, t_j) = u_{i,j}, \quad u(0, t_j) = \varphi_j, \quad u(x_i, 0) = u_{i,0} = C, \quad u(\ell, t_j) = \psi_j.$$

Пусть  $x_0 = rh_x$ , тогда  $u(x_0, t_j) = u_{r,j} = g_j$ . На каждом временном слое, посредством применения неявной четырехточечной конечно-разностной схемы, аппроксимируем уравнение (1):

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_t} - a \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h_x^2} = 0, \quad i = 1, \dots, R-1.$$

На основе полученной разностной схемы определим значения искомой функции при фиксированном шаге по времени и пространству. С целью повышения вычислительной эффективности и упрощения реализации численного алгоритма запишем уравнения в следующем виде:

$$A_i u_{i-1,j+1} + B_i u_{i,j+1} + C_i u_{i+1,j+1} = D_i, \quad i = 0, \dots, R-1, \quad (11)$$

где

$$A_i = C_i = \frac{a}{h_x^2}, \quad B_i = -\frac{2a}{h_x^2} - \frac{1}{h_t}, \quad D_i = -\frac{1}{h_t} u_{i,j}, \quad i = 1, \dots, R-1, \quad (12)$$

$$A_0 = C_0 = 0, \quad B_0 = -\frac{1}{h_t} \cdot \frac{\varphi_j}{\varphi_{j+1}}.$$

Следуя идее, изложенной в [9], аппроксимацию температурного поля объекта в точке  $(x_i, t_j)$  представим в виде композиции дискретных аналогов двух вспомогательных функций  $y(x, t)$  и  $z(x, t)$  в следующей форме:

$$u_{i,j} = y_{i,j} + \psi_j \cdot z_{i,j}, \quad i = 0, \dots, R. \quad (13)$$

В узловой точке  $(x_R, t_j)$  выражение (13) примет вид:  $u_{R,j} = y_{R,j} + \psi_j \cdot z_{R,j}$ . Согласно условию на правой границе линейного объекта  $u_{R,j} = \psi_j$ . Отсюда определим значения введенных функций в узлах сетки  $(x_R, t_j)$ :  $y_{R,j} = 0$ ,  $z_{R,j} = 1$ .

Заменяя в уравнении (11) неизвестную функцию на ее представление по формуле (13), на каждом  $j$ -ом временном слое приходим к следующим системам линейных алгебраических уравнений для определения  $y_{i,j}$  и  $z_{i,j}$ ,  $i = 0, \dots, R$ :

$$\begin{cases} A_i y_{i-1,j+1} + B_i y_{i,j+1} + C_i y_{i+1,j+1} = D_i, & i = 1, \dots, R-1, \\ y_{R,j} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_i z_{i-1,j+1} + B_i z_{i,j+1} + C_i z_{i+1,j+1} = 0, & i = 1, \dots, R-1, \\ z_{R,j} = 1, \end{cases}$$

где коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  определяются по формулам (12). Для нахождения решений  $y_{i,j}$  и  $z_{i,j}$  полученных систем линейных уравнений применяется метод прогонки.

С учетом наличия шума в исходных данных с максимально допустимым уровнем  $\delta$ , из дискретного аналога условия  $u_{r,j} = g_j^\delta$  в узле сетки  $x_0 = rh_x$  формируется уравнение  $g_j^\delta = y_{r,j} + \psi_j^\delta \cdot z_{r,j}$ . Тогда при  $z_{r,j} \neq 0$  получим следующее соотношение для искомой функции:

$$\psi_j^\delta = \frac{g_j^\delta - y_{r,j}}{z_{r,j}}, \quad j = 1, \dots, M.$$

### Вычислительный эксперимент

Для верификации разработанных численных методов и количественной оценки точности получаемых решений был проведен вычислительный эксперимент. В рамках данного эксперимента проведено сравнение численных решений, полученных различными методами, с заранее известными тестовыми данными. Проведенный анализ включал расчет оценок погрешностей и позволил выявить влияние шумов во входной информации на устойчивость и точность применяемых подходов.

В ходе эксперимента для тестовых граничных функций находилось численное решение прямой задачи (5)–(7) и моделировалось значение температурной функции  $g(t) = u(x_0, t)$ . Далее в значения функций  $\varphi(t)$  и  $g(t)$  вносились дополнительные шумы. После этого задача определения  $\psi_\delta(t)$  решалась с использованием двух предложенных методов. Затем полученное решение  $\psi_\delta(t)$  подставлялось в задачу (5)–(7), что позволило определить температурное поле  $u_\delta(x, t)$  внутри объекта.

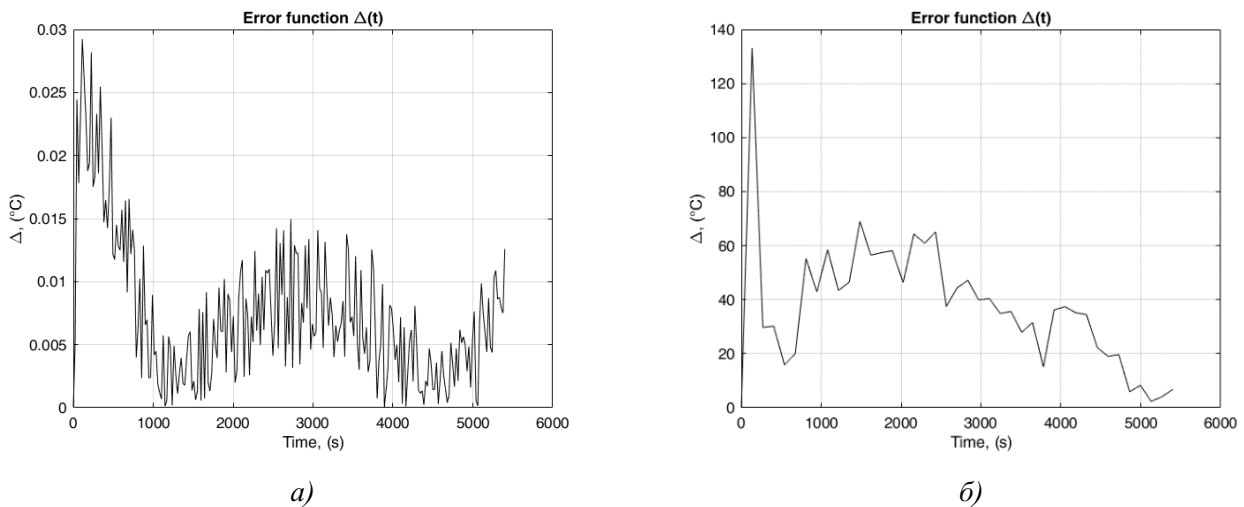
Вычислительный эксперимент проводился при  $\ell = 1$ ,  $a = 1$  и  $T = 6000$ с,  $x_0 = 0,1 \cdot \ell$ ,  $x_1 = 0,8 \cdot \ell$ , начальная температура объекта  $u(x, 0) = 50$ . В эксперименте использовалась сетка с узлами  $(x_i, t_j)$ , где

$$\begin{cases} x_i = ih_x, & h_x = L/R, & 0 \leq i \leq R; \\ t_j = jh_t, & h_t = T/M, & 0 \leq j \leq M. \end{cases}$$

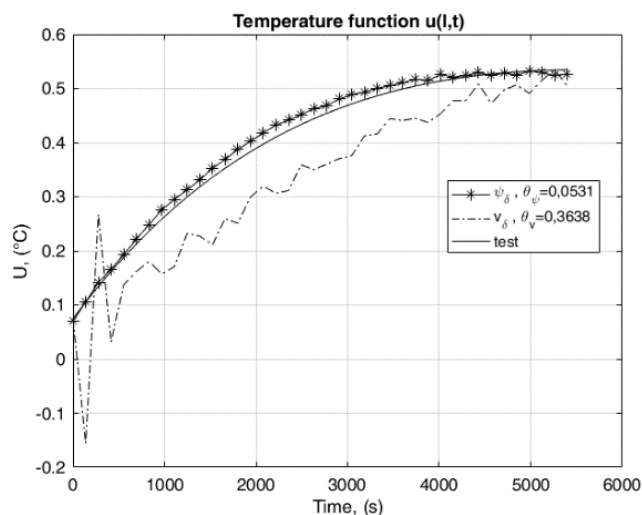
Для сравнения численного решения  $\psi_\delta(t)$  с тестовой функцией и получения оценок погрешностей использовалась функция  $\Delta(t) = |\psi_\delta(t) - \psi(t)|$  и величины

$$\Delta_\psi = \max_{t \in [0, T]} \Delta(t), \quad \varepsilon_\psi = \frac{\Delta_\psi}{\max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|}.$$

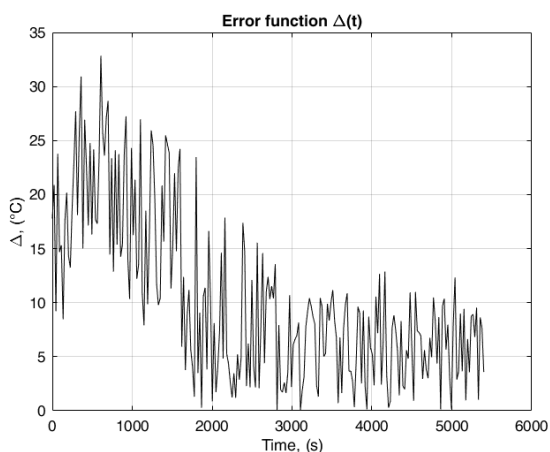
В ходе вычислительного эксперимента в качестве модельных использовались следующие функции: в точке  $x = 0$  – функция  $\varphi(t) = 50 + 1500t(e^{-t} - e^{-3})$ , а в точке  $x = 1$  – функция  $\psi(t) = 50 + 750te^{-t}$ .



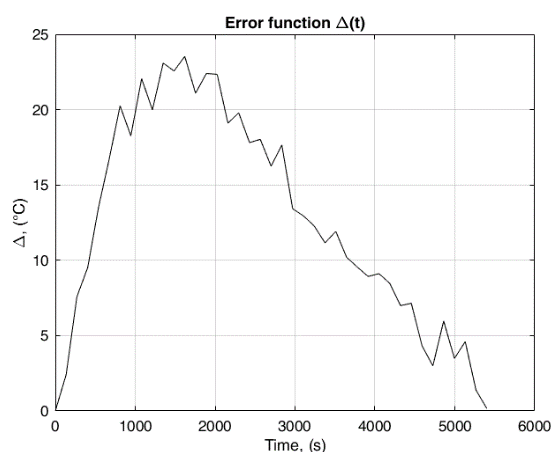
**Рис. 1.** Графики функции температурной погрешности  $\Delta(t)$  при  $x_0 = 0,1 \cdot \ell$ : а) для решения с использованием интегрального уравнения; б) для решения с использованием конечно-разностных схем



**Рис. 2.** Графики функций  $\psi_\delta$  — решения задачи (5)–(7) с использованием интегрального уравнения и  $v_\delta$  — решения задачи (5)–(7) с использованием конечно-разностных схем при  $x_0 = 0,1 \cdot \ell$



а)



б)

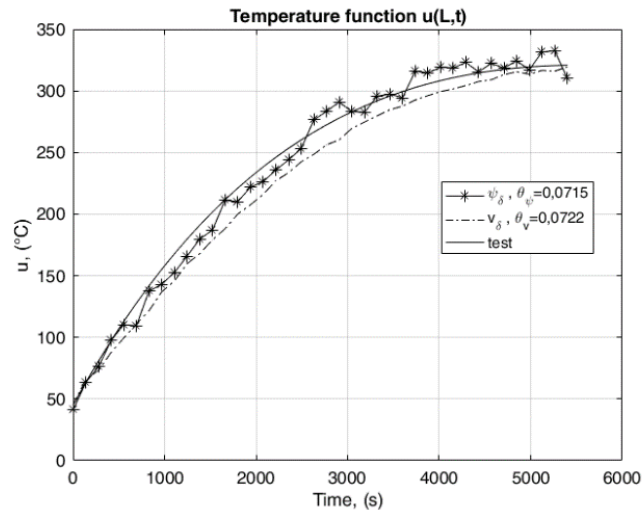
**Рис. 3.** Графики функции температурной погрешности  $\Delta(t)$  при  $x_0 = 0,1 \cdot \ell$ : а) для решения с использованием интегрального уравнения; б) для решения с использованием конечно-разностных схем

В таблице приведены результаты вычислительного эксперимента, проведенного при различных точках температурных измерений внутри объекта, позволяющие на основе анализа полученных погрешностей оценить устойчивость рассмотренных методов решения обратной граничной задачи и влияние на них неточностей исходных данных.

Таблица

Экспериментальные оценки погрешностей температурных функций

Точка измерения температуры	Погрешность исходных данных, $\delta$	Погрешности вычислений			
		Решение с использованием интегрального уравнения		Решение с использованием конечно-разностных схем	
		$\Delta_\psi$	$\theta_\psi$	$\Delta_\psi$	$\theta_\psi$
$x_0 = 0,1 \cdot \ell$	0,01	17,0069	0,0530	118,2624	0,3685
	0,05	27,2017	0,0848	397,5678	1,2389
	0,1	41,4863	0,1293	560,5154	1,7466
$x_0 = 0,8 \cdot \ell$	0,01	22,9322	0,0715	23,1770	0,0722
	0,05	27,1660	0,0847	29,1066	0,0907
	0,1	32,4754	0,1012	35,6682	0,1111



**Рис. 4.** Графики функций  $\psi_\delta$  — решения задачи (5)–(7) с использованием интегрального уравнения и  $v_\delta$  — решения задачи (5)–(7) с использованием конечно-разностных схем при  $x_0 = 0,1 \cdot \ell$

### Заключение

Анализ результатов численного моделирования показал, что при наличии шумов в исходных данных метод интегральных преобразований обеспечивает более стабильные и точные решения задачи по сравнению с конечно-разностной схемой, что делает его предпочтительным для задач прогноза в условиях ограниченной точности измерений. Метод, основанный на применении конечно-разностной схемы, демонстрировал уменьшение отклонений восстановленного температурного профиля от тестового решения при приближении точки измерения температуры к границе с неизвестной температурой.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М. *Обратные задачи теплообмена*. М.: Машиностроение; 1988. 280 с.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Вычислительная теплопередача*. М.: Едиториал УРСС; 2009. 784 с.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. *Некорректные задачи математической физики и анализа*. М.: Наука; 1980. 286 с.
4. Кабанихин С. И., Шишленин М. А. Прямые и итерационные методы решения обратных и некорректных задач. *Сибирские электронные математические известия*. 2008;5:595–608.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Изд-во МГУ; 1999. 799 с.
6. Тихонов А. Н., Гончарский А. Н., Степанов В. В., Ягола А. Г. *Численные методы решения некорректных задач*. М.: Изд-во МГУ; 1990. 115 с.
7. Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. М.: Наука; 1964. 488 с.
8. Yaparova N. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2014;22(5):832–847. DOI: 10.1080/17415977.2013.830614.
9. Вабищевич В. И., Васильев П. Н., Васильева М. В. Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2015;55(6):1020–1027.

## УТОЧНЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ТРЕЩИННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПУСТОТНОГО ПРОСТРАНСТВА НА ПРОЦЕСС ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ С ПОМОЩЬЮ ПРОМЫСЛОВЫХ ДАННЫХ

А. А. Колеватов<sup>1,а</sup>, И. В. Афанаскин<sup>2,б</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Альметьевский государственный технологический университет, Передовая инженерная нефтяная школа, Альметьевск, Россия

<sup>а</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8988-1593>, ✉ [a.kolevatov@niisi.ras.ru](mailto:a.kolevatov@niisi.ras.ru)

<sup>б</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0617-221X>, [i.afanaskin@agni-rt.ru](mailto:i.afanaskin@agni-rt.ru)

**Аннотация:** проведен анализ данных о структуре пустотного пространства карбонатного пласта-коллектора турнейского возраста, насыщенного высоковязкой нефтью. Целью исследования было выявление трещинной составляющей в структуре пустотного пространства как одного из возможных каналов фильтрации флюидов к скважинам. Были изучены материалы исследований скважин и пластов, включая данные изучения керна, данные акустического широкополосного каротажа, а также данные гидродинамических исследований в работающих и остановленных скважинах. Неоднозначность выводов по результатам разных исследований была связана с выделением механизма фильтрации флюидов к скважинам по трещинам. В то же время изучение керна и результатов геофизических исследований скважин (включая широкополосный акустический каротаж) не показало признаков трещинной составляющей в структуре пустотного пространства пласта-коллектора. Отчасти это могло быть связано с тем, что системы трещин в пласте-коллекторе, как правило, неоднородны и могли не попасть в интервалы, исследованные посредством широкополосного акустического каротажа. Предварительное заключение о сильно ограниченном влиянии трещин на процесс фильтрации флюидов в пласте дополнительно проверялось посредством локального фильтрационного численного моделирования и сопоставления расчетных дебитов с историческими, включая накопленную добычу за ограниченный период. Полученные в результате фильтрационного моделирования (скорректированные относительно принятых в проектном документе) диаграммы относительных фазовых проницаемостей подтвердили предположение о низкой степени влияния трещин, сделанное на основе геологической информации и промысловых исследований.

**Ключевые слова:** гидродинамические исследования скважин, геофизические исследования скважин, месторождения высоковязких нефтей, анализ керна, относительные фазовые проницаемости.

**Благодарности:** публикация выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» – НИИСИ по теме № FNEF-2024-0001 «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах».

**Для цитирования:** Колеватов А. А., Афанаскин И. В. Уточнение влияния трещинной составляющей пустотного пространства на процесс фильтрации флюидов с помощью промысловых данных. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):42–49.

Поступила в редакцию: 23.10.2025.

В окончательном варианте: 05.12.2025.

## USING PRODUCTION DATA TO ASSESS THE EFFECTS OF FRACTURES IN THE VOID SPACE ON FLUID FILTRATION

А. А. Kolevatov<sup>1,а</sup>, I. V. Afanaskin<sup>2,б</sup>

<sup>1</sup> Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Almet'yevsk State Technological University, Advanced Engineering Oil School, Almet'yevsk, Russian Federation

<sup>а</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8988-1593>, ✉ [a.kolevatov@niisi.ras.ru](mailto:a.kolevatov@niisi.ras.ru)

<sup>б</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0617-221X>, [i.afanaskin@agni-rt.ru](mailto:i.afanaskin@agni-rt.ru)

*Abstract:* we analyzed data that describe the pore-space structure of a Tournaisian-age carbonate reservoir saturated with high-viscosity oil. We aimed to determine whether a fracture network acts as a flow path inside the pore space and contributes to fluid flow toward the wells. We used well and formation test data, core analysis results, acoustic broadband logs, and hydrodynamic well test data from producing and shut-in wells.

Interpretations from individual methods remained inconclusive about fracture-controlled flow toward the wells. However, core analysis and geophysical logs, including acoustic broadband data, showed no evidence of a fracture network that forms a significant flow component inside the reservoir void space. The absence of detectable fractures may result from their heterogeneous distribution, which is typical for carbonate reservoirs. As a result, acoustic broadband logs may have missed fracture zones inside the studied intervals.

We verified the preliminary conclusion about the limited role of fractures in reservoir flow through local numerical flow simulation. We matched simulated production rates to historical data, including cumulative production for the studied period. The simulation, which used adjusted relative permeability curves from the baseline project document, confirmed the hypothesis that fractures have a minimal influence on fluid flow – a hypothesis based on geological observations and field data.

*Keywords:* hydrodynamic well analysis, borehole surveying, high-viscosity oil fields, core analysis, relative permeabilities.

*Acknowledgements:* this is a part of the FNEF-2024-0001 Deployment of Trusted AI Systems based on New Mathematical and Algorithmic Approaches and Fast Computing Models Compatible with Domestic Computer Hardware government contract granted to the National Research Centre Kurchatov Institute.

*Cite this article:* Kolevatov A. A., Afanaskin I. V. Using Production Data to Assess the Effects of Fractures in the Void Space on Fluid Filtration. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):42–49.

*Original article submitted:* 23.10.2025.

*Revision submitted:* 05.12.2025.

## **Введение**

В настоящее время в проектировании и анализе разработки месторождений нефти и газа значительную роль играет информация о распределении фильтрационно-емкостных свойств (ФЕС) по площади пласта-коллектора, не только о количественных характеристиках, как, например, проницаемость пласта в зоне дренирования скважин, но и о структуре пустотного пространства с поровой и трещинной составляющими. Одним из способов косвенной проверки типа пустотного пространства пласта коллектора является численное фильтрационное моделирование истории добычи по отдельным участкам с целью уточнения формы диаграмм относительных фазовых проницаемостей (ОФП), имеющих существенные отличия для пластов-коллекторов с преобладающей поровой составляющей, содержащей трещины разного порядка в качестве каналов фильтрации [1]. Секторное гидродинамическое моделирование притока флюидов к отдельным скважинам позволяет точнее оценить принятые в проектных документах данные об ОФП, чем принятые по результатам анализа керна, т. к. охватывает существенно больший объем пласта, чем представленный образцами керна. Для сложных коллекторов наличие информации о ФЕС, полученной не только по результатам гидродинамических исследований (ГДИ), но и из других источников (широкополосный акустический каротаж), позволяет произвести калибровку полученных результатов и определить стратегию разработки исследуемого объекта, в том числе принять решение о возможных методах поддержания добычи. В статье представлен подход к разрешению противоречий в данных, вызванных неопределенностью строения коллектора. Цель — демонстрация методики, а не принятие проектных решений. Поэтому название исследуемого объекта и другая идентифицирующая информация не приводилась.

## **Анализ данных**

В рамках настоящего исследования анализировались следующие источники данных:

- 1) результаты анализа керна на предмет обнаружения трещин разного порядка;
- 2) результаты интерпретации широкополосного акустического каротажа;
- 3) результаты ГДИ, в работающих и остановленных скважинах;
- 4) результаты секторного гидродинамического моделирования.

На рисунке 1 приведены фотографии керна, извлеченного из скважин, вскрывших турнейский ярус. Как можно отметить, керн не имеет признаков, указывающих на наличие существенной тре-

щинной составляющей в структуре пустотного пространства, трещины имеют практически случайную несистемную локализацию и в большинстве своем являются залеченными.



**Рис. 1.** Пример фотографий ядра из скважин, вскрывших турнейский ярус

На рисунке 2 приведены выкопировки геофизических планшетов, полученных по результатам геофизических исследований скважин, вскрывших турнейский ярус. Отмеченные разнонаправленными крестами интервалы относятся к зонам литологического перехода и не связаны с каналами высокой проводимости/трещиноватости.

На рисунке 3 приведен пример диагностического графика, типичного для скважин, вскрывших турнейский ярус исследуемого объекта. Типичность заключается в том, что согласно сложившейся практике интерпретации ГДИ добывающих скважин данный вид диагностического графика характерен для интерпретационной модели «вертикальная скважина с трещиной конечной проводимости» (рисунок 4). Данная модель проявляется, в том числе, в случаях интенсификации притока посредством большеобъемных кислотных обработок призабойных зон скважин с целью создания максимально совершенной связи скважины с пластом. При этом образовавшийся канал притока к скважине проявляет себя в виде т.н. «линейного притока», который может быть связан как с возникновением трещины в призабойной зоне скважины, так и с фильтрацией через систему гидродинамически связанных каверн. Часто в карбонатных коллекторах имеет место фильтрация через систему субперпендикулярных по ориентации трещин, и в отдельных случаях приток становится возможным описать посредством фильтрационной модели «двойной среды». Однако для примера, анализируемого в данном случае, диагностический график не имеет специфических особенностей, которые могли бы указывать на данную модель фильтрации, вероятно, по причине высокой вязкости нефти либо отсутствия упомянутых субперпендикулярных трещин. Дополнительным аргументом в пользу преобладающей фильтрации через систему трещин мог бы стать существенный отрицательный скин-фактор по большинству ГДИ (от  $-3.5$  до  $-6.5$ ), проявляющийся как при исследованиях методом восстановления давления, так и по результатам анализа добычи (рисунок 5). Но не всегда высокий отрицательный скин является показателем того, что пласт пронизан в межскважинном пространстве высокопроводящими трещинами [2].

Как можно отметить по виду диагностического графика (рисунок 5), наблюдается тот же самый вид диагностического графика с билинейным и линейным режимами течения (рисунок 3 и рисунок 4), подтверждающий наличие в непосредственной близости от скважины высокопроводящего канала.

Из приведенного выше материала однозначного заключения о наличии проводящих трещин разного масштаба от микро до макро не только в околоскважинной зоне, но и в межскважинном пространстве сделать невозможно. Необходим дополнительный источник в виде секторного гидродинамического моделирования скважин, эксплуатирующих турнейский ярус. Такое моделирование предполагает наличие подтвержденных историей добычи диаграмм относительных фазовых проницаемостей

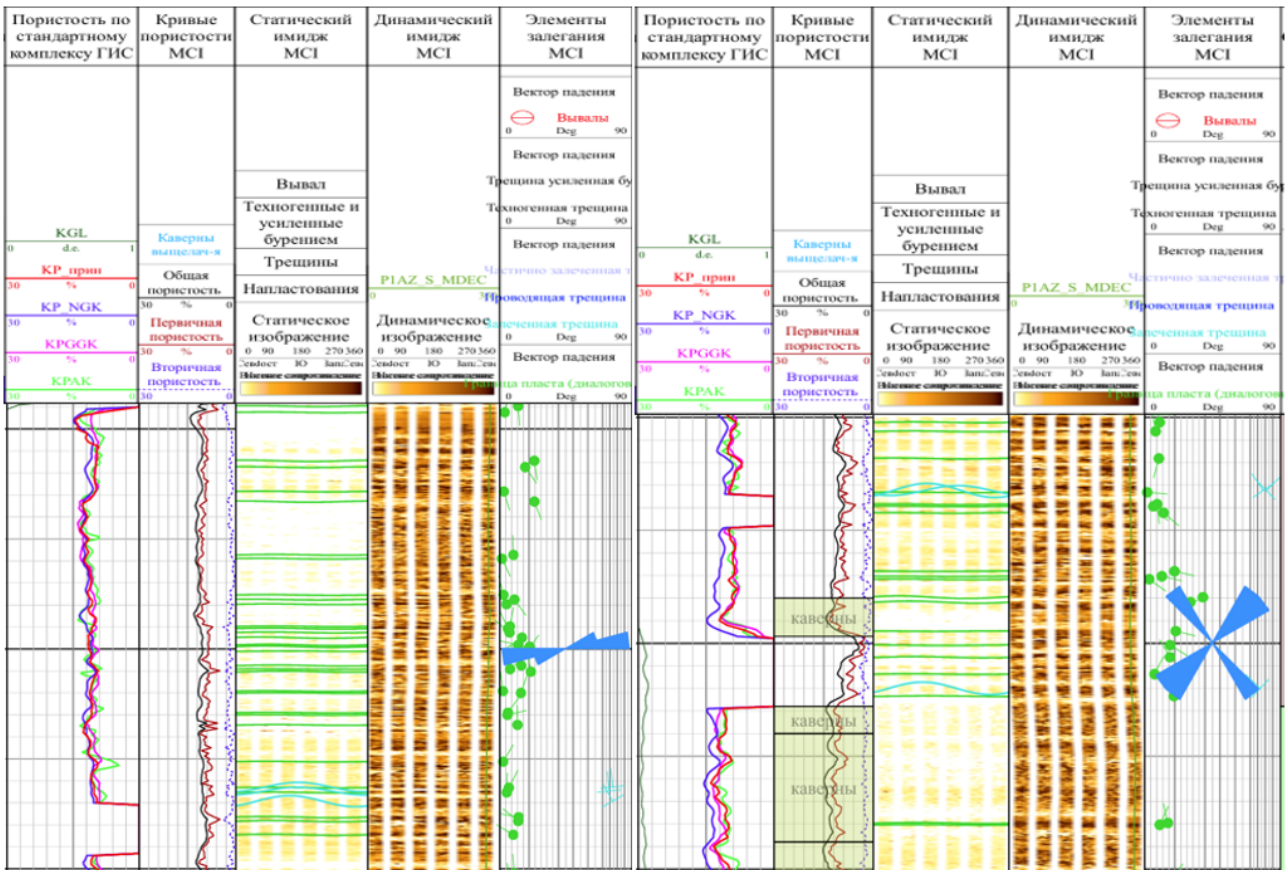


Рис. 2. Выкопировка планшетов широкополосного акустического каротажа пластов турнейского яруса

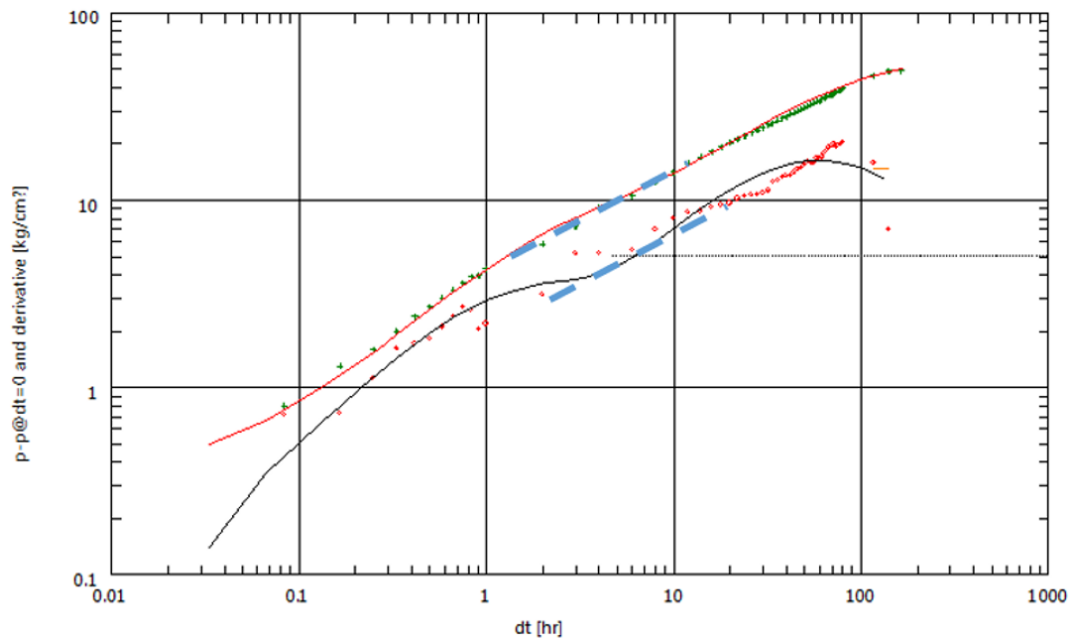


Рис. 3. Пример диагностического графика, типичного для скважин, имеющих преобладающий приток через одну или несколько единичных трещин

для нефти и воды (ОФП). В работах [4, 5] освещался опыт т.н. «реконструкции» диаграмм ОФП, в том числе для условий карбонатных трещиноватых коллекторов. Одним из условий корректной реконструкции ОФП было превышение исторической обводненности 70% для использовавшегося эмпирического алгоритма [6, 7]. Опыт работ [4, 5] показал хорошую применимость эмпирических алгоритмов

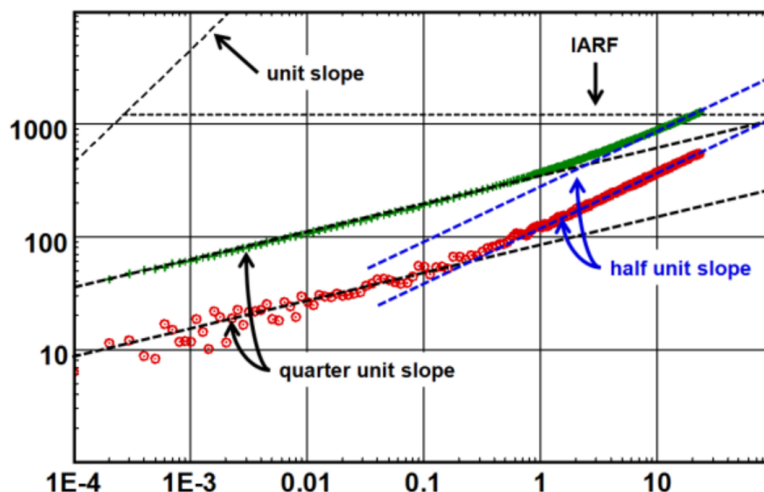


Рис. 4. Пример эталонного диагностического графика, характерного для интерпретационной модели «вертикальная скважина с трещиной конечной проводимости» [3]

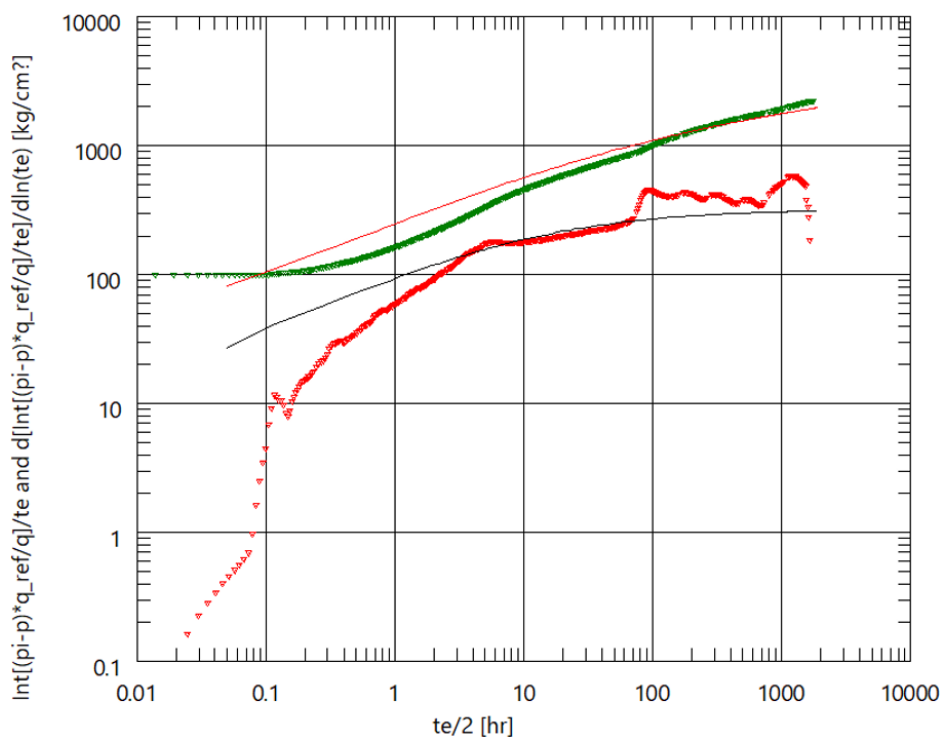


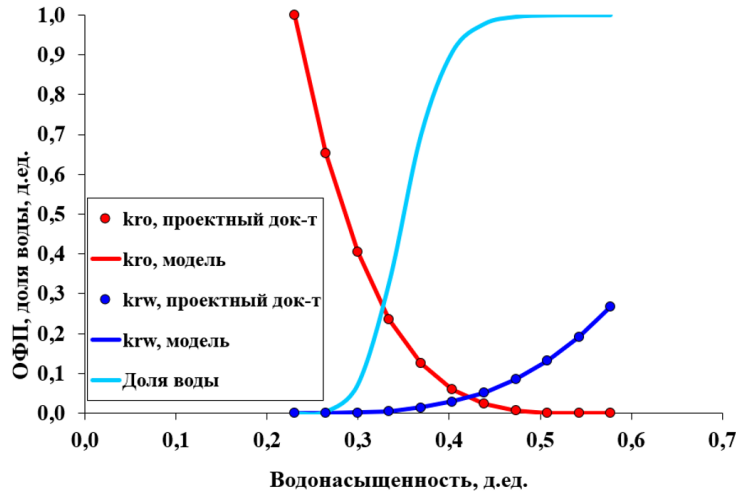
Рис. 5. Пример диагностического графика, характерного для интерпретационной модели «вертикальная скважина с трещиной конечной проводимости» на основе анализа добычи

для реконструкции диаграмм ОФП. Корректность полученных характеристик дала хорошее совмещение по результатам секторного гидродинамического моделирования и сопоставления с историческими данными по добыче воды и нефти. Однако для турнейских коллекторов, являющихся предметом исследования данной статьи, упомянутые [5, 6] алгоритмы реконструкции ОФП неприменимы из-за низкой текущей обводненности продукции. Поэтому единственным способом определить текущие актуальные ОФП для скважин, вскрывших турнейский ярус, будет анализ добычи с помощью численной модели с экспертной модификацией диаграмм ОФП, утвержденных в проектном документе (рисунок 6).

В ходе численного моделирования для совмещения исторической и расчетной добычи, как правило, требуется «модификация» диаграмм ОФП, т.к. играет роль не только эффект изменения масштаба (керна — зона дренирования скважины), но и особенности строения пласта коллектора, которые могут включать естественные границы пласта в виде выклинивания либо изолирующего нарушения.

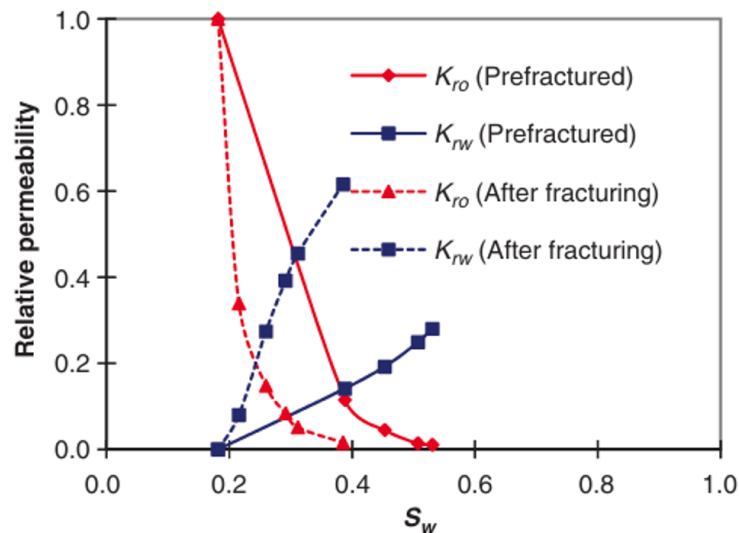
Предварительный анализ диаграмм ОФП, принятых в проектном документе (рисунок 6), указы-

ваит на гидрофобный тип пласта-коллектора либо пласт-коллектор со смешанной смачиваемостью [8, 9, 10]. Изучаемый пласт-коллектор подвергся гидроразрыву (большеобъемная обработка призабойной зоны — БОПЗ). В этом случае кривые ОФП могут сместиться влево [11] (рисунок 7) относительно начального положения. По итогам численного моделирования исследуемого объекта получен аналогичный результат (рисунок 9). Пересечение диаграмм ОФП сместилось влево (обозначено пунктиром), по аналогии с рисунком 7.



**Рис. 6.** Диаграммы ОФП для коллекторов турнейского яруса, принятые в проектом документе

Диаграммы ОФП (рисунок 9), полученные по результатам численного моделирования (рисунок 8), не претерпели существенных изменений относительно утвержденных в проектом документе. Однако они имеют важную особенность. Т.к. за исследуемый период обводненность в продукции скважины практически не растет, можно сделать вывод о том, что выполнение БОПЗ в скважине привело к созданию проводящего канала для воды от нижележащих водонасыщенных пластов. То есть обводненность продукции, вероятнее всего, связана с перетоком на некотором удалении от скважины, поэтому промыслово-геофизические исследования с целью определения профиля притока не всегда обнаруживают источник.



**Рис. 7.** Пример изменения диаграмм ОФП для карбонатного коллектора после БОПЗ [11]

О трещинах в пласте-коллекторе в межскважинном пространстве можно сказать, что их сечение, скорее всего, не превышает сечения пор [10], поэтому даже при наличии такие трещины не оказывают определяющего влияния на прорыв воды, коллектор демонстрирует преобладающий поровый тип с соответствующими диаграммами ОФП.

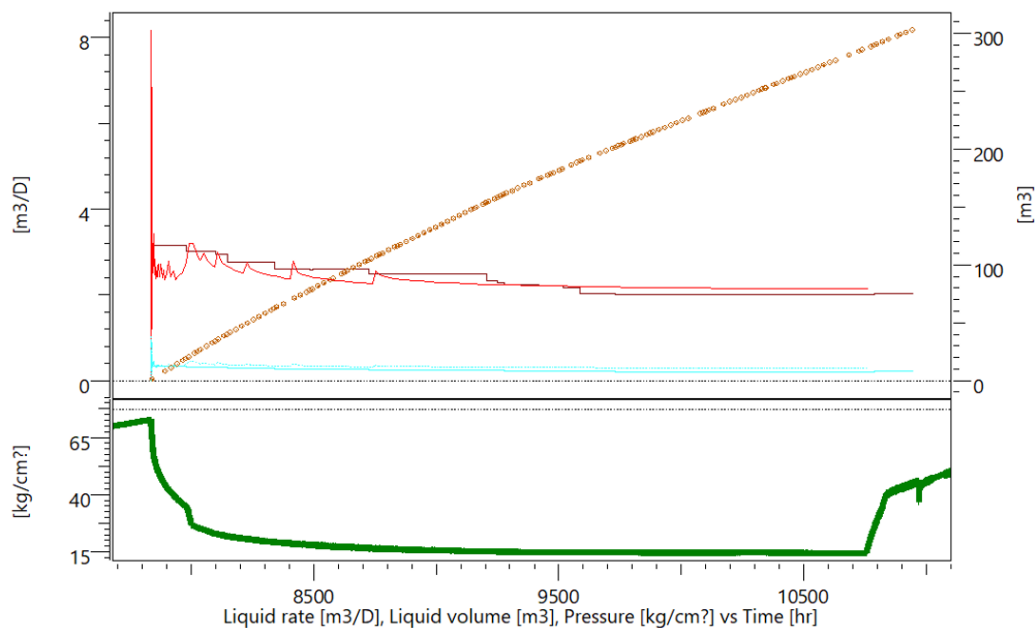


Рис. 8. Численное моделирование при анализе добычи с целью «реконструкции» ОФП

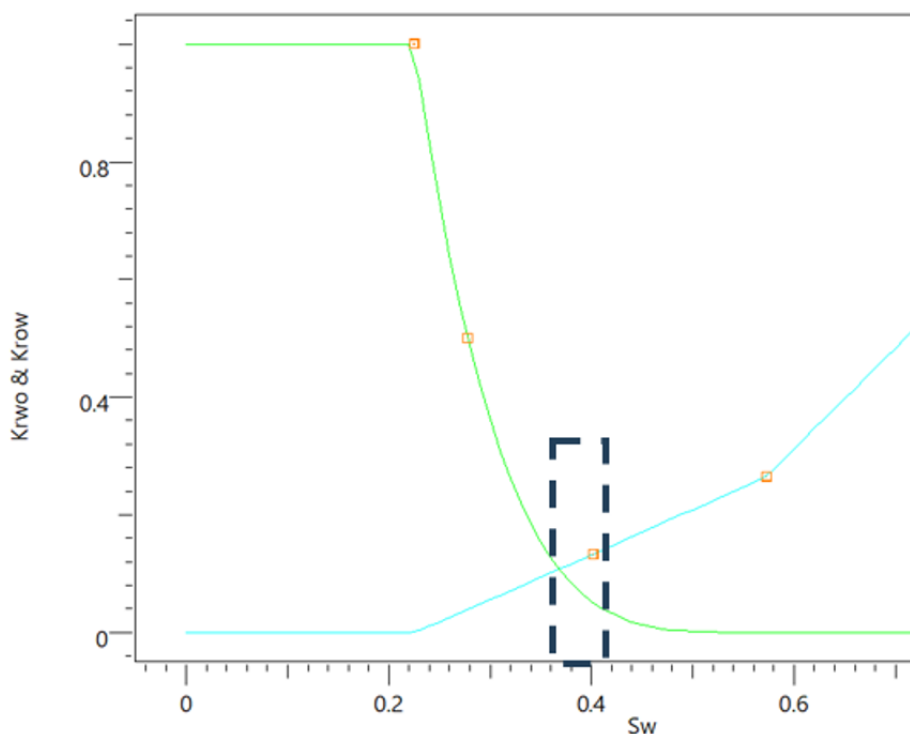


Рис. 9. Диаграммы ОФП для коллекторов турнейского яруса по результатам численного фильтрационного моделирования (скв. x1)

### Заключение

Комплексный анализ геологических, геофизических и гидродинамических данных показал, что влияние трещин на фильтрацию флюидов в исследуемом карбонатном коллекторе в межскважинном пространстве практически отсутствует.

Сопоставление результатов секторного численного гидродинамического моделирования с историей добычи подтвердило преобладающую поровую структуру пустотного пространства пласта.

Предложенный подход к уточнению диаграмм относительных фазовых проницаемостей на основе интеграции промышленных данных и секторного моделирования может быть применен для других месторождений нефти в карбонатных коллекторах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Викторин В. Д. *Влияние особенностей карбонатных коллекторов на эффективность разработки нефтяных залежей*. М.: Недра; 1988. 150 с.
2. Gringarten A. C. Interpretation of Tests in Fissured and Multilayered Reservoirs with Double-Porosity Behavior: Theory and Practice. *Journal of Petroleum Technology*. 1984;36(4):549–564. DOI: 10.2118/10044-PA.
3. Olivier Houze, Didier Viturat, Ole S. Fjaere et al. *Dynamic Data Analysis*. V5.60. Kappa Engineering; 2024. 788 p.
4. Колеватов А. А., Афанаскин И. В., Солопов Д. В., Дяченко А. Г. Реконструкция диаграмм относительных фазовых проницаемостей с целью уточнения гидродинамической модели нефтяного месторождения. *Актуальные проблемы нефти и газа*. 2018;3:10. DOI: 10.29222/irng.2078-5712.2018-22.art10.
5. Колеватов А. А., Афанаскин И. В., Егоров А. А., Дяченко А. Г., Пономарев А. К., Ялов П. В. Выявление взаимного влияния скважин посредством применения реконструированных диаграмм относительных фазовых проницаемостей. *Вестник кибернетики*. 2016;3:62–70.
6. Feigl A. Treatment of Relative Permeabilities for Application in Hydrocarbon Reservoir Simulation Model. *NAFTA*. 2011;62(7–8):233–243.
7. Macary S. Technique Predicts Oil Recovery From Waterfloods. *Oil & Gas Journal*. 1999;97(4):84–90.
8. Glover P. *Formation Evaluation MSc Course Notes: Relative Permeability*. Leeds: School of Earth and Environment, University of Leeds; 2013. Режим доступа: <https://www.studocu.com/row/document/the-british-university-in-egypt/reservoir-rock-properties/6-chapter-10-reservoir-rock/3361563>.
9. Lake L., Johns R. T. et al. *Fundamentals of Enhanced Oil Recovery*. Richardson, TX: Society of Petroleum Engineers; 2014. 489 p. DOI: 10.2118/9781613993286.
10. Anderson W. G. Wettability Literature Survey Part 5: The Effects of Wettability on Relative Permeability. *Journal of Petroleum Technology*. 1987;39(11):1453–1468. DOI: 10.2118/16323-PA.
11. Lian P. Q. The Characteristics of Relative Permeability Curves in Naturally Fractured Carbonate Reservoirs. *Journal of Canadian Petroleum Technology*. 2012;51(2):137–142. DOI: 10.2118/154814-PA.

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ КЛЮЧЕЙ И АНАЛИЗА СЕТЕВОГО ТРАФИКА

Ю. А. Крыжановская

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7420-1900>, ✉ [jak@mail.ru](mailto:jak@mail.ru)

*Аннотация:* статья посвящена практическому применению нейронных сетей для решения задач генерации криптографических ключей и анализа сетевого трафика с целью обнаружения вторжений. В качестве средства реализации использовались язык Python и ряд библиотек. Для задачи генерации ключей применялся многослойный перцептрон, включающий три слоя и обучавшийся на наборе случайных векторов, каждый из которых состоял из десяти случайных чисел. На выходе получается 128-битная бинарная последовательность, которая может использоваться в качестве криптографического ключа. Модель для анализа сетевого трафика обучалась на наборе данных, который был предварительно обработан с целью сокращения размерности, повышения точности обнаружения сетевых атак. Каждая из моделей обучалась в сто эпох. В ходе выполнения работы также анализировалось качество предложенных решений. Для сгенерированных ключей энтропия оценивалась по формуле Шеннона. Для построенной модели энтропия оказалась близка к единице, что говорит о возможности применения такого подхода. Для оценки качества модели анализа сетевого трафика применялась метрика accuracy. Анализ показал, что предложенная модель не переобучается, ее точность превышает 99%, что означает, что она хорошо подходит для классификации сетевого подключения.

*Ключевые слова:* многослойный перцептрон, нейронная сеть, криптографический ключ, сетевой трафик.

*Для цитирования:* Крыжановская Ю. А. Применение нейронных сетей для генерации криптографических ключей и анализа сетевого трафика. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):50–54.

*Поступила в редакцию:* 14.10.2025.

*В окончательном варианте:* 20.11.2025.

## NEURAL NETWORKS FOR CRYPTOGRAPHIC KEY GENERATION AND NETWORK-TRAFFIC ANALYSIS

Yu. A. Kryzhanovskaya

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7420-1900>, ✉ [jak@mail.ru](mailto:jak@mail.ru)

*Abstract:* we studied the practical application of neural networks to cryptographic key generation and network traffic analysis. The latter task plays a key role in intrusion detection systems. We implemented our approach in Python using specialized libraries. For key generation, we employed a three-layer multilayer perceptron trained on random vectors containing ten random numbers each. The network produced a 128-bit binary sequence suitable for use as a cryptographic key. The entropy of the generated keys was estimated using Shannon's formula; the resulting entropy was close to one, indicating the feasibility of the proposed approach. For network traffic analysis, we trained a model on a preprocessed dataset. The preprocessing reduced dimensionality and improved attack-detection accuracy. Each model was trained for one hundred epochs. Model performance was evaluated using the accuracy metric. The results showed no signs of overfitting, and the model achieved an accuracy exceeding 99%, demonstrating its suitability for network connection classification.

*Keywords:* multilayer perceptron, neural network, cryptographic key, network traffic.

*Cite this article:* Kryzhanovskaya Yu. A. Neural Networks for Cryptographic Key Generation and Network-Traffic Analysis. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):50–54.

*Original article submitted:* 14.10.2025.

*Revision submitted:* 20.11.2025.

### Введение

К настоящему моменту нейронные сети [1] получили широкое распространение в самых различных областях человеческой деятельности, таких как обработка мультимедиа [2], судебная медицина [3], прогнозирование потребности в лекарственных препаратах [4], анализ кредитных рисков [5, 6]

библиотечное дело [7], судостроение [8], информационная безопасность [9, 10] и других. В области информационной безопасности нейронные сети находят применение, например, в задачах криптоанализа, при обнаружении аномалий и вторжений в системах защиты информации [11], в генерации псевдослучайных последовательностей и ключей. В данной статье предложен вариант решения задачи генерации криптографических ключей и бинарной классификации сетевых подключений.

### Постановка задачи

Целью работы являлась реализация применения нейронных сетей для генерации криптографических ключей и анализа сетевого трафика. Для этого было необходимо решить следующие задачи:

1. Сгенерировать криптографический ключ с помощью многослойного перцептрона (MLP).
2. Оценить характеристику сгенерированного ключа (энтропию).
3. Использовать нейросетевую модель для анализа датасета, содержащего данные сетевого трафика (IDS).
4. Оценить качество обученной модели.

### Средства реализации

В качестве средства реализации использовались язык Python и такие библиотеки, как pandas, numpy, random, tensorflow, keras, matplotlib.pyplot.

### Генерация криптографического ключа

Для генерации ключа построена простая модель нейронной сети — многослойный перцептрон (MLP) [1], принимающая на вход случайный шум и генерирующая 128-битный бинарный ключ. Обучение проводится на случайных данных. В результате генерируется новый ключ. Для оценки качества полученного ключа использовалась энтропия, под которой понимается мера неопределенности или случайности. В криптографии высокая энтропия ключа означает хорошую устойчивость к атакам. Энтропия рассчитывается по формуле Шеннона (1):

$$H = - \sum p(x) \log_2 p(x), \quad (1)$$

где  $p(x)$  — вероятность появления символа в ключе. Приемлемым показателем считается, если его значение приближается к 1.

На первоначальном этапе было необходимо спроектировать многослойный перцептрон (MLP), который будет использоваться для обучения и генерации новых ключей. MLP содержит три слоя:

- слой, принимающий на вход вектор из 10 случайных чисел (применяется функция активации — relu);
- скрытый слой (применяется функция активации — relu);
- слой, возвращающий 128-битный ключ (применяется функция активации — sigmoid).

Затем производится генерация 1000 случайных векторов чисел для обучения. В качестве целевой переменной выступают случайно сгенерированные ключи. Модель обучается 100 эпох.

Для генерации (предсказания) нового ключа необходимо сгенерировать случайный шум (вектор длиной 10) и подать на вход обученной модели нейронной сети. Модель выдаст предсказание, при интерпретации которого получается новый сгенерированный криптографический ключ.

Для оценки качества используется энтропия, рассчитанная по специальной формуле (1). Результат отображается на экране. В качестве примера рассмотрим результаты трех тестов.

Результат 1:

\*\*\* Генерация и анализ ключа \*\*\*

Сгенерированный криптографический ключ:

```
0001111110011010010000010101110001110110000110100000100001100000000110110011110011
0101110000101011100100011000010010001001111
```

Энтропия ключа: 0.9887

Результат 2:

\*\*\* Генерация и анализ ключа \*\*\*

Сгенерированный криптографический ключ:

```
10100100001111100101000011001111111111011000100101000100011010101101001011010011100
0001000100111111000101111101010011111011011
```

Энтропия ключа: 0.9972

Результат 3:

\*\*\* Генерация и анализ ключа \*\*\*

Сгенерированный криптографический ключ:

```
100110000010010011110011111001101101000001111110111110111111000000010010001110011
1010000110011001001000110001100001011100111
```

Энтропия ключа: 0.9998

Как можно видеть, в каждом из случаев был сгенерирован уникальный 128-битный ключ с очень высоким (близким к 1) показателем энтропии, что позволяет считать, что построенная модель нейронной сети пригодна для генерации криптографических ключей.

### Анализ трафика с помощью нейронной сети

Нейронные сети также могут использоваться для анализа датасетов, содержащих информацию о сетевых подключениях. В рамках данной работы будет использоваться набор данных NSL-KDD, применимый для задач систем обнаружения вторжений (IDS). Данный датасет включает более 100000 предназначенных для обучения и более 20000 предназначенных для тестирования записей о сетевых соединениях, происходящих с использованием протоколов TCP, UDP, ICMP, каждое из которых определяется как «нормальное» или как один из видов атак. Фрагмент данных с выделенной характеристикой вида «нормальное / один из видов атаки» приведен на рис. 1.

```
0.00,0.00,150,25,0.17,0.03,0.17,0.00,0.00,0.00,0.05,0.00,normal,20
15,0.00,255,1,0.00,0.60,0.88,0.00,0.00,0.00,0.00,normal,15
.07,0.00,255,26,0.10,0.05,0.00,0.00,1.00,1.00,0.00,0.00,neptune,19
.00,0.00,30,255,1.00,0.00,0.03,0.04,0.03,0.01,0.00,0.01,normal,21
0.00,0.09,255,255,1.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,normal,21
,0.06,0.00,255,19,0.07,0.07,0.00,0.00,0.00,0.00,1.00,1.00,neptune,21
.06,0.00,255,9,0.04,0.05,0.00,0.00,1.00,1.00,0.00,0.00,neptune,21
0.06,0.00,255,15,0.06,0.07,0.00,0.00,1.00,1.00,0.00,0.00,neptune,21
09,0.05,0.00,255,23,0.09,0.05,0.00,0.00,1.00,1.00,0.00,0.00,neptune,21
.06,0.00,255,13,0.05,0.06,0.00,0.00,1.00,1.00,0.00,0.00,neptune,21
.06,0.00,255,12,0.05,0.07,0.00,0.00,0.00,0.00,1.00,1.00,neptune,21
.06,0.00,255,13,0.05,0.07,0.00,0.00,1.00,1.00,0.00,0.00,neptune,21
.00,0.43,8,219,1.00,0.00,0.12,0.03,0.00,0.00,0.00,0.00,normal,21
0.00,0.00,2,20,1.00,0.00,1.00,0.20,0.00,0.00,0.00,0.00,warezclient,15
,0.00,255,1,0.00,0.07,0.00,0.00,1.00,1.00,0.00,0.00,neptune,19
7,0.05,0.00,255,2,0.01,0.06,0.00,0.00,1.00,1.00,0.00,0.00,neptune,18
0.00,0.22,91,255,1.00,0.00,0.01,0.02,0.00,0.00,0.00,0.00,normal,21
0,0.00,1,16,1.00,0.00,1.00,1.00,0.00,0.00,0.00,0.00,ipsweep,18
00,0.00,66,255,1.00,0.00,0.02,0.03,0.00,0.00,0.02,0.00,normal,21
```

Рис. 1. Фрагмент данных датасета

Данная последовательность представляет собой поток данных между источником и адресатом сетевых пакетов в соответствии с IP-адресом, указанным в заголовке пакета, и содержит числовые и нечисловые данные. В рамках данной работы модель нейронной сети обучалась классифицировать сетевое соединение как нормальное (normal) или содержащее какую-либо атаку.

Перед использованием данного набора требуется выполнить предобработку, проведя кодирование меток и сокращение размерности. Для этих целей исключаются нечисловые признаки (например, TCP кодируется 0, UDP – 1, SMTP – 2), метки «normal» заменяются на 0, метки атак заменяются на 1. Также производится сокращение размерности за счет устранения малозначимых параметров, что позволит ускорить вычисления, производимые нейронной сетью, поскольку сокращается число нейронов входного слоя и тем самым повышается точность обнаружения сетевых атак благодаря концентрации обучения нейронной сети только на значимых параметрах. Важность параметров оценивалась эмпирически: за один раз удалялся один параметр и на полученном наборе данных обучалась и тестировалась нейронная сеть [12]. Во время тестирования фиксировались показатели качества нейронной сети по метрике: точность классификации – precision (2), так как данная метрика не зависит от соотношения классов и потому применима в условиях несбалансированных выборок, к которым относится и NSL-KDD:

$$precision = \frac{TP}{TP + FP}, \quad (2)$$

где  $TP$  – True Positive – классификатор верно отнес объект к рассматриваемому классу,  $FP$  – False Positive – классификатор неверно отнес объект к рассматриваемому классу.

Отделяется целевая переменная, данные нормализуются и делятся на обучающую и тестовую выборки: 80% – обучающая выборка, 20% – тестовая выборка. Затем строится аналогичная нейронная сеть для бинарной классификации, содержащая чуть меньшее количество нейронов.

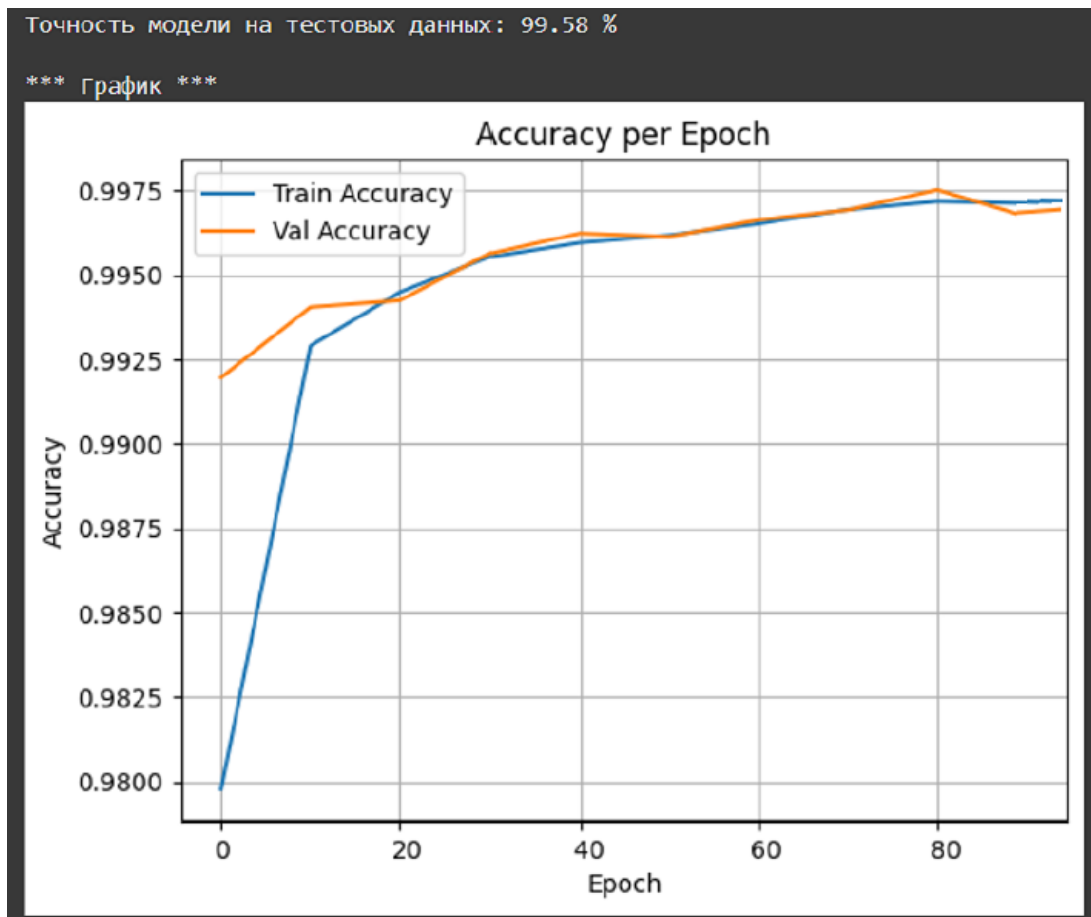


Рис. 2. Точность модели

Построенная модель обучается 100 эпох на предобработанных ранее данных. Для обученной сети применяется метрика ассигасу, описываемая формулой (3):

$$accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}, \quad (3)$$

где  $TP$  и  $FP$  имеют тот же смысл, что и в формуле (2), а  $TN$  (True Negative) и  $FN$  (False Negative) означают, что классификатор верно и неверно утверждает, что объект не принадлежит к рассматриваемому

классу, соответственно. Полученная точность модели выводится на экран, а также визуализируется с помощью графиков (рис. 2).

Анализируя полученный график, можно заметить, что обе кривые поднимаются вверх, что означает, что модель обучается и становится качественнее на обеих выборках. Также растет и стабилизируется валидационная точность: модель не переобучается. А маленький разрыв между обучающей и валидационной точностью также говорит об отсутствии переобучения. Таким образом, можно с уверенностью сказать о том, что построенная модель отлично справляется с задачей классификации статуса сетевого подключения в указанном наборе данных.

### Заключение

В ходе выполнения данной работы реализован способ генерации криптографических ключей с приемлемой степенью случайности, что подтверждается рассчитанной энтропией, с использованием многослойного персептрона (MLP). Также построена и обучена нейросетевая модель для бинарной классификации сетевых атак, проведена оценка точности модели на тестовой выборке и построен график, визуализирующий качество обучения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Галушкин А. И. *Нейронные сети: основы теории*. М.: Горячая линия-Телеком; 2024. 496 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/448412>.
2. Молодяков С. А. *Применение нейронных сетей для обработки мультимедийного контента (100 примеров на Python)*: монография. СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС; 2025. 572 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/id25-4.
3. Крыжановский В. Д., Крыжановская Ю. А. Применение нейронной сети для решения задачи классификации в судебной медицине. *Вестник УрФО. Безопасность в информационной сфере*. 2023;3:21–27. DOI: 10.14529/secu230302.
4. Крыжановский В. Д. Программный модуль прогнозирования плановой потребности в медицинской продукции. *Успехи кибернетики*. 2024;5(4):40–44. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-05.
5. Munkhdalai, L., Munkhdalai T., Namsrai O., Lee J., Ryu K. An Empirical Comparison of Machine-Learning Methods on Bank Client Credit Assessments. *Sustainability*. 2019;11(3):699–722. DOI: 10.3390/su11030699.
6. Addo P., Guegan D., Hassani B. Credit Risk Analysis Using Machine and Deep Learning Models. *Risks*. 2018;6(2):38. DOI: 10.3390/risks6020038.
7. Нуждова Д. А. Нейросети в библиотечном деле: опыт проекта «Новые библиотекари». *Корпоративные библиотечные системы: технологии и инновации: материалы Международной научно-практической конференции*. 2023:59–65. DOI: 10.18720/SPBPU/2/k23-6.
8. Кирильчук С. П., Князева Д. С. Data mining в системе управленческих навыков (в приложении к сфере гражданского судостроения). *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2022;8(1):98–106. DOI: 10.25559/SITITO.18.202201.98-106.
9. Власов К. А. Нейрокриптографическая система рекуррентных конвергентных нейросетей защиты информации. *Вопросы кибербезопасности*. 2020;4:44–55. DOI: 10.21681/2311-3456-2020-04-44-55.
10. George A., Marcel S. Learning One Class Representations for Face Presentation Attack Detection Using Multi-Channel Convolutional Neural Networks. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*. 2021;16:361–375. DOI: 10.1109/TIFS.2020.3013214.
11. Yu W., Wang Y., Song L. A Two Stage Intrusion Detection System for Industrial Control Networks Based on Ethernet/IP. *Electronics*. 2019;8(12):1545. DOI: 10.3390/electronics8121545.
12. Татарникова Т. М., Бимбетов Ф., Богданов П. Ю. Выявление аномалий сетевого трафика методом глубокого обучения. *Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ*. 2021;4:36–41. Режим доступа: <http://elibrary.ru/item.asp?id=45736639>.

## ВЫРОЖДЕНИЕ СОСТОЯНИЙ ОДНОМЕРНОЙ СПИНОВОЙ ЦЕПОЧКИ

**Б. В. Крыжановский<sup>a</sup>, В. И. Егоров<sup>b</sup>**

Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный центр  
Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского  
центра «Курчатовский институт», Москва, Российская Федерация

<sup>a</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0901-6370>, [kryzhanov@mail.ru](mailto:kryzhanov@mail.ru)

<sup>b</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9441-3695>, [rvladegorov@rambler.ru](mailto:rvladegorov@rambler.ru)

*Аннотация:* одномерная спиновая модель является одной из наиболее детально исследованных точно решаемых моделей. В частности, известны выражения для плотности состояний  $D(E)$ , где  $D(E)$  — число состояний с энергией  $E$ . В настоящей работе получены выражения для обобщенной плотности состояний  $D(E, m)$ , т.е. для числа состояний с энергией  $E$  и намагниченностью  $m$ . Знание величины  $D(E, m)$  позволяет не только вычислять термодинамику системы, но и исследовать поведение спонтанной намагниченности  $m$  во времени. Выражения получены для цепочки со свободными и периодическими граничными условиями.

*Ключевые слова:* одномерная модель Изинга, плотность состояний, спонтанная намагниченность, распределение намагниченности.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ № FNEF-2024-0001.

*Для цитирования:* Крыжановский Б. В., Егоров В. И. Вырождение состояний одномерной спиновой цепочки. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):55–63.

*Поступила в редакцию:* 13.10.2025.

*В окончательном варианте:* 19.11.2025.

## DEGENERACY OF STATES IN A ONE-DIMENSIONAL SPIN CHAIN

**B. V. Kryzhanovsky<sup>a</sup>, V. I. Egorov<sup>b</sup>**

Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”,  
Moscow, Russian Federation

<sup>a</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0901-6370>, [kryzhanov@mail.ru](mailto:kryzhanov@mail.ru)

<sup>b</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9441-3695>, [rvladegorov@rambler.ru](mailto:rvladegorov@rambler.ru)

*Abstract:* we studied a one-dimensional spin model, one of the most detailed and thoroughly investigated exactly solvable models. Expressions for the density of states  $D(E)$ , representing the number of states with a given energy  $E$ , are well known. In this work, we derived expressions for the generalized density of states  $D(E, m)$ , which represent the number of states with a given energy  $E$  and magnetization  $m$ . Knowing  $D(E, m)$  allows us not only to calculate the system’s thermodynamic properties but also to analyze the time evolution of spontaneous magnetization  $m$ . The expressions were derived for chains with both free and periodic boundary conditions.

*Keywords:* one-dimensional Ising model, the density of states, spontaneous magnetization, magnetization distribution.

*Acknowledgements:* this is a part of the FNEF-2024-0001 government contract granted to the NRC “Kurchatov Institute” – SRISA.

*Cite this article:* Kryzhanovsky B. V., Egorov V. I. Degeneracy of States in a One-Dimensional Spin Chain. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):55–63.

*Original article submitted:* 13.10.2025.

*Revision submitted:* 19.11.2025.

### Введение

Впервые поведение одномерной системы спинов было исследовано в 1925 году Изингом [1]. Детальное описание такой системы приведено в монографии [2] как введение в технику трансфер-матриц. Предложенная Изингом модель представляет собой интерес как точно решаемая задача. Было показано, что одномерная модель не имеет фазового перехода при ненулевой температуре. Тем не менее в такой модели могут быть введены критические показатели, выполняются гипотеза подобия и связанные с ней соотношения [2]. Подход, основанный на технике трансфер-матриц, позволил описать все термодинамические свойства одномерной модели. В частности, утверждается, что спонтанная

намагниченность такой модели при ненулевой температуре строго равна нулю. Однако в данном утверждении речь идет о термодинамическом среднем величины намагниченности  $\langle\langle m \rangle\rangle = 0$ , полученном усреднением по ансамблю. Квантово-механический подход [4–6] не меняет эти результаты. Но стоит отметить, что при добавлении дальнедействующих взаимодействий в одномерных моделях возможно существование фазовых переходов при отличной от нуля температуре [7, 8].

Знание обобщенной плотности состояний  $D(E, m)$  позволяет проследить за распределением намагниченностей системы и показать, что отличная от нуля спонтанная намагниченность появляется при конечном, отличном от нуля, значении температуры. Однако величина спонтанной намагниченности зависит от времени  $m = m(t)$ . Обусловлено это следующим: энергетический барьер между двумя основными состояниями системы настолько мал, что система достаточно легко переходит из области вблизи одного основного состояния с намагниченностью  $m \sim N$  в область вблизи другого основного состояния с намагниченностью  $m \sim -N$ , где  $N$  — число спинов. В итоге получаем, что среднее по времени значение спонтанной намагниченности  $\langle m(t) \rangle$  также равно нулю, в полном согласии с эргодической теоремой  $\langle m(t) \rangle = \langle\langle m \rangle\rangle = 0$ .

Рассмотрим модель Изинга, состоящую из  $N$  спинов, в которой имеется взаимодействие только с ближайшими соседями. Энергия такой системы описывается выражением:

$$E_H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} - J_{1N} s_1 s_N - H m, \quad m = \sum_{i=1}^N s_i. \quad (1)$$

В этом выражении мы выделили член  $J_{1N} s_1 s_N$ , чтобы иметь возможность рассматривать модели с периодическими ( $J_{1N} = J$ ) и свободными ( $J_{1N} = 0$ ) граничными условиями. Ниже мы получим выражения для обобщенной плотности состояний  $D(E, m)$  для обоих типов моделей  $J_{1N} = J$  и  $J_{1N} = 0$ . Отметим лишь, что для случая  $J_{1N} = J$  выражение для плотности состояний  $D(E) = \sum_m D(E, m)$  хорошо известно [3]. Кроме того, недавно для модели с периодическими граничными условиями ( $J_{1N} = J$ ) в работах [9, 10] получено и выражение для обобщенной плотности состояний  $D(E, m)$ . Результат в [9, 10] получен численным анализом моделей малых размеров ( $N = 4, 5, 6$ ), а наши результаты получены аналитическим путем на основе простой комбинаторики.

### Свободные граничные условия ( $J_{1N} = 0$ )

Рассмотрим сначала спиновую цепочку со свободными границами ( $J_{1N} = 0$ ) в отсутствие магнитного поля ( $H = 0$ ). Для простоты выражений примем  $J = 1$ . Энергия такой системы описывается выражением:

$$E = - \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}. \quad (2)$$

Нетрудно заметить, что такая модель имеет два основных состояния с энергией  $E = E_0$ , где

$$E_0 = -N + 1. \quad (3)$$

Одно из основных состояний соответствует конфигурации с намагниченностью  $m = N$  (все спины направлены вверх:  $s_i = 1, i = 1, 2, \dots, N$ ), а другое — с намагниченностью  $m = -N$  (все спины направлены вниз:  $s_i = -1, i = 1, 2, \dots, N$ ).

Опишем процедуру вычислений. Пусть система находится в одном из основных состояний, например, все спины направлены вверх. Мысленно сделаем разрез в каком-либо месте цепочки и развернем одну из частей цепочки спинами «вниз». При этом мы перейдем в состояние с энергией  $E = E_0 + 2$  (энергия системы увеличится на 2, поскольку изменит знак только взаимодействие спинов в месте разреза). Если повторить эту процедуру  $k$  раз, то получим конфигурацию с энергией:

$$E = E_0 + 2k, \quad k = 0, 1, \dots, (N - 1). \quad (4)$$

Поскольку между  $N$  спинами есть  $(N - 1)$  связей, в которые можно вставить  $k$  разрезов, то число состояний с энергией  $E = E_0 + 2k$  опишется числом сочетаний из  $N - 1$  по  $k$ , т.е. выражением:

$$D(E) = 2C_{N-1}^k. \quad (5)$$

Двойка в этом выражении образовалась, поскольку в описанной процедуре разрезов и переворотов можно переворачивать либо «правую» часть цепочки, либо «левую». Здесь и далее мы будем использовать более привычные нам обозначения для числа сочетаний:

$$C_A^b \equiv \binom{A}{b}.$$

Перейдем теперь к вычислению обобщенной плотности состояний  $D(E, m)$ . В начале этого раздела мы отмечали, что система имеет два основных состояния с энергией  $E_0 = -N + 1$ , то есть:

$$D(E_0, m) = \begin{cases} 1, & |m| = N \\ 0, & |m| \neq N \end{cases}. \quad (6)$$

Перейдем к определению обобщенной плотности состояний с более высокими энергиями  $E > E_0$  ( $k \geq 1$ ). Проводя операции  $k$  разрезов и переворотов, получаем состояния с энергией  $E = E_0 + 2k$ , число которых  $D(E)$  определяется выражением (5). Среди этих состояний имеется некоторое число конфигураций  $D(E, m)$ , в которых  $n$  спинов направлены вниз и  $N - n$  спинов направлены вверх, т.е. с числом состояний с намагниченностью  $m = N - 2n$ . Получаемое в этом случае выражение для  $D(E, m)$  зависит от четности числа разрезов  $k$ . Для единообразия получаемых ниже выражений введем здесь обозначение:

$$r = \text{Int} \left( \frac{k+1}{2} \right). \quad (7)$$

а) Нечетное  $k$ . При нечетном числе разрезов и переворотов образуется четное число ( $2r = k+1$ ) доменов:  $r$  доменов из спинов, направленных вниз, и  $r$  доменов из спинов, направленных вверх. Пусть в направленных вниз доменах содержится  $n$  спинов, а в направленных вверх доменах содержится  $N - n$  спинов. Между  $n$  спинами имеется  $n - 1$  промежутков, в которые разным числом способов можно вставить  $r - 1$  разрезов: число возможных вариантов равно числу сочетаний из  $n - 1$  по  $r - 1$ . Аналогично рассчитывается и число вариантов для  $N - n$  спинов, направленных вниз. Как итог, число состояний с энергией  $E = E_0 + 2k$  и намагниченностью  $m = N - 2n$  описывается выражением:

$$D(E, m) = 2C_{n-1}^{r-1} C_{N-n-1}^{r-1}, \quad (8)$$

где  $r = \text{Int} [(k+1)/2] = (k+1)/2$ ,  $k = (E + N - 1)/2$ ,  $n = (N - m)/2$ .

б) Четное  $k$ . В этом случае в результате процедуры  $k$  разрезов и переворотов образуется  $k+1$  домен. Число доменов нечетно ( $k+1 = 2r+1$ ), поэтому возможны два варианта: либо имеем  $r$  доменов из  $n$  спинов, направленных вниз, и  $r+1$  домен из  $N - n$  спинов, направленных вверх, либо наоборот. Проводя рассуждения, аналогичные случаю нечетного  $k$ , для плотности состояний в этом случае получим:

$$D(E, m) = C_{n-1}^r C_{N-n-1}^{r-1} + C_{n-1}^{r-1} C_{N-n-1}^r, \quad (9)$$

где  $r = \text{Int} [(k+1)/2] = k/2$ ,  $k = (E + N - 1)/2$ ,  $n = (N - m)/2$ .

в) Сделаем несколько общих замечаний.

Во-первых, следует отметить, что величина  $D(E) = \sum_m D(E, m)$  в точности совпадает с выражением (5). В этом нетрудно убедиться, проводя в (8) или (9) суммирование по  $n$ .

Во-вторых, состояния с энергией  $E = E_0 + 2$ , ближайшей к энергии основных состояний  $E = E_0$ , многократно вырождены и плотность состояний отлична от нуля для всех состояний с намагниченностью  $N - 1 \geq m \geq -(N - 1)$ :

$$D(E = E_0 + 2, m) = \begin{cases} 2, & |m| \neq N \\ 0, & |m| = N \end{cases}. \quad (10)$$

В-третьих, из (8)–(9) следует, что отличная от нуля плотность состояний имеется только для состояний, в которых число перевернутых спинов связано с энергией соотношением  $r \leq n \leq N - r$ , что адекватно соотношению  $(N - 2r) \geq m \geq -(N - 2r)$  или  $|m| \leq (N - 2r)$ . Соответственно, для обобщенной плотности состояний получим:

$$D(E, m) \neq 0 \text{ при } |m| \leq N - 2 \text{Int} \left( \frac{E + N + 1}{4} \right). \quad (11)$$

В-четвертых, максимальное значение энергии системы  $E_{\max} = N - 1$  дважды вырождено:

$$D(E_{\max}, m) = \begin{cases} 2, & m = 0, & \text{четное } N \\ 1, & |m| = 1, & \text{нечетное } N \end{cases} \quad (12)$$

Как видим, распределение  $D(E, m)$  на плоскости  $(E, m)$  представляет собой сужающуюся с ростом  $E$  усеченную пирамиду, основание которой имеет ширину  $2N$ , а вершина — ширину 1 или 2 в зависимости от четности длины цепочки  $N$ .

Наиболее существенный результат следует из (10): высота энергетического барьера между двумя основными состояниями мала (равна 2); имеется цепочка из  $2(N - 1)$  дважды вырожденных состояний с энергией  $E = E_0 + 2$ , по которой при отличной от нуля температуре система достаточно легко может мигрировать из одного основного состояния в другое.

### Периодические граничные условия ( $J_{1N} = 1$ )

Рассмотрим спиновую цепочку с периодическими границами ( $J_{1N} = J = 1$ ) в отсутствие магнитного поля ( $H = 0$ ). Энергия такой системы описывается выражением:

$$E = -s_1 s_N - \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}. \quad (13)$$

Сначала выпишем очевидные выражения. Основное состояние дважды вырождено. Конфигурации, доставляющие основное состояние, имеют намагниченность  $m = N$  и  $m = -N$ , а энергия основного состояния  $E = E_0$  имеет вид:

$$E_0 = -N. \quad (14)$$

Соответственно, имеем:

$$D(E_0, m) = \begin{cases} 1, & |m| = N \\ 0, & |m| \neq N \end{cases} \quad (15)$$

Рассмотрим обобщенную плотность состояний с более высокими энергиями  $E > E_0$ . Нетрудно заметить, что для перехода из основного состояния в состояние с энергией  $E > E_0$  следует сделать  $2k$  разрезов и  $k$  переворотов образующихся доменов. В результате таких процедур мы перейдем в состояния с энергией:

$$E = E_0 + 4k, \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max}, \quad k_{\max} = \text{Int}(N/2). \quad (16)$$

Число состояний с энергией  $E = E_0 + 4k$  и намагниченностью  $m$  имеет вид:

$$D(E, m) = \frac{N}{k} C_{n-1}^{k-1} C_{N-n-1}^{k-1}, \quad k = (E + N)/4, \quad n = (N - m)/2. \quad (17)$$

Получение выражения (17) можно аргументировать следующим образом. Сделаем первый из  $2k$  разрезов между первым и вторым спинами. Тогда задача сведется к задаче о цепочке со свободными граничными условиями с  $2k - 1$  разрезами, описываемой выражением (8). Казалось бы, первый разрез можно сделать между любыми спинами, т.е.  $N$  вариантов. Однако нетрудно заметить, что при сдвиге первого разреза на  $(N/2k) + 1$  позиций картина повторяется, т.е. имеется  $N/2k$  неповторяющихся комбинаций. Таким образом, делая в (8) замену  $r \rightarrow k$  и домножая на  $N/2k$ , получим выражение (17).

Проводя (17) суммирование по  $n$  (т.е. суммирование по  $m$ ), получим ожидаемый результат:

$$D(E) = 2C_N^{2k}. \quad (18)$$

Как мы уже отмечали, этот результат получен ранее в [9, 10] численным анализом моделей малых размеров ( $N \leq 7$ ) и обобщением на модели произвольных размеров.

Сделаем несколько общих замечаний по результатам этого раздела.

Во-первых, для состояний с энергией  $E = E_0 + 4$ , ближайшей к энергии основных состояний, из (17) следует:

$$D(E = E_0 + 4, m) = \begin{cases} N, & |m| \leq N - 2 \\ 0, & |m| > N - 2 \end{cases} \quad (19)$$

Это означает, что имеется  $(N - 1)$  состояний с такой энергией, но с различными намагниченностями ( $|m| \neq N - 1$ ), каждое из которых  $N$ -кратно вырождено.

Во-вторых, величина и вырождение максимального значения энергии системы  $E_{\max}$  зависят от четности  $N$  и достигаются при разных  $m$ :

$$E_{\max} = \begin{cases} N, & \text{четное } N \\ N - 2, & \text{нечетное } N \end{cases}, \quad D(E_{\max}, m) = \begin{cases} 2, & m = 0, \text{ четное } N \\ N, & |m| = 1, \text{ нечетное } N \end{cases}. \quad (20)$$

Как видим, в случае нечетного  $N$  имеются два состояния с  $E = E_{\max}$ , достигаемые при  $m = \pm 1$ , каждое из которых  $N$ -кратно вырождено.

В-третьих, из (17) следует, что отличная от нуля плотность состояний имеется только для состояний, в которых число перевернутых спинов связано с энергией соотношением  $k \leq n \leq N - k$ , что адекватно соотношению  $|m| \leq N - 2k$ . Соответственно, для плотности состояний получим:

$$D(E, m) \neq 0 \text{ при } |m| \leq \frac{N + E}{2}. \quad (21)$$

Как видим, распределение  $D(E, m)$  на плоскости  $(E, m)$  представляет собой сужающуюся с ростом  $E$  усеченную пирамиду, основание которой имеет ширину  $2N$ , а ширина вершины равна 1 или 2 в зависимости от четности длины цепочки  $N$ .

Наиболее существенный результат следует из (19): 1) высота энергетического барьера между двумя основными состояниями мала (равна 4); 2) имеется цепочка из  $N - 1$  состояний с энергией  $E = E_0 + 4$ , каждое из которых  $N$ -кратно вырождено; 3) по этой цепочке состояний при отличной от нуля температуре система достаточно легко может мигрировать из одного основного состояния в другое.

### Распределение намагниченности

Рассмотрим зависимость распределении намагниченности системы от температуры.

Прежде всего, отметим, что знание обобщенной плотности состояний  $D(E, m)$ , выражения для которой получены в предыдущих разделах для случая  $H = 0$ , вполне достаточно для описания поведения системы при наличии магнитного поля ( $H \neq 0$ ). Действительно, энергия системы при наличии внешнего поля описывается выражением (1):  $E_H = E - mH$ , где  $E$  — энергия взаимодействия спинов между собой, описываемая выражениями (2) или (12). Очевидно, что число состояний с энергией  $E_H$  и намагниченностью  $m$  — это число с энергией  $E$  и намагниченностью  $m$ , т.е. величины  $D(E, m)$ .

Вероятность того, что система находится в состоянии с намагниченностью  $m$ , дается выражением:

$$P(m) = \frac{1}{Z} \sum_E D(E, m) e^{-\beta E + \beta m H}, \quad (22)$$

где  $\beta$  — обратная температура, а  $Z$  — нормировочная константа (статсумма):

$$Z = \sum_m \sum_E D(E, m) e^{-\beta E + \beta m H}. \quad (23)$$

Дальнейший анализ проведем на примере одномерной модели с периодическими граничными условиями ( $J_{1N} = 1$ ). В этом случае, проводя в (23) суммирование по  $E$  и  $m$ , получим хорошо известное выражение [1–3]:

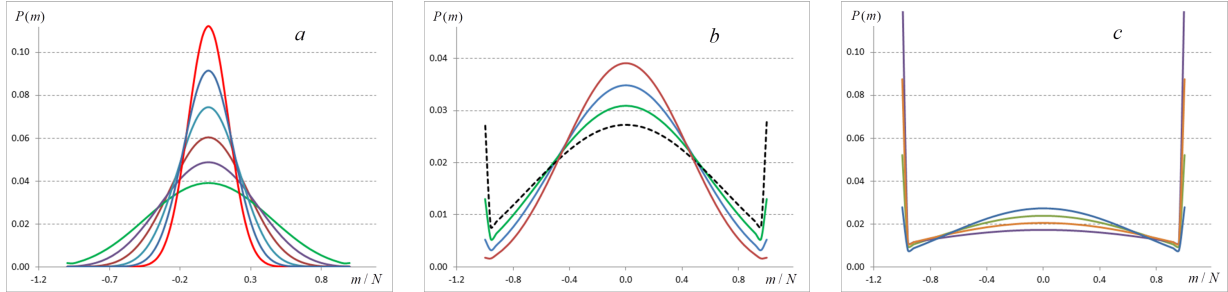
$$Z = \lambda_1^N + \lambda_2^N, \quad \lambda_{1,2} = e^\beta \cosh \beta H \pm \left( e^{2\beta} \sinh^2 \beta H + e^{-2\beta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (24)$$

которое в случае  $H = 0$  примет вид:

$$Z = \left( e^\beta + e^{-\beta} \right)^N + \left( e^\beta - e^{-\beta} \right)^N. \quad (25)$$

Исследуем модовый состав распределения  $P(m)$ . Для этого проведем графический анализ распределения  $P(m)$  в случае  $H = 0$ . На рисунках 1 показано, как изменяется вид кривой  $P(m)$  при

изменении обратной температуры. Как видим (см. рис. 1а), при изменении обратной температуры в пределах  $0 \leq \beta \leq \beta_0$  (величина  $\beta_0$  будет определена ниже) распределение  $P(m)$  одномодово с центром в точке  $m = 0$ . При  $\beta > \beta_0$  (см. рис. 1б) распределение  $P(m)$  становится трехмодовым: помимо центрального пика в точке  $m = 0$ , появляются пики равной высоты на краях распределения в точках  $m = \pm N$ : при  $\beta = \beta_1$  эти пики сравниваются по высоте с центральным пиком, а при дальнейшем увеличении  $\beta$  (см. рис. 1с) становятся подавляющими: пик в центре по-прежнему имеется, однако его высота стремится к нулю.



**Рис. 1.** Зависимость вида распределения  $P(m)$  от температуры: а) одномодовое распределение при  $0 \leq \beta \leq \beta_0$ ; б) распределение при  $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$ , пунктиром выделена кривая, соответствующая  $\beta = \beta_1$ ; в) отрезок температур  $\beta \geq \beta_1$

Определим введенные выше величины  $\beta_0$  и  $\beta_1$ . Величина  $\beta_0$  задается из условия появления пика на краях распределения  $P(m)$  в точках  $m = \pm N$ . Нетрудно заметить, что появление пика в точках  $m = \pm N$  соответствует условию  $P(|m| = N) \geq P(|m| = N - 1)$ , т.е. условию  $(e^{-\beta E_0}/Z) \geq (e^{-\beta E_0}/Z) \cdot Ne^{-4\beta}$ . Из условия равенства получаем:

$$\beta_0 = \frac{1}{4} \text{Ln } N. \quad (26)$$

Величина  $\beta_1$  определяется из условия  $P(m = 0) = P(|m| = N)$ . Оценим величину  $P(m = 0)$  в случае  $N \gg 1$ . Для этого подставим в (22) соответствующие выражения для  $D(E, m)$  и заменим суммирование по  $k$  (суммирование по  $E = E_0 + 4k$ ) интегрированием методом перевала. Тогда рассматриваемое условие после всех сокращений примет вид:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\beta} (1 + e^{-2\beta})^N = 1. \quad (27)$$

Отсюда вытекает оценочное выражение:

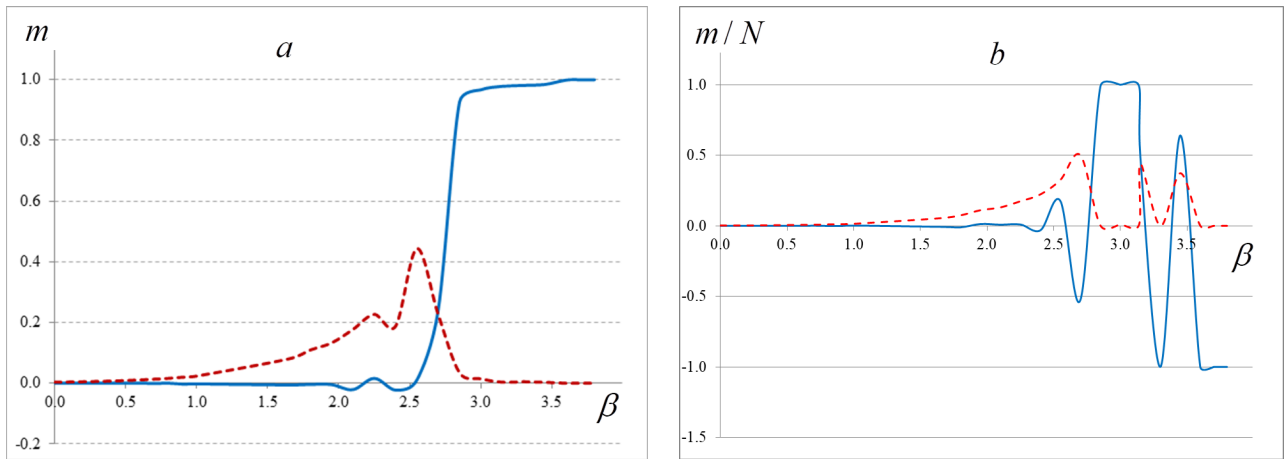
$$\beta_1 \simeq \frac{1}{2} \text{Ln } N - \frac{1}{2} \text{Ln Ln } N. \quad (28)$$

Как следует из проведенного выше анализа, при  $\beta > \beta_0$  распределение  $P(m)$  становится трехмодовым, а при  $\beta > \beta_1$  моды в точках  $m = \pm N$  становятся подавляющими. Казалось бы, что система, находясь в термодинамическом равновесии, при  $\beta > \beta_1$  должна сваливаться в состояния с  $|m| \neq 0$ , т. е. должна появляться спонтанная намагниченность. Такое, действительно, имеет место, однако имеются особенности, которые мы рассмотрим ниже.

### Зависимость намагниченности от времени наблюдения

Как мы уже отмечали, величина  $P(m)$  — это вероятность того, что находящаяся в термодинамическом равновесии система находится в состоянии с намагниченностью  $m$ . С физической точки зрения сказанное означает, что при достаточно большом времени наблюдения  $\tau$  система в течение времени  $\tau P(m)$  будет демонстрировать наличие спонтанной намагниченности, равной  $m$ .

Очевидно, что при  $\beta \leq \beta_0$ , когда распределение  $P(m)$  одномодово, спонтанная намагниченность отсутствует (см. рис. 2). Она может наблюдаться только при  $\beta > \beta_0$ , когда распределение  $P(m)$  становится многомодовым. В частности, при достаточно сильном понижении температуры можно наблюдать спонтанную намагниченность  $|m| \rightarrow 1$  (рис. 2а). Такая картина наблюдается при относительно



**Рис. 2.** Сплошная кривая соответствует зависимости  $m = m(\beta)$ , пунктирная кривая — дисперсия намагниченности: а)  $10^5$  переворотов на один спин; б)  $4 \cdot 10^5$  переворотов на один спин

малых временах наблюдения  $\tau$ , когда система не успевает побывать во всех состояниях: при достаточно больших временах  $\tau$  можно наблюдать процесс реполяризации системы, когда намагниченность самопроизвольно меняет знак (рис. 2б). Чтобы судить о скорости этих процессов, следует сравнить время нахождения системы в одном из основных состояний, т.е. величину  $P_0 = \tau P$  ( $|m| = N$ ), со временем нахождения системы во всех остальных состояниях, равным  $\tau(1 - 2P_0)$ . Для простоты примем  $\tau = 1$  и в дальнейшем будем опускать этот множитель в выражениях.

Для начала определим температуру  $\beta_2$ , при которой система половину времени проводит в одном из основных состояний, а половину времени — во всех остальных состояниях. Поскольку  $P_0 = e^{-\beta E_0}/Z$ , где  $Z$  определено в (25), то равенство  $2P_0 = 1 - 2P_0$  примет вид:

$$\frac{4}{(1 + e^{-2\beta})^N + (1 - e^{-2\beta})^N} = 1. \quad (29)$$

Удовлетворяющая этому равенству величина  $\beta = \beta_2$  в случае  $N \gg 1$  имеет вид:

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{N}{\alpha}, \quad (30)$$

где

$$\alpha = \text{Ln} (2 + \sqrt{3}). \quad (31)$$

Действительно, подставляя  $\beta = \beta_2$  в (29), получим легко разрешаемое относительно  $\alpha$  уравнение:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{N}\right)^N + \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)^N \simeq e^\alpha + e^{-\alpha} = 4.$$

Отметим, что полное число состояний при  $\beta = \beta_2$  достаточно велико. Тем не менее половину времени система проводит в двух основных состояниях ( $|m| = N$ ), а оставшаяся половина времени приходится на блуждание среди множества всех остальных состояний с намагниченностями  $|m| \neq N$ . Отметим также, что из сравнения (30) с (28) вытекает  $\beta_2 > \beta_1 > \beta_0$ .

Теперь рассмотрим, как изменится время перемагничивания ( $\bar{P} = 1 - 2P_0$ ) при  $\beta > \beta_2$ . Введем здесь безразмерную величину  $t$ , характеризующую отклонение от  $\beta_2$ :

$$t = \frac{\beta - \beta_2}{\beta_2}. \quad (32)$$

Тогда получим, что время перемагничивания при температурах  $t > 0.5$  экспоненциально быстро затухает:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \alpha^2 \exp(-4\beta_2 t). \quad (33)$$

Для проверки полученных выражений мы провели ряд численных экспериментов. Для получения графиков рис. 2 запускался алгоритм Метрополиса, в котором для каждого значения температуры в

термодинамическом равновесии вычислялось среднее значение и дисперсия намагниченности. На рис. 2а показаны измеряемые величины при малом времени наблюдения:  $10^5$  переворотов на один спин. Как видим, при  $\beta > \beta_0$  система демонстрирует наличие спонтанной намагниченности, поскольку из-за относительной малости времени наблюдения не успевает перемагнититься. На рис. 2б показаны измеряемые величины при большом времени наблюдения:  $4 \cdot 10^5$  переворотов на один спин. Как видим, при таком времени наблюдения наблюдается перемагничивание системы.

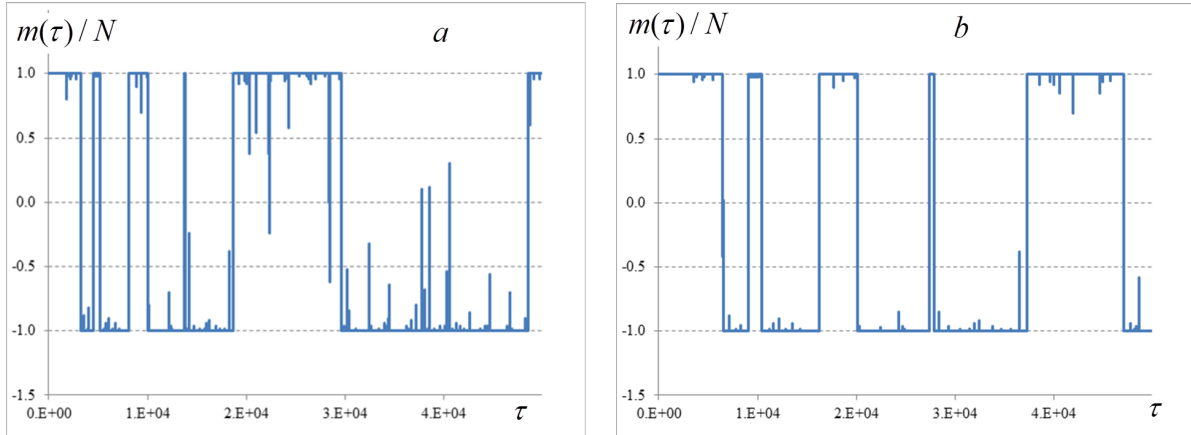


Рис. 3. Зависимость намагниченности от времени  $m = m(\tau)$  при  $\beta = 1.5\beta_2$  (а) и  $\beta = 2\beta_2$  (б)

Чтобы понять происходящее, мы в алгоритме Метрополиса при заданной температуре измеряли текущее значение намагниченности  $m = m(\tau)$  в каждый момент времени  $\tau$ : за единицу времени принималось  $2 \cdot 10^3$  переворотов спинов. На рисунках 3а и 3б показана зависимость от времени  $m = m(\tau)$  при  $\beta = 1.5\beta_2$  и  $\beta = 2\beta_2$  соответственно. Как видим, в соответствии с (33), с ростом  $\beta$  относительное время перемагничивания резко уменьшается и кривая  $m = m(\tau)$  все больше вырождается в меандр.

### Обсуждение результатов

Полученные выше выражения для обобщенной плотности состояний  $D(E, m)$  имеют, скорее всего, справочный характер, поскольку выражения для статсуммы одномерной модели хорошо известны. Соответственно, известны практически все термодинамические характеристики одномерной системы. Однако, знание обобщенной плотности состояний  $D(E, m)$  позволяет проследить за распределением намагниченностей системы и показать, что отличная от нуля спонтанная намагниченность появляется при конечном, отличном от нуля, значении температуры.

Утверждение о наличии спонтанной намагниченности не противоречит классическому результату  $\langle\langle m \rangle\rangle = 0$ , где двойные скобки означают усреднение по ансамблю [1–3]. Действительно, выше было показано, что величина спонтанной намагниченности зависит от времени  $m = m(\tau)$ . Обусловлено это следующим: энергетический барьер между двумя основными состояниями системы настолько мал, что система достаточно легко переходит из области вблизи одного основного состояния с намагниченностью  $m \sim N$  в область вблизи другого основного состояния с намагниченностью  $m \sim -N$  и обратно. В итоге получаем, что при большом времени наблюдения среднее по времени значение спонтанной намагниченности  $\langle m(\tau) \rangle$  также равно нулю, в полном согласии с эргодической теоремой  $\langle m(t) \rangle = \langle\langle m \rangle\rangle = 0$ . Отметим только, что переходы между состояниями  $m \sim N$  и  $m \sim -N$  носят случайный характер и, соответственно, приведенная на рис. 3 картина меняется от эксперимента к эксперименту.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ising E. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Z. Physik.* 1925;31:253–258. DOI: 10.1007/BF02980577.
2. Baxter R. J. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. New York: Academic Press; 1982. 512 p.
3. Stanley H. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford: Clarendon Press; 1971. 336 p.

4. Bonner J. C., Fisher M. E. Linear Magnetic Chains with Anisotropic Coupling. *Physical Review*. 1964;135(3A):640–658. DOI: 10.1103/PhysRev.135.A640.
5. Stodolsky L., Wosiek J. Exact Density of States and Its Critical Behavior. *Nuclear Physics B*. 1994;413:813–826. DOI: 10.1016/0550-3213(94)90014-0.
6. Ginzburg V. L., Fain V. M. On the Magnetic Properties of Paramagnetic Fluids of the Molecular Chain Type. *Soviet Physics JETP*. 1962;42:183–190.
7. Benedetti D., Lauria E., Mazáč D., van Vliet P. One-Dimensional Ising Model with  $1/r^{1.99}$  Interaction. *Physical Review Letters*. 2025;134(20):201602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.134.201602.
8. Benedetti D., Lauria E., Mazac D., van Vliet P. A Strong-Weak Duality for the 1d Long-Range Ising Model. *arXiv:2509.05250*. DOI: 10.48550/arXiv.2509.05250.
9. Andriushchenko P. D., Nefedev K. V. Partition Function and Density of States in Models of a Finite Number of Ising Spins with Direct Exchange between the Minimum and Maximum Number of Nearest Neighbors. *Solid State Phenomena*. 2016;247:142–147. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.247.142.
10. Kryzhanovsky B., Litinskii L. n-vicinity Method and 1D Ising Model. *Optical Memory and Neural Networks*. 2018;27(4):235–245. DOI: 10.3103/S1060992X18040033.

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПРОГИБА БАЛКИ

Д. А. Маслов

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-6427-2270>, ✉ [maslovdma@mpei.ru](mailto:maslovdma@mpei.ru)

*Аннотация:* в данной работе исследуется один класс слабо нелинейных краевых задач теории возмущений, который возникает при математическом моделировании прогиба балки, расположенной на нелинейно-упругом основании. Задача рассматривается как уравнение со значениями в банаховом пространстве, в котором линейный дифференциальный оператор возмущается полилинейным ограниченным оператором. Получены достаточные условия существования аналитического по малому параметру решения и соответствующая область значений малого параметра, предложен способ построения данного решения.

*Ключевые слова:* слабо нелинейная задача, аналитическое по малому параметру решение, банахово пространство, краевая задача.

*Для цитирования:* Маслов Д. А. Аналитические по малому параметру решения одного класса нелинейных краевых задач для уравнения прогиба балки. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):64–70.

*Поступила в редакцию:* 15.10.2025.

*В окончательном варианте:* 04.11.2025.

## ANALYTICAL SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR BEAM DEFLECTION WITH A SMALL PARAMETER

D. A. Maslov

National Research University Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-6427-2270>, ✉ [maslovdma@mpei.ru](mailto:maslovdma@mpei.ru)

*Abstract:* we investigated a class of weakly nonlinear boundary value problems in perturbation theory that arise in the mathematical modeling of beam deflection on a nonlinear elastic foundation. We formulated the problem as an equation in a Banach space, where a linear differential operator is perturbed by a polylinear bounded operator. We obtained sufficient conditions for the existence of an analytical solution for a small parameter and identified the corresponding range of parameter values. We also proposed a method for constructing this solution.

*Keywords:* weakly nonlinear problem, small parameter solution, Banach space, boundary value problem.

*Cite this article:* Maslov D. A. Analytical Solutions for a Class of Nonlinear Boundary Value Problems for Beam Deflection with a Small Parameter. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):64–70.

*Original article submitted:* 15.10.2025.

*Revision submitted:* 04.11.2025.

### Введение

Увеличение требований к прочностным характеристикам конструкций при одновременном стремлении к уменьшению веса требует более полного исследования реального напряженно-деформированного состояния [1]. Для этого часто оказывается недостаточно классических линейных теорий и необходимо рассматривать теории более высоких приближений, учитывающих, в частности, геометрическую и физическую нелинейности [1, 2]. Линеаризация, широко применяемая при исследовании нелинейных задач, приводит не только к дополнительным неустраняемым погрешностям, но, что более важно, к потере возможности исследовать нелинейные эффекты, присущие исследуемым процессам. Поэтому в настоящее время все более актуальными становятся исследование нелинейных математических моделей и, соответственно, развитие необходимых для этого математических методов. В уравнениях, описывающих динамику технических систем, часто возникают кубические нелинейности, учет которых существенно влияет на точность математических моделей, однако учет и исследование нелинейностей более высокого порядка, например, пятой степени, в некоторых случаях также показывает значимое влияние на точность математических моделей [3, 4].

Целые классы краевых задач, широко применяемых в математическом моделировании механических систем, могут быть записаны в виде дифференциальных уравнений со значениями в банаховом

пространстве [5]. При использовании для слабо нелинейных задач метода малого параметра возникает вопрос сходимости построенных рядов по степеням малого параметра, поскольку сходимость в данном случае может быть не только асимптотической, но и обычной, что говорит об аналитичности построенного решения по малому параметру. Для уравнений со значениями в банаховом пространстве рассматриваются задачи возмущения линейного дифференциального оператора  $A$  в банаховом пространстве  $E$  некоторым оператором  $B$ :

$$Au = \varepsilon B + f,$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр,  $f \in E$ . В случае, когда  $B$  — линейный оператор, проблема аналитичности решения по малому параметру была решена с помощью введения таких понятий, как голоморфные семейства операторов типа (A) и в смысле Като [6]. Слабо нелинейная задача с возмущением билинейным оператором была подробно исследована в работе [7].

В данной работе рассматривается частный случай слабо нелинейной задачи в банаховом пространстве с возмущением линейного дифференциального оператора полилинейным оператором. Рассматриваемому дифференциальному уравнению со значениями в банаховом пространстве соответствует класс слабо нелинейных краевых задач, возникающих при математическом моделировании прогиба балки, расположенной на нелинейно-упругом основании с произвольной степенью нелинейности.

**Задача с возмущением линейного оператора полилинейным оператором**

Рассмотрим уравнение в банаховом пространстве  $E$ :

$$Au = \varepsilon B(u, \dots, u) + f, \tag{1}$$

где  $A$  — линейный неограниченный оператор с областью определения  $D_A$  имеет непрерывный обратный оператор  $A^{-1}$ ;  $B : E \times \dots \times E \rightarrow E$  — полилинейный ограниченный оператор ( $m$ -линейный оператор);  $\varepsilon > 0$  — малый параметр; функция  $f \in E$ .

Будем искать решение уравнения (1) в виде ряда по степеням малого параметра:

$$u = u_0 + u_1\varepsilon + \dots + u_n\varepsilon^n + \dots \tag{2}$$

Используя правило Коши перемножения рядов, получим, в соответствии с методом неопределенных коэффициентов, серию уравнений для определения коэффициентов ряда (2):

$$\begin{aligned} Au_0 &= f, \\ Au_1 &= B(u_0, \dots, u_0), \\ Au_2 &= \sum_{i=1}^m B(u_0, \dots, u_1, \dots, u_0), \\ &\dots \dots \dots \\ Au_n &= \sum_{i_1+\dots+i_m=n-1} B(u_{i_1}, \dots, u_{i_m}), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \tag{3}$$

где в выражении для  $Au_n$  суммирование ведется по всевозможным значениям индексов  $i_1 = 0 \dots n - 1, \dots, i_m = 0 \dots n - 1$ , таким, что  $i_1 + \dots + i_m = n - 1$ , причем сумма состоит из  $C_{n+m-2}^{m-1}$  слагаемых.

Таким образом, могут быть найдены коэффициенты ряда (2):

$$\begin{aligned} u_0 &= A^{-1}f, \\ u_1 &= A^{-1}B(u_0, \dots, u_0), \\ u_2 &= A^{-1} \sum_{i=1}^m B(u_0, \dots, u_1, \dots, u_0), \\ &\dots \dots \dots \\ u_n &= A^{-1} \sum_{i_1+\dots+i_m=n-1} B(u_{i_1}, \dots, u_{i_m}), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \tag{4}$$

Формулы (4) в наиболее важном случае  $m = 3$ , соответствующем кубической нелинейности, принимают вид:

$$\begin{aligned} u_0 &= A^{-1}f, \\ u_1 &= A^{-1}B(u_0, u_0, u_0), \\ u_2 &= A^{-1}(B(u_1, u_0, u_0) + B(u_0, u_1, u_0) + B(u_0, u_0, u_1)), \\ &\dots\dots\dots \\ u_n &= A^{-1} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^k B(u_{n-1-k}, u_j, u_{k-j}) \right) \right], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{5}$$

Ставится задача определить достаточные условия, при которых ряд (2) является сходящимся к решению задачи (1) и, таким образом, представляет аналитическое по малому параметру решение задачи (1).

Приведем сначала некоторые сведения о последовательности, которая будет далее использоваться для построения мажорирующего ряда в доказательстве теоремы.

Последовательность чисел  $\{a_n^{(m)}\}_{n=0}^\infty$ , заданная рекуррентно формулой:

$$a_0^{(m)} = 1, \quad a_n^{(m)} = \sum_{i_1+\dots+i_m=n-1} a_{i_1}^{(m)} \cdot \dots \cdot a_{i_m}^{(m)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

называется последовательностью чисел Фусса–Каталана, которые могут быть заданы формулой [8]:

$$a_0^{(m)} = 1, \quad a_n^{(m)} = \frac{(mn)!}{n!((m-1)n+1)!}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{6}$$

Последовательность из чисел Фусса–Каталана (6), соответствующая некоторому натуральному  $m$ , называется также  $m$ -последовательностью Рени [8] и имеет многочисленные применения в дискретной математике.

Имея формулы (6), радиус сходимости соответствующих последовательностям  $\{a_n^{(m)}\}_{n=0}^\infty$  производящих функций  $F^{(m)}(z)$  можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} R^{(m)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n^{(m)}}{a_{n+1}^{(m)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(mn)!}{n!((m-1)n+1)!} \frac{(n+1)!((m-1)n+m)!}{(mn+m)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)((m-1)n+2) \cdot \dots \cdot ((m-1)n+m)}{(mn+1) \cdot \dots \cdot (mn+m)} = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}. \end{aligned} \tag{7}$$

Приведем некоторые примеры интересующих нас последовательностей из онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (OEIS). При  $m = 2$  числа Фусса–Каталана совпадают с обычными числами Каталана A000108 [9] и возникают в случае рассмотрения билинейного оператора. При  $m = 3$  числа Фусса–Каталана образуют последовательность A001764 [10], которая возникает в случае рассмотрения 3-линейного оператора. Соответственно, в случае 4-линейного оператора,  $m = 4$ , возникнет последовательность A002293 [11], а в случае 5-линейного оператора,  $m = 5$ , – последовательность A002294 [12].

**Теорема 1.** Пусть  $A$  является замкнутым неограниченным оператором и имеет непрерывный обратный оператор  $A^{-1}$ , полилинейный оператор  $B(u_1, \dots, u_m)$  является ограниченным. Тогда уравнение (1) имеет единственное аналитическое при  $\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m \|A^{-1}\| \|B\| \|u_0\|^{m-1}}$  решение.

Доказательство. Обозначим  $\|A^{-1}\| = q$ ,  $\|B\| = b$ . Тогда из (4) получим оценки:

$$\begin{aligned} \|u_1\| &\leq \|A^{-1}\| (\|B(u_0, \dots, u_0)\|) \leq a_1^{(m)} q b \|u_0\|^m, \\ \|u_2\| &\leq m q b \|u_0\|^{m-1} \|u_1\| \leq a_2^{(m)} q^2 b^2 \|u_0\|^{2m-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \|u_n\| &\leq a_n^{(m)} q^n b^n \|u_0\|^{n(m-1)+1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\{a_n^{(m)}\}_{n=0}^\infty$  — последовательность из чисел Фусса–Каталана (6), для которой, в соответствии с (7), производящая функция голоморфна в круге:

$$|z| < \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}.$$

Таким образом, в соответствии с оценками (8), ряд (2) мажорируется рядом:

$$\|u_0\| \sum_{n=0}^\infty a_n^{(m)} r^n |\varepsilon|^n, \tag{9}$$

где  $r = qb\|u_0\|^{m-1}$ , который сходится при каждом фиксированном  $\varepsilon$ , таком, что  $|\varepsilon| < (m-1)^{m-1}/(m^m r)$ . Это и означает аналитичность суммы  $u(\varepsilon)$  ряда (2) в круге радиуса  $(m-1)^{m-1}/(m^m r)$ .

Так как оператор  $A^{-1}$  существует, то  $u_n \in D_A$  при всех  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Также из равенств (4) следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^\infty (Au_n)\varepsilon^n \tag{10}$$

сходится в указанном круге, поскольку мажорируется рядом типа ряда (9). Итак, ряд (2) сходится, ряд (10) также сходится, что ввиду замкнутости оператора  $A$  означает, что  $u(\varepsilon) \in D_A$  и справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^\infty (Au_n)\varepsilon^n = A \sum_{n=0}^\infty u_n \varepsilon^n.$$

Следовательно,  $u(\varepsilon)$  является решением уравнения (1), аналитическим при

$$\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m \|A^{-1}\| \|B\| \|u_0\|^{m-1}}.$$

Единственность такого решения вытекает из способа построения ряда (2).

Теорема доказана.

### Математическое моделирование прогиба балки, расположенной на нелинейно-упругом основании

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения статической балки, расположенной на нелинейно-упругом основании [1]:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \alpha u - \varepsilon u^3 = f, \quad x \in (0, 1), \tag{11}$$

с краевыми условиями шарнирного опирания:

$$u(0) = \frac{d^2 u(0)}{dx^2} = u(1) = \frac{d^2 u(1)}{dx^2} = 0, \tag{12}$$

где функция  $u(x)$  описывает нормализованный прогиб балки,  $f(x)$  — функция распределенной нагрузки,  $\alpha > 0$  — коэффициент, характеризующий линейную жесткость основания,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр, характеризующий нелинейную жесткость основания (учитывая знак, представляет «размягченное основание» в терминологии Рейснера [1]).

Запишем задачу в банаховом пространстве непрерывных функций  $C([0, 1])$  в операторном виде, соответствующем (1):

$$Au = \varepsilon B(u, u, u) + f,$$

$A = \frac{d^4}{dx^4} + \alpha I$ , где  $I$  — тождественный оператор,

$D_A = \{v(x) \in C^4([0, 1]), v(0) = \frac{d^2 v(0)}{dx^2} = v(1) = \frac{d^2 v(1)}{dx^2} = 0\}$ ,

$B(u, v, w) = uvw$  — ограниченный 3-линейный оператор в  $C([0, 1])$ ,  $\|B\| = 1$ .

Оператор  $A$  является непрерывно обратимым при  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq (\pi n)^4$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , что следует из существования у него функции Грина [13], которую обозначим  $G_\alpha(x, \xi)$ . Тогда, согласно теореме 1, краевая задача (11), (12) имеет единственное аналитическое при  $\varepsilon < \frac{4}{27\|A^{-1}\|\|u_0\|^2}$  решение, представимое в виде ряда (2) с коэффициентами (5), которые принимают вид:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \int_0^1 G_\alpha(x, \xi) f(\xi) d\xi, \\ u_1(x) &= \int_0^1 G_\alpha(x, \xi) u_0^3(\xi) d\xi, \\ &\dots \dots \dots \\ u_n(x) &= \int_0^1 G_\alpha(x, \xi) \sum_{k=0}^{n-1} u_{n-1-k}(\xi) \left( \sum_{j=0}^k u_j(\xi) u_{k-j}(\xi) \right) d\xi, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (13)$$

где функцию Грина при  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq (\pi n)^4$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и введенном параметре  $\gamma = \sqrt[4]{\alpha/4}$  запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} G_\alpha(x, \xi) &= \begin{cases} G_{1,\alpha}(x, \xi) = a_2(\xi)\varphi_2(x) + a_3(\xi)\varphi_3(x), & 0 \leq x < \xi, \\ G_{2,\alpha}(x, \xi) = b_1(\xi)\varphi_1(x) + b_2(\xi)\varphi_2(x) + b_3(\xi)\varphi_3(x) + b_4(\xi)\varphi_4(x), & \xi < x \leq 1, \end{cases} \\ \varphi_1(x) &= \cos(\gamma x)\operatorname{ch}(\gamma x), & \varphi_2(x) &= \cos(\gamma x)\operatorname{sh}(\gamma x), \\ \varphi_3(x) &= \sin(\gamma x)\operatorname{ch}(\gamma x), & \varphi_4(x) &= \sin(\gamma x)\operatorname{sh}(\gamma x), \\ a_2(\xi) &= \frac{1}{4\gamma^3} (\varphi_1(\xi) + \beta_1\varphi_2(\xi) + \beta_2\varphi_3(\xi) - \varphi_4(\xi)), \\ a_3(\xi) &= \frac{1}{4\gamma^3} (-\varphi_1(\xi) + \beta_2\varphi_2(\xi) - \beta_1\varphi_3(\xi) - \varphi_4(\xi)), \\ b_1(\xi) &= \frac{1}{4\gamma^3} (\varphi_2(\xi) - \varphi_3(\xi)), & b_2(\xi) &= \frac{1}{4\gamma^3} (\beta_2\varphi_2(\xi) + \beta_1\varphi_3(\xi)), \\ b_3(\xi) &= \frac{1}{4\gamma^3} (\beta_1\varphi_2(\xi) - \beta_2\varphi_3(\xi)), & b_4(\xi) &= -\frac{1}{4\gamma^3} (\varphi_2(\xi) + \varphi_3(\xi)), \\ \beta_1 &= \frac{\sin(2\gamma) + \operatorname{sh}(2\gamma)}{\cos(2\gamma) - \operatorname{ch}(2\gamma)}, & \beta_2 &= \frac{\sin(2\gamma) - \operatorname{sh}(2\gamma)}{\cos(2\gamma) - \operatorname{ch}(2\gamma)}. \end{aligned}$$

Для расчета радиуса сходимости ряда (2)  $\varepsilon_0 = \frac{4}{27\|A^{-1}\|\|u_0\|^2}$  оценим норму обратного оператора с помощью функции Грина:

$$\|A^{-1}\| \leq \max_{x \in [0,1]} \int_x^1 |G_{1,\alpha}(x, \xi)| d\xi + \max_{x \in [0,1]} \int_0^x |G_{2,\alpha}(x, \xi)| d\xi \leq \frac{1}{4\gamma^3} (\operatorname{sh}\gamma + \operatorname{ch}\gamma)^2 (2 + \beta_1 + \beta_2). \quad (14)$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть балка длиной  $L = 1\text{ м}$  и квадратного сечения со стороной  $b = 0.05\text{ м}$  (соответственно, моментом инерции поперечного сечения  $J = b^4/12$ ) сделана из стали с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^{11}\text{ Па}$ . Вводится безразмерная пространственная координата  $x$ , отнесенная к длине балки  $L$ . Прогиб нормализуем величиной  $u_{\max} = 5 \cdot 10^{-3}\text{ м}$ .

Пусть линейный коэффициент жесткости основания  $k_1 = 5 \cdot 10^6\text{ Н/м}^3$ . Равномерная поперечная нагрузка  $q(x) = 15 \cdot 10^3\text{ Н/м}$ . Тогда в уравнении (11) безразмерный коэффициент  $\alpha = \frac{k_1 L b}{E J} = 2.4$  и безразмерная функция, характеризующая приложенную нагрузку,  $f(x) = \frac{q(x)}{E J u_{\max}} = 29$ . Необходимый для вычислений коэффициент  $\gamma = \sqrt[4]{\alpha/4} = \sqrt[4]{3/5}$ .

В случае  $f(x) = f = \text{const}$  начальное приближение  $u_0$  определяется по формуле:

$$u_0 = \int_0^1 G_\alpha(x, \xi) f d\xi = \frac{f}{\alpha} \left( 1 - \frac{\cos(\gamma(1-x))\text{ch}(\gamma x) + \text{ch}(\gamma(1-x))\cos(\gamma x)}{\cos \gamma + \text{ch} \gamma} \right). \quad (15)$$

Из (14), (15) следуют оценки норм  $\|A^{-1}\| \leq 3$ ,  $\|u_0\|_{C([0,1])} \leq 0.5$  и радиуса сходимости ряда (2)  $\varepsilon_0 \geq 0.19$ . Таким образом,  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , а значит, по формулам (13) строится аналитическое решение задачи (11), (12).

Следует заметить, что в рассмотренном классе краевых задач для уравнений четвертого порядка трудоемким является не только построение функции Грина, но и вычисление интегралов в (13). Поэтому при математическом моделировании прогиба балки следует обратить внимание на использование численных методов. Непосредственное численное решение нелинейной краевой задачи (11), (12) связано со сложностями, присущими решению нелинейных задач. При этом численное решение линейных задач серии (12) с целью определения коэффициентов ряда (2) не представляет каких-либо сложностей и гарантирует высокую точность вычислений. Таким образом, численная реализация асимптотического метода решения нелинейной краевой задачи (11), (12) представляет хорошую альтернативу как точным вычислениям коэффициентов ряда по степеням малого параметра, так и чисто численному решению нелинейной краевой задачи.

Будем рассматривать конечно-разностную схему на сетке  $\bar{\Omega} = \{x_i\}_{i=0}^m$ ,  $x_i = i \cdot h$ ,  $i = 1, \dots, m$ , где  $h = 1/m$  – шаг сетки,  $m$  – число разбиений отрезка  $[0, 1]$ . Дана сеточная функция  $\{F_i\}_{i=0}^m$ . Искомой является сеточная функция  $\{U_i\}_{i=0}^m$ . Разностная схема

$$\begin{aligned} U_0 &= 0, & (5 + \alpha h^4)U_1 - 4U_2 + U_3 &= h^4 F_1, \\ U_{i-2} - 4U_{i-1} + (6 + \alpha h^4)U_i - 4U_{i+1} + U_{i+2} &= h^4 F_i, & i &= 2, \dots, m-2, \\ (5 + \alpha h^4)U_{m-1} - 4U_{m-2} + U_{m-3} &= h^4 F_{m-1}, & U_m &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

решается методом сопряженных градиентов с достаточно высокой для сравнения полученных результатов точностью. Функции сравниваем по норме  $\|U - u\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{0 \leq i \leq m} |U_i - u(x_i)|$ .

Построим тестовый пример. Пусть  $\alpha = 2.4$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $m = 1000$ . Задаем искомую функцию  $u(x) = \sin(\pi x)$ . Тогда  $f(x) = (\pi^4 + 2.4) \sin(\pi x) - 0.05 \sin^3(\pi x)$ . В (16) возьмем  $F_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и получаем сеточную функцию  $U^{(0)}$ ,  $\|U^{(0)} - u\|_{C(\bar{\Omega})} = 7.5 \cdot 10^{-4}$ . Далее возьмем  $F_i = (U_i^{(0)})^3$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и получим из (16) сеточную функцию  $U^{(1)}$ ,  $\|U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)} - u\|_{C(\bar{\Omega})} = 9 \cdot 10^{-8}$ .

### Заключение

Исследован один класс нелинейных краевых задач, возникающих при математическом моделировании прогиба балки, расположенной на нелинейно-упругом основании. Задача рассматривалась как уравнение со значениями в банаховом пространстве, в котором линейный дифференциальный оператор возмущается полилинейным ограниченным оператором. Получены достаточные условия существования аналитического по малому параметру решения и соответствующая область значений малого параметра, предложен способ построения данного решения. Показано применение предложенного метода как с использованием функции Грина для вывода точных формул, так и с помощью численной реализации, проведены вычислительные эксперименты, показывающие высокую точность построенных приближений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ерофеев В. И., Леонтьева А. В. Дисперсия и пространственная локализация изгибных волн, распространяющихся в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании. *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2021;4:3–17. DOI: 10.31857/S0572329921030041.
2. Ерофеев В. И., Кажаяев В. В., Семерикова Н. П. *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2002. 208 с.
3. Maslov D. A., Merkuruyev I. V. Increase in the Accuracy of the Parameters Identification for a Vibrating Ring Microgyroscope Operating in the Forced Oscillation Mode with Nonlinearity Taken into Account. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2018;14(3):377–386. DOI: 10.20537/nd180308.

4. Седиhi X. M., Ширази K. X. Исследование поперечных колебаний балки на упругом основании на основе нелинейной теории пятого порядка с использованием точного выражения для кривизны балки. *Прикл. мех. техн. физ.* 2014;55(6):186–194. DOI: 10.1134/S0021894414060194.
5. Крейн С. Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*. М.: Наука; 1967. 464 с.
6. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов*. М.: Мир; 1972. 740 с.
7. Качалов В. И., Маслов Д. А. Об аналитических решениях задач нелинейной теории возмущений. *Сиб. электрон. матем. изв.* 2025;22(1):457–464. DOI: 10.33048/semi.2025.22.030.
8. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики*. М.: Мир; 1998. 703 с.
9. A000108: *онлайн энциклопедия целочисленных последовательностей*. Режим доступа: <https://oeis.org/A000108>.
10. A001764: *онлайн энциклопедия целочисленных последовательностей*. Режим доступа: <https://oeis.org/A001764>.
11. A002293: *онлайн энциклопедия целочисленных последовательностей*. Режим доступа: <https://oeis.org/A002293>.
12. A002294: *онлайн энциклопедия целочисленных последовательностей*. Режим доступа: <https://oeis.org/A002294>.
13. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*. М.: Наука; 1969. 528 с.

## ИНТЕГРАЦИЯ РАЗЛИЧНЫХ ПЛАТФОРМ С ОТКРЫТЫМ КОДОМ ДЛЯ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ДИФфуЗИОННОГО ГОРЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Г. Морар<sup>а</sup>, А. И. Карпов<sup>б</sup>, А. А. Шаклеин<sup>в</sup>

Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, Ижевск, Российская Федерация

<sup>а</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1261-0370>, ✉ [morar@udman.ru](mailto:morar@udman.ru)

<sup>б</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8380-1599>, [karpov@udman.ru](mailto:karpov@udman.ru)

<sup>в</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3603-4443>, [shaklein@udman.ru](mailto:shaklein@udman.ru)

*Аннотация:* в данной работе представлен подход к численному моделированию горизонтального распространения пламени по поверхности полиметилметакрилата с учетом сопряженного тепло- и массопереноса между газовой и твердой фазами. Разработан собственный решатель на базе OpenFOAM, реализующий химическую кинетику пиролиза, теплоперенос в твердом теле и взаимодействие с газовой фазой, включая итерационный алгоритм PIMPLE. Для учета турбулентных пульсаций в факеле пламени применена программа Fire Dynamics Simulator (FDS), а также создан Python-скрипт для интерполяции данных между расчетными сетками FDS и OpenFOAM. Проведено моделирование ламинарного и турбулентного горения, определены зоны с различными режимами течения, уточнена высота области ламинарного горения (7.5 мм), и выполнено сопряжение расчетов. Результаты показали, что включение турбулентной информации из факела не оказывает влияния на скорость распространения фронта пламени, что подтверждает доминирование ламинарного механизма у поверхности полиметилметакрилата. Дополнительно реализован механизм автоматического обновления граничных условий, что позволяет проводить серию последовательных расчетов с высокой степенью адаптации. Полученные данные позволяют повысить точность моделирования процессов горения и могут быть использованы для анализа пожарной безопасности в сложных геометрических конфигурациях.

*Ключевые слова:* численное моделирование, турбулентное диффузионное пламя, горение полимерного материала, OpenFOAM, Fire Dynamics Simulator.

*Благодарности:* работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-00148).

*Для цитирования:* Морар Г., Карпов А. И., Шаклеин А. А. Интеграция различных платформ с открытым кодом для расчета параметров турбулентного диффузионного горения полимерных материалов. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):71–76.

*Поступила в редакцию:* 14.10.2025.

*В окончательном варианте:* 07.11.2025.

## INTEGRATION OF OPEN-SOURCE PLATFORMS FOR MODELING TURBULENT DIFFUSION COMBUSTION OF POLYMERIC MATERIALS

G. Morar<sup>a</sup>, A. I. Karpov<sup>b</sup>, A. A. Shaklein<sup>c</sup>

Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russian Federation

<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1261-0370>, ✉ [morar@udman.ru](mailto:morar@udman.ru)

<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8380-1599>, [karpov@udman.ru](mailto:karpov@udman.ru)

<sup>c</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3603-4443>, [shaklein@udman.ru](mailto:shaklein@udman.ru)

*Abstract:* we present a numerical approach to modeling horizontal flame spread over polymethylmethacrylate (PMMA) surfaces, accounting for coupled heat and mass transfer between gas and solid phases. We developed a custom solver in OpenFOAM that implements pyrolysis chemical kinetics, solid-phase heat transfer, and gas-phase interactions using the iterative PIMPLE algorithm. To capture turbulent fluctuations in the flame plume, we used Fire Dynamics Simulator (FDS) and created a Python script to interpolate data between FDS and OpenFOAM computational grids.

We conducted simulations of both laminar and turbulent combustion, identifying zones with distinct flow regimes and refining the laminar combustion zone height to 7.5 mm. Coupled simulations transferred temperature, velocity, and species concentration data from FDS to OpenFOAM. Results showed that including turbulent plume data does not affect the flame front propagation speed, confirming the dominance

of laminar mechanisms near the PMMA surface. Additionally, we implemented an automated boundary condition update mechanism, enabling sequential simulations with high adaptability.

These findings improve the accuracy of combustion modeling and provide a foundation for fire safety analysis in complex geometries.

*Keywords:* simulation, turbulent diffusion flame, polymer combustion, OpenFOAM, Fire Dynamics Simulator.

*Acknowledgements:* this work is supported by the Russian Science Foundation (project No. 25-29-00148).

*Cite this article:* Morar G., Karpov A. I., Shaklein A. A. Integration of Open-Source Platforms for Modeling Turbulent Diffusion Combustion of Polymeric Materials. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):71–76.

*Original article submitted:* 14.10.2025.

*Revision submitted:* 07.11.2025.

## Введение

Основным аспектом, связанным с развитием современных подходов к численному моделированию распространения пламени по поверхности горючего материала, является необходимость учета турбулентного режима течения в газофазном пламени. В [1] получено, что ламинарное приближение показывает адекватное описание процесса в кромке, но для расчета всей области пламени необходимо привлекать модель турбулентного переноса. Наиболее простыми из них (в рамках дифференциальной постановки) являются различные модификации двухпараметрических моделей, основанных на осредненных по времени уравнениях Навье–Стокса (RANS) [2], однако визуализация пламени показала наличие крупномасштабных пульсаций, что исключает применение RANS моделей, предполагающих мелкомасштабную изотропную турбулентность. Достаточно очевидно, что использование прямого численного моделирования (DNS) в рассматриваемой задаче неприменимо ввиду недопустимых затрат вычислительных ресурсов и единственным реализуемым подходом являются вихреразрешающие модели (LES) в виде их различных модификаций. Концепция LES моделей предполагает решение трехмерных уравнений для моделирования распространения пламени по поверхности горючего материала. В работе [3] показано, что для того, чтобы корректно рассчитать тепловой поток на поверхности горючего материала, размер ячейки сетки не должен превышать 0.1 мм. Поскольку проводить расчеты с таким шагом сетки во всей области не представляется возможным из-за ограниченных вычислительных ресурсов, то необходима разработка специальных комбинированных алгоритмов, использующих сетки с мелким шагом у поверхности горения и более крупным — во внешней области, что и является предметом настоящего исследования.

## Исходные данные и алгоритм решения

Исследование процесса диффузионного горения полимерного материала проводится на примере полиметилметакрилата (ПММА), который широко используется как модельный материал [4–8]. В данной работе предлагается использование собственного алгоритма, который способен учесть как турбулентные пульсации, так и тепломассоперенос на границе твердое тело — газ. В прошлой работе [9] показано, что несмотря на наличие турбулентных пульсаций в факеле пламени, вблизи поверхности горения обнаруживается зона с ламинарным режимом горения. Исходя из этих данных, можно разделить газовую фазу на две зоны: пристеночную, в которой на сетке с достаточно мелким шагом решаются уравнения переноса ламинарного режима реагирующего течения в газовой фазе и теплопереноса в горючем материале, и внешнюю зону, в которой решаются уравнения, описывающие турбулентный перенос. Данная конфигурация представлена на рис. 1.

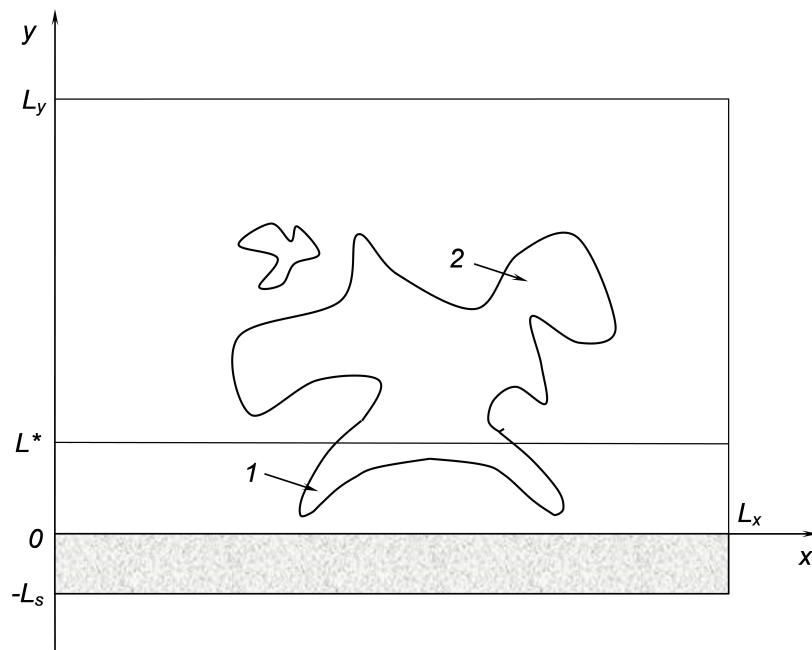
Сначала решается задача моделирования ламинарного горения с помощью модифицированного пакета OpenFOAM. Общий вид программного кода в стилевом формате OpenFOAM выглядит следующим образом:

```
while (runTime.loop())
{
    Info << "Time = " << runTime.timeName() << "\n";
    alpha0 = alpha;
    #include "calcBurnout.H"
    for (int pimple_it = 0; pimple_it < pimple_max_it; ++pimple_it)
```

```

{
  Info << "pimple iteration = " << pimple_it << "\n";
  #include "updateGasProperties.H"
  #include "updateSolidProperties.H"
  #include "calcSldChem.H"
  #include "calcUs.H"
  #include "UEqn.H"
  for (int pu_it = 0; pu_it < pu_max_it; ++pu_it)
  {
    #include "pEqn.H"
  }
  Info << "max(U): " << mag(gMax(U)) << "\n";
  #include "YEqn.H"
  #include "meshToMeshGS.H"
  #include "TgsEqn.H"
  #include "meshGSToMesh.H"
}
#include "calcUf.H"

```



**Рис. 1.** Схема расчетной области.  $L_x$ ,  $L_y$  – размеры по координатам,  $L_s$  – толщина горючего материала,  $L^*$  – граница разделения пламен: 1 – ламинарное пламя, 2 – турбулентное пламя

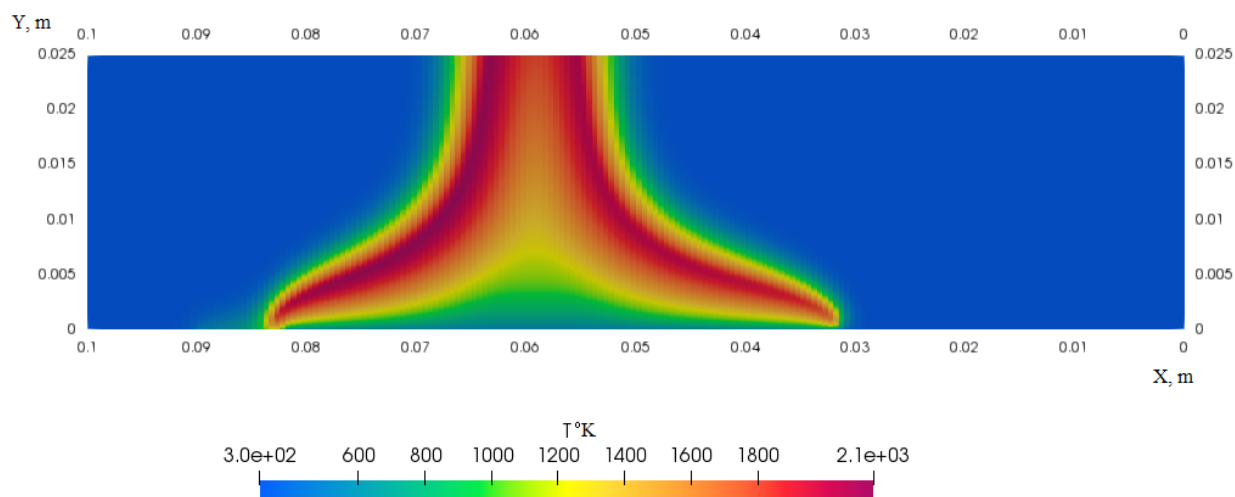
Наша модификация исходного решателя, описывающая пиролиз твердого материала, представлена в модуле "calcSldChem.H" и выглядит следующим образом:

```

for (const auto &i: indexes_s)
{
  if (flag_fuel[i]) { W_gs[i] = Foam::pow(1.0 - alpha[i], n_s) * k_s * Foam::exp(-
E_s/(R0v * T_gs[i])); }
  else { W_gs[i] = 0; }
  if (!ignition_flag)
  {
    alpha[i] = alpha0[i] + W_gs[i]*runTime.deltaT().value();
    if (alpha[i] > 1.0) { alpha[i] = 1.0; }
  }
}

```

Результатом выполнения расчетов в пакете OpenFOAM является решение задачи ламинарного горения в области  $0 < x < L_x$ ,  $-L_s < y < L_y$  показанной на рисунке 1. На рисунке 2 представлено поле температур, где, как можно заметить, размер горящей поверхности составляет 0.05 м, который определяется по протеканию химической реакции в ячейке сетки, что позволяет максимально точно определить размеры горящей поверхности. В данном случае задачу можно решать в двумерной постановке, размеры газовой области составляют 0.1 м по оси X и 0.025 м по оси Y. Видно, что уже на высоте в 0.025 м происходит значительное сужение, что делает нецелесообразным увеличение высоты рассматриваемой области.



**Рис. 2.** Температурное поле, полученное при моделировании ламинарного горения в OpenFOAM

Турбулентное горение рассчитывается в программе FDS (Fire Dynamics Simulator) [10] с использованием настроек, указанных в работе [9]. Задаются размеры области и модель турбулентности LES:

```
&HEAD CHID='burner', TITLE='burner' /
&MESH IJK=200,1,200, XB=0.0,0.50,0.0,0.01,0.0,0.50 /
&TIME T_END=10. /
&MISC SIMULATION_MODE='LES' /
```

Записывается химическая формула ПММА и условия протекания химической реакции:

```
&SPEC ID = 'PMMA', FORMULA='C5.0H8.0O2.0' /
&SPEC ID = 'OXYGEN', MASS_FRACTION_0=0.232/
&SPEC ID = 'CARBON DIOXIDE' /
&SPEC ID = 'WATER VAPOR' /
&SPEC ID = 'NITROGEN', MASS_FRACTION_0=0.768/
&REAC ID = 'pmma'
  FUEL='PMMA'
  A = 8.6E12
  E = 9E4
  HEAT_OF_COMBUSTION=25200.
  SPEC_ID_NU='PMMA', 'OXYGEN', 'CARBON DIOXIDE', 'WATER VAPOR'
  NU=-1, -6, 5, 4
  SPEC_ID_N_S = 'PMMA', 'OXYGEN'
  N_S = 0.25, 1/
```

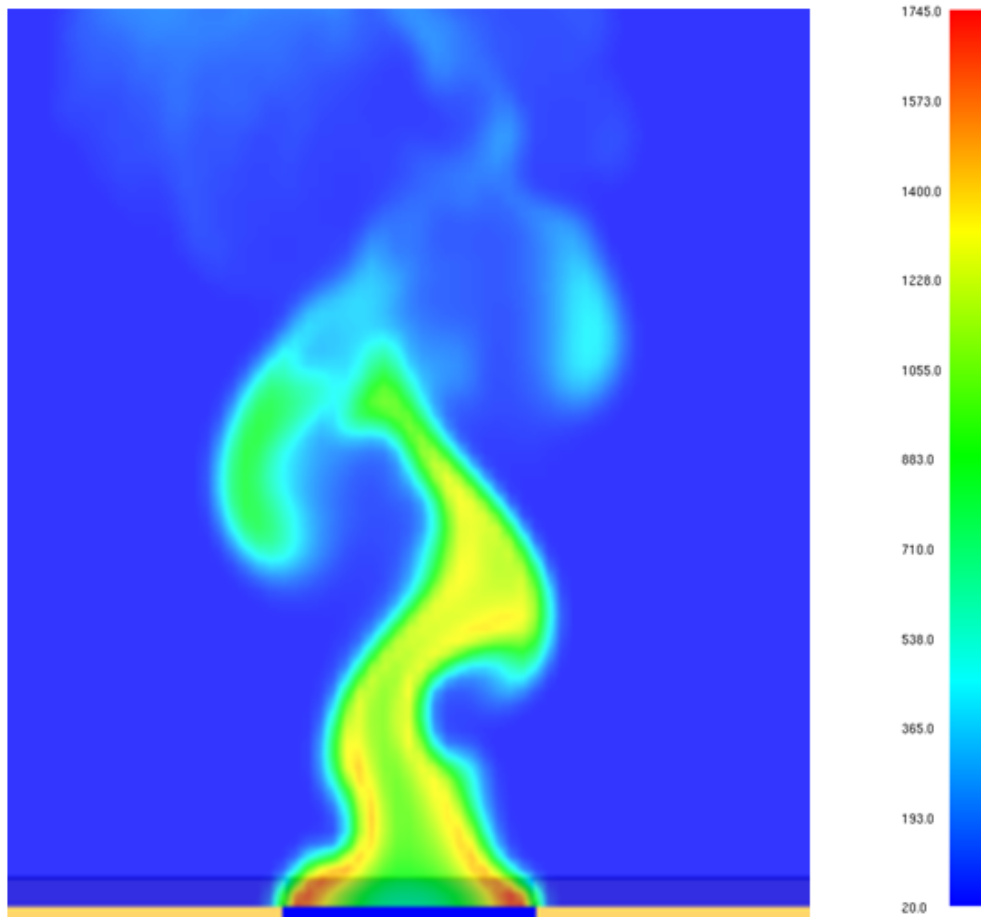
Создается горелка размером 5 см по осям OX и OY, что соответствует размеру горящей поверхности при решении задачи в OpenFOAM. Задаются начальные условия температуры и расхода на горелке и граничные условия по области, которые также взяты из полученных в ходе решения задачи ламинарного горения своим решателем:

```

&SURF ID='BURNER', MASS_FLUX(1)=0.01, SPEC_ID(1)='PMMA', TAU_MF(1)=0.01,
TMP_FRONT=450. /
&VENT XB=0.225,0.275,0,0.01,0,0, COLOR='BLUE', SURF_ID='BURNER' /
&VENT MB='ZMAX', SURF_ID='OPEN' /
&VENT MB='XMIN', SURF_ID='OPEN' /
&VENT MB='XMAX', SURF_ID='OPEN' /

```

На рисунке 3 представлено температурное поле, полученное в результате расчета турбулентного горения при помощи FDS.



**Рис. 3.** Температурное поле, полученное в результате моделирования турбулентного горения в FDS

По результатам расчета турбулентного горения была уточнена высота области  $L^*$ , в которой еще наблюдается ламинарный характер горения, — 7.5 мм. Чтобы объединить оба расчета и таким образом одновременно рассчитывать тепловой поток на границе твердого тела и учитывать турбулентные пульсации, возникающие в газе, необходимо перенести данные из FDS со среза на высоте 7.5 мм в OpenFOAM. Для этого был написан скрипт с использованием языка программирования Python, который позволяет интерполировать данные с одной сетки на другую и создать файлы с новыми граничными условиями для OpenFOAM в области  $-L_s < y < L^*$  (рис. 1). Далее расчетная область обрезается и подставляются интерполированные данные температуры, скоростей и концентраций химических компонентов. После чего снова запускается ламинарный расчет, но уже с новыми данными на верхней границе  $L^*$ . Такой перенос данных между модулями OpenFOAM и FDS проводился несколько раз с учетом увеличения ширины горячей поверхности. Детальные результаты расчетов представлены в [9].

### Заключение

Разработан собственный сопряженный решатель OpenFOAM для моделирования горения ПММА, учитывающий химическую кинетику пиролиза в твердом теле, газофазное горение в пламени и тепломассоперенос между фазами. Создан Python-инструмент для обмена полями между FDS

и OpenFOAM, включая валидацию единиц, выбор слоя по Z, интерполяцию по X, формирование смешанных граничных условий. Комплексная апробация показала: при горизонтальном распространении пламени у поверхности ПММА доминирует ламинарный механизм вблизи фронта, а включение турбулентной информации из факела не меняет скорость распространения фронта. Данная работа расширяет возможности численного анализа задач пожарной безопасности и создает основу для исследований вертикальных и геометрически сложных конфигураций с полностью автоматизированным сопряжением «газ–твердое тело».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Karpov A. I., Korobeinichev O. P., Shaklein A. A., Bolkisev A. A., Kumar A., Shmakov A. G. Numerical Study of Horizontal Flame Spread over PMMA Surface in Still Air. *Applied Thermal Engineering*. 2018;144:937–944. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2018.08.106.
2. Kacem A., Mense M., Pizzo Y., Boyer G., Suard S., Boulet P., Parent G., Porterie B. A Fully Coupled Fluid/Solid Model for Open Air Combustion of Horizontally-Oriented PMMA Samples. *Combustion and Flame*. 2016;170:135-147. DOI: 10.1016/j.combustflame.2016.04.009.
3. Snegirev A. Y., Kuznetsov E. A., Korobeinichev O. P., Shmakov A. G., Trubachev S. A. Ignition and Burning of the Composite Sample Impacted by the Bunsen Burner Flame: a Fully Coupled Simulation. *Fire Safety Journal*. 2021;127:103507. DOI: doi.org/10.1016/j.firesaf.2021.103507.
4. Wu K. K., Fan W. F., Chen C. H., Liou T. M., Pan I. J. Downward Flame Spread over a Thick PMMA Slab in an Opposed Flow Environment: Experiment and Modeling. *Combustion and Flame*. 2003;132:697-707. DOI: doi.org/10.1016/S0010-2180(02)00520-5.
5. Zhao K., Zhou X., Yang L., Gong J., Wu Z., Huan Z., Liu X. Width Effects on Downward Flame Spread over Poly(Methylmethacrylate) Sheets. *Journal of Fire Sciences*. 2015;33:69-84. DOI: doi.org/10.1177/0734904114554559.
6. Jiang L., Miller C. H., Gollner M. J., Sun J.-H. Sample Width and Thickness Effects on Horizontal Flame Spread over a Thin PMMA Surface. *Proceedings of the Combustion Institute*. 2017;36(2):2987-2994. DOI: doi.org/10.1016/j.proci.2016.06.157.
7. Bolshova T. A., Gerasimov I. E., Shmakov A. G., Korobeinichev O. P. Combustion of Spherical PMMA Samples in Still Air Simulated Using a Skeletal Chemical Kinetic Mechanism. *Fire Safety Journal*. 2023;138:103807. DOI: doi.org/10.1016/j.firesaf.2023.103807.
8. Fukumoto K., Wang C., Wen J. Large Eddy Simulation of Upward Flame Spread on PMMA Walls with A Fully Coupled Fluid–Solid Approach. *Combustion and Flame*. 2018;190:365–387. DOI: doi.org/10.1016/j.combustflame.2017.11.012.
9. Морар Г., Карпов А. И., Шаклеин А. А., Клейменов Е. В. Численное исследование распространения турбулентного диффузионного пламени по горизонтальной поверхности ПММА. *Химическая физика и мезоскопия*. 2025;27(23):382–389. DOI: doi.org/10.62669/17270227.2025.3.36.
10. McGrattan K., Hostikka S., Floyd J., McDermott R., Vanella M. Fire Dynamics Simulator. Technical Reference Guide. Volume 1: Mathematical Model. NIST Special Publication 1018, Sixth Edition. 2013. Режим доступа: <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/SpecialPublications/NIST.SP.1018e6.pdf>.

## МАЛОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ ДЛЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ КОДОВ

А. В. Острик<sup>а</sup>, М. А. Ахметова<sup>б</sup>, Д. Н. Николаев<sup>в</sup>

Федеральный центр проблем химической физики и медицинской химии РАН, г. Черноголовка,  
Российская Федерация

<sup>а</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1648-8990>, ✉ [ostrik@ficp.ac.ru](mailto:ostrik@ficp.ac.ru)

<sup>б</sup> ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0037-279X>, [ms.akhm0@mail.ru](mailto:ms.akhm0@mail.ru)

<sup>в</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0133-549X>, [nik@ficp.ac.ru](mailto:nik@ficp.ac.ru)

*Аннотация:* в работе предлагается метод построения малопараметрических уравнений состояния (УРС) поликристаллических веществ в области сжатия. В качестве примера реализации этого метода строятся УРС диоксида кремния (SiO<sub>2</sub>). Диоксид кремния относится к группе породообразующих материалов коры и мантии Земли, а также других планет. Построение УРС рассматриваемого оксида при высоких давлениях требуется для исследований формирования и эволюции космических тел, в частности, при прогнозировании последствий их столкновения.

Диоксид кремния служит также в качестве эталонного материала в ударно-волновых экспериментах, проводимых методом отражения. Корректность метода отражения предполагает наличие широкодиапазонных УРС материала-эталона. Особенностью вещества SiO<sub>2</sub> является ярко выраженный полиморфизм, что обуславливает необходимость учета полиморфных переходов (ПП) при построении его УРС.

Уравнения состояния каждой из полиморфных форм (ПФ) строятся с помощью термодинамически согласованных соотношений на основе степенных потенциалов. При численной реализации полиморфного УРС используется предварительно рассчитанная фазовая диаграмма. Предлагается метод расчета ударной адиабаты (УА) с учетом полиморфизма. Приводится сравнение расчетной по полиморфному УРС ударной адиабаты с данными, полученными в результате ударно-волновых экспериментов.

*Ключевые слова:* поликристаллические вещества, диоксид кремния, высокие давления, полиморфизм, малопараметрические уравнения состояния, термодинамические соотношения, степенные потенциалы, ударно-волновые эксперименты.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках государственного задания № FFSG-2024-0001.

*Для цитирования:* Острик А. В., Ахметова М. А., Николаев Д. Н. Малопараметрические уравнения состояния поликристаллических тел для газодинамических кодов. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):77–86.

*Поступила в редакцию:* 16.10.2025.

*В окончательном варианте:* 11.11.2025.

## LOW-PARAMETRIC EQUATIONS OF STATE FOR POLYCRYSTALLINE BODIES USED IN CFD APPLICATIONS

A. V. Ostriк<sup>а</sup>, M. A. Akhmetova<sup>б</sup>, D. N. Nikolaev<sup>в</sup>

Federal Research Center of Problems of Chemical Physics and Medicinal Chemistry, Russian Academy of  
Sciences, Chernogolovka, Russian Federation

<sup>а</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1648-8990>, ✉ [ostrik@ficp.ac.ru](mailto:ostrik@ficp.ac.ru)

<sup>б</sup> ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0037-279X>, [ms.akhm0@mail.ru](mailto:ms.akhm0@mail.ru)

<sup>в</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0133-549X>, [nik@ficp.ac.ru](mailto:nik@ficp.ac.ru)

*Abstract:* we developed a method for constructing low-parametric equations of state (EOS) for polycrystalline substances in the compression region. The method was applied to silicon dioxide (SiO<sub>2</sub>). This compound is one of the main rock-forming materials in the Earth's crust and mantle, and also occurs on other planets. Knowledge of its EOS at high pressures is essential for studying the formation and evolution of celestial bodies and for predicting the effects of their collisions.

In shock-wave research, silicon dioxide serves as a reference material in experiments based on the reflection method. The validity of this method depends on the availability of a wide-range EOS for the reference material. Because SiO<sub>2</sub> exhibits pronounced polymorphism, its polymorphic transitions must be taken into account when determining its EOS.

Equations of state for the individual polymorphs were obtained from thermodynamically consistent relations derived from power-law potentials. A pre-calculated phase diagram provided the basis for the numerical implementation of the polymorphic EOS. A procedure was developed to calculate the shock adiabat with allowance for polymorphism, and the results were compared with data from shock-wave experiments.

*Keywords:* polycrystalline substances, silicon dioxide, high pressure, polymorphism, low-parametric equations of state, thermodynamic relations, power potentials, shock wave experiments.

*Acknowledgements:* this is a part of the government contract No. FFSG-2024-0001.

*Cite this article:* Ostrik A. V., Akhmetova M. A., Nikolaev D. N. Low-Parametric Equations of State for Polycrystalline Bodies Used in CFD Applications. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):77–86.

*Original article submitted:* 16.10.2025.

*Revision submitted:* 11.11.2025.

## Введение

Уравнения состояния вещества служат для замыкания уравнений механики сплошных сред и несут информацию о термодинамических свойствах конкретных материалов. Без знания УРС невозможно корректное численное моделирование поведения сплошной среды в любых промышленных и научных установках (в том числе в ядерной и термоядерной энергетике), работа которых обеспечивается управляемыми термодинамическими процессами. В физике высоких плотностей энергии и давлений УРС используются для численного моделирования процессов высокоскоростного соударения, воздействия интенсивных потоков излучений и частиц на конденсированные среды, формирования и воздействия на материалы кумулятивных течений, а также для исследования строения планет и звезд, расчетов астрофизических процессов и катастроф.

Построение УРС на основе первопричинных принципов, несмотря на определенные успехи, все еще связано с большими затруднениями. Более плодотворным оказывается развитый в работах [1–7] феноменологический подход, в котором используется имеющийся набор экспериментальных данных о свойствах конкретного вещества. Применяя этот подход, удалось построить широкодиапазонные УРС, описывающие поведение вещества от конденсированного состояния до плотной плазмы с учетом фазовых переходов. Количество работ, посвященных широкодиапазонным УРС, весьма велико. Отметим только российские работы школы В. Е. Фортова (см., например, [8–10]), организаций РФЯЦ-ВНИИЭФ (см., например, [11–13]) и РФЯЦ-ВНИИТФ (см. например, [14–16]). В результате разработаны широкодиапазонные табличные УРС для большинства практически важных веществ. Однако их использование затруднено в газодинамических кодах, поскольку основное время при численном моделировании тратится не на решение газодинамической задачи, а на извлечение и интерполяцию табличных данных [17]. Кроме того, интерполяция нарушает условие термодинамической совместности, что приводит к нефизичному росту энтропии при расчетах [17, 18]. Выходом является разработка малопараметрических УРС, содержащих одномерные таблицы [19] или только аналитические соотношения. Именно такого вида УРС строятся в настоящей работе для диоксида кремния.

Одним из наиболее представительных состояний вещества в природе является поликристаллическое. Построение УРС поликристаллов облегчается наличием теорий теплоемкости Дебая и Эйнштейна. Однако известным и принципиальным затруднением оказывается существование у многих из кристаллов полиморфных форм, сильно отличающихся по своим термодинамическим свойствам. Поэтому разработка феноменологических методов построения полиморфных УРС кристаллических тел является актуальной и практически важной задачей.

Диоксид кремния широко используется в динамических экспериментах (в частности, в качестве референтного материала) для исследования термодинамических свойств вещества при высоких давлениях. Он обладает ярко выраженным полиморфизмом. По мере увеличения давления,  $\text{SiO}_2$  испытывает ПП, переходя из  $\alpha$ -кварца в коэзит, а затем в стишовит. Коэзит и стишовит существуют в метастабильном состоянии при нормальных условиях, что облегчает экспериментальное исследование их свойств как индивидуальных веществ.

## Термодинамические соотношения для построения УРС

При численном моделировании нестационарных процессов в сплошной среде оказываются удобными УРС вещества в виде:

$$P = P(\rho, T), \quad (1)$$

$$E = E(\rho, T), \quad (2)$$

где  $P$  — давление;  $E$  — удельная внутренняя энергия;  $\rho$  — плотность;  $T$  — температура. Уравнение (1) является термическим уравнением состояния, а уравнение (2) — калорическим.

Независимыми переменными в этих соотношениях являются  $\rho$ ,  $T$ , и, как известно из термодинамики, для определения остальных термодинамических величин (в том числе  $P$  и  $E$ ) достаточно знания термодинамического потенциала в этих же независимых переменных. Для  $\rho$  и  $T$  таким потенциалом является удельная свободная энергия  $F = E - TS$  ( $S$  — удельная энтропия). При известной функции  $F(\rho, T)$  уравнения (1), (2) и удельная энергия Гиббса  $G = G(\rho, T)$  (необходима при расчете фазовой диаграммы) получаются просто ее дифференцированием ( $v = 1/\rho$  — удельный объем):

$$P = P(\rho, T) = -\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_T = \rho^2 \left(\frac{\partial F(\rho, T)}{\partial \rho}\right)_T, \quad (3)$$

$$S = -\left(\frac{\partial F(\rho, T)}{\partial T}\right)_\rho, \quad E = F + TS = F(\rho, T) - T \left(\frac{\partial F(\rho, T)}{\partial T}\right)_\rho, \quad (4)$$

$$G = F(\rho, T) + Pv = F(\rho, T) - v \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_T = F(\rho, T) + \rho \left(\frac{\partial F(\rho, T)}{\partial \rho}\right)_T. \quad (5)$$

Соотношения (3)–(5) задают УРС в требуемом виде (1), (2) при известной функции удельной свободной энергии  $F(\rho, T)$ , построение которой является нелегкой задачей, поскольку эта функция должна отражать все основные термодинамические свойства конкретного вещества. В общем случае это сделать не удастся. Поэтому требуются упрощающие предположения.

В большинстве феноменологических моделей УРС предполагается, что свободная энергия, а также внутренняя энергия и давление (это следует из (3), (4)) представляются в виде суммы холодной и тепловой частей (в форме Ми–Грюнайзена):

$$F = E_c(\rho) + F_T(\rho, T), \quad E = E_c(\rho) + E_T(\rho, T), \quad P = P_c(\rho) + P_T(\rho, T). \quad (6)$$

Это предположение позволяет строить зависимости для разных по своей физической сути холодных и тепловых частей термодинамических функций отдельно и существенно упрощает построение УРС.

Расчет тепловых частей УРС упрощается при использовании теории теплоемкости кристаллических тел Дебая, согласно которой получаем тепловую часть удельной свободной энергии:

$$F_T(\rho, T) = \frac{RT\nu}{\mu} \{3 \ln(1 - e^{-x}) - D(x)\}, \quad x = \frac{\theta_D(\rho)}{T}, \quad D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{z^3 dz}{e^z - 1}, \quad (7)$$

где  $\nu$  — число атомов в молекуле (для  $\text{SiO}_2$   $\nu = 3$ );  $\mu$  — молекулярный вес (для  $\text{SiO}_2$   $\mu = 60,08$  кг/кмоль);  $R$  — универсальная газовая постоянная ( $R=8,314$  кДж/кмоль/К);  $D(x)$  — функция Дебая.

Подставляя (7) в (3), (4), получаем ( $S_0, E_0$  — константы, зависящие от уровня отсчета внутренней энергии и энтропии):

$$S = S(\rho, T) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\rho = -\left(\frac{\partial(E_c + F_T)}{\partial T}\right)_\rho = \frac{3R\nu}{\mu} \left(\frac{4}{3}D(x) - \ln(1 - e^{-x})\right) + S_0, \quad (8)$$

$$E(\rho, T) = F(\rho, T) + TS = E_c(\rho) + \frac{3RT\nu}{\mu} D(x) + E_0, \quad (9)$$

$$P(\rho, T) = -\frac{dE_c}{dv} + \Gamma(\rho)\rho \frac{3RT\nu}{\mu} D(x) = \rho^2 \frac{dE_c}{d\rho} + \Gamma(\rho)\rho E_T(\rho, T), \quad (10)$$

$$P_c(\rho) = -\frac{dE_c}{dv} = \rho^2 \frac{dE_c}{d\rho}, \quad \Gamma(\rho) = -\frac{d(\ln \theta_D)}{d(\ln v)} = \rho \frac{d\theta_D}{\theta_D d\rho}, \quad (11)$$

где  $\theta_D(\rho)$ ,  $\Gamma(\rho)$  — зависимости температуры Дебая и коэффициента Грюнайзена от плотности вещества.

Соотношений (9), (10) недостаточно для расчета удельной внутренней энергии и давления, поскольку для четырех неизвестных функций  $P_c(\rho)$ ,  $E_c(\rho)$ ,  $\theta_D(\rho)$ ,  $\Gamma(\rho)$  необходимо выполнение лишь двух зависимостей (11). В качестве дополнительного соотношения может служить полученная для поликристаллов обобщенная формула Зубарева–Ващенко [20], позволяющая рассчитать зависимость коэффициента Грюнайзена от плотности по кривой удельной холодной энергии  $E_c(\rho)$ :

$$\Gamma(\rho) = \frac{t-2}{3} - \frac{1}{2\rho} \frac{d^2(\rho^{-\gamma}P_c(\rho))/d(1/\rho)^2}{d(\rho^{-\gamma}P_c(\rho))/d(1/\rho)}, \quad P_c(\rho) = -\frac{dE_c}{d(1/\rho)}, \quad \gamma = \frac{2t}{3}, \quad (12)$$

где при значениях параметра  $t = 0, 1, 2$  получаются приближения Слэтера–Ландау, Дугдейла–Макдональда и теории свободного объема соответственно.

Следовательно, при принятых предположениях конкретные термодинамические свойства вещества задаются лишь одной зависимостью: потенциалом холодной энергии  $E_c = E_c(\rho)$ .

### Степенные потенциалы

В рамках принятых предположений для полного описания термодинамического поведения поликристаллов достаточно задать зависимость потенциала холодной энергии от плотности. Примем потенциалы холодных частей давления и энергии в степенной форме:

$$P_c = \frac{K_0}{n-m}(\delta^n - \delta^m), \quad E_c = -\int Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{K_0}{(n-m)\rho_0} \left( \frac{\delta^n}{n-1} - \frac{\delta^m}{m-1} \right) + E_0, \quad (13)$$

где  $\delta = \rho/\rho_0$  – степень сжатия,  $\rho_0, K_0$  – плотность и объемный модуль сжатия при давлении и абсолютной температуре, равных нулю;  $E_0$  – константа, зависящая от уровня отсчета энергии;  $n, m$  – параметры потенциалов ( $n > m$ ).

Подставляя (13) в (12), получаем выражение для функции Грюнайзена:

$$\Gamma(\rho) = \frac{t-2}{3} + \frac{1}{2} \frac{(m-\gamma)(m-\gamma+1) - (n-\gamma)(n-\gamma+1)\delta^{n-m}}{m-\gamma - (n-\gamma)\delta^{n-m}}, \quad (14)$$

Согласно (14) при больших плотностях коэффициент Грюнайзена стремится к  $(3n-1)/6$ , и если принять, в соответствии с квантово-статистической моделью Томаса–Ферми, что для сильно сжатого холодного вещества  $\Gamma = 2/3$ , то получаем часто используемое значение  $n = 5/3$ . При  $\delta = 1$  получаем из (14) значение коэффициента Грюнайзена  $\Gamma_0 = (3(m+n) - 2t - 1)/6$  при  $\rho = \rho_0$  и в случае, когда эта величина известна, имеем соотношение для определения свободного параметра  $t$  (теперь уже необязательно целого):

$$t = (3(m+n) - 6\Gamma_0 - 1)/2,$$

откуда в рамках модели следует при  $t \geq 0$  ограничение на показатели степени

$$m+n \geq 2\Gamma_0 + 1/3.$$

Интегрируя второе уравнение (11) с функцией Грюнайзена (14), находим зависимость температуры Дебая от плотности ( $\theta_{D0}$  – температура Дебая при  $\rho = \rho_0$ ):

$$\theta_D = \delta^{\frac{t-2}{3}} \sqrt{\frac{(n-\gamma)\delta^{n-\gamma+1} - (m-\gamma)\delta^{m-\gamma+1}}{n-m}} \theta_{D0}, \quad (15)$$

Отметим, что при  $n = 5/3$ ,  $m = 4/3$ ,  $t = 1$  соотношения (14), (15) записываются как:

$$\Gamma(\rho) = (2\delta^{1/3} - 1)/(3\delta^{1/3} - 2), \quad \theta_D = \theta_{D0} (3\delta^{4/3} - 2\delta)^{1/2}$$

и в таком виде успешно использовались в работе [21] для описания поведения стишовита при высоких давлениях. Однако параметр  $t$  в них не варьировался (использовалась теория Дугдейла–Макдональда с  $t = 1$ ), что приводило к значению коэффициента Грюнайзена  $\Gamma_0 = 1$ , отличному от известных данных для стишовита. Хотя это отличие оказалось несущественным для согласия с экспериментальными данными, полученного в работе [21], но, изменив значение параметра  $t$ , можно построить УРС с требуемой величиной  $\Gamma_0$ .

### Определение параметров степенных потенциалов

Конкретизация рассматриваемых УРС для каждой из ПФ поликристалла заключается в задании семи параметров  $\rho_0, K_0, n, m, \Gamma_0, \theta_{D0}, \nu$ .

Плотность вещества при нулевых значениях давления и абсолютной температуры неизвестна. Экспериментально определяется плотность при нормальных условиях, которая незначительно (на доли процента) ниже  $\rho_0$ . Поскольку плотность при нормальных условиях, как правило, известна с меньшей или близкой точностью, то различать эти две плотности в данном случае не имеет смысла и полагаем значение  $\rho_0$  равным плотности при  $P = 1$  бар и  $T = 298.15$  К. В рамках предлагаемой модели УРС функции температуры Дебая и Грюнайзена зависят только от плотности, и, вследствие отмеченного малого различия плотностей, значения  $\theta_{D0}, \Gamma_0$  также берутся равными их экспериментальным значениям при нормальных условиях. Параметр  $\nu$  в первом приближении равен числу атомов в молекуле (более точно может быть определен из экспериментально полученной зависимости теплоемкости от температуры).

Следовательно, варьируемыми остаются три параметра:  $n, m, K_0$ . Эти параметры определяются из условия наилучшего описания кривой ударной сжимаемости. Под наилучшим описанием понимается достижение наименьшего среднеквадратичного отклонения  $\Delta(K_0, n, m)$  расчетной кривой ударной сжимаемости  $P_H = P_H(\rho, K_0, n, m)$  от набора экспериментальных данных  $(\rho_i, P_{Hi}), i = 1, \dots, N$  ( $N$  – число используемых экспериментальных точек):

$$\Delta = \Delta(n, m, K_0) = \left( \sum_1^N (P_H(\rho_i, n, m, K_0) - P_{Hi})^2 / (N - 1) \right)^{1/2}.$$

Для поиска точки минимума функции нескольких переменных (в данном случае функции трех переменных)  $\Delta(K_0, n, m)$  используются прямые численные методы, не требующие вычисления производных этой функции. В работе применяются два принципиально различных прямых метода поиска безусловного локального экстремума (метод Хука–Дживса и метод Нелдера–Мида), что обеспечивает большую надежность получаемых результатов. Функция ударной сжимаемости определяется из уравнения Гюгонио и в случае УРС в форме Ми–Грюнайзена рассчитывается по формуле (конкретный вид входящих в эту формулу функций задается соотношениями (9), (13)–(15)):

$$P_H(\rho, n, m, K_0) = \frac{P_c(\rho, n, m, K_0) - \rho \Gamma(\rho, n, m, K_0)}{1 - \rho \Gamma(\rho, n, m, K_0) \Delta v / 2} \times [\Delta E_c(\rho, n, m, K_0) - E_T(\rho_{00}, T_0) - P_0 \Delta v / 2],$$

$$\Delta E_c(\rho, n, m, K_0) = E_c(\rho, n, m, K_0) - E_c(\rho_{00}, n, m, K_0), \quad \Delta v = (1/\rho_{00} - 1/\rho),$$

где плотность  $\rho_{00}$  при нормальных условиях находится из численного решения нелинейного уравнения:

$$P_c(\rho_{00}, n, m, K_0) + \rho_{00} \Gamma(\rho_{00}, n, m, K_0) E_T(\rho_{00}, T_0) = P_0.$$

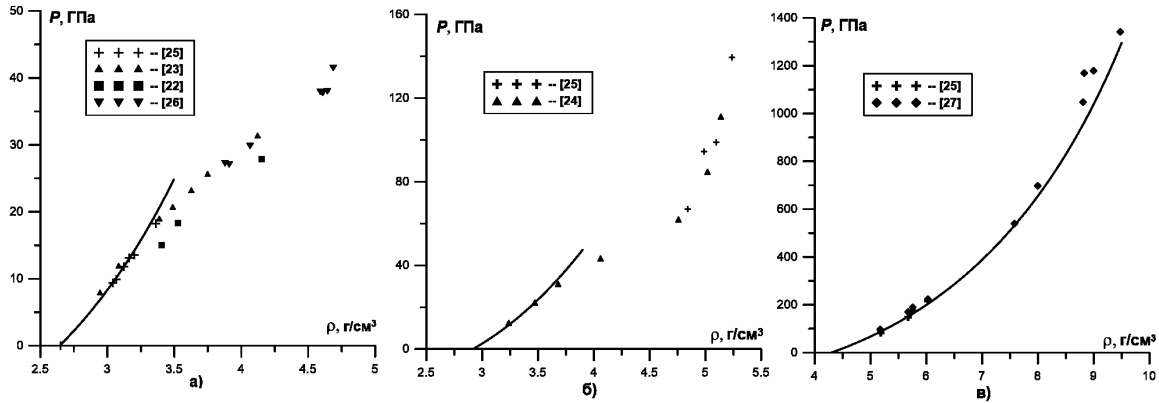
Тогда, в частности, из приведенных соотношений следует равенство  $P_H(\rho_{00}, n, m, K_0) = P_0$ .

Как уже отмечалось, в работе [21] показано, что для стишовита хорошее согласие с экспериментальными данными имеет место при  $n = 5/3$ . Кроме того, это значение показателя степени обеспечивает выполнение асимптотики поведения сильно сжатого холодного вещества. Для  $\alpha$ -кварца и коэсита, которые термодинамически равновесны в более ограниченной области сжатия, выполнения такой асимптотики не требуется и оба показателя степеней могут варьироваться. Весь набор используемых параметров УРС для трех ПФ диоксида кремния, включая и найденные минимизацией функции  $\Delta(K_0, n, m)$  параметры степенных потенциалов  $K_0, n, m$  (поскольку для стишовита принималось значение  $n = 5/3$ , то в этом случае минимизировалась функция двух переменных:  $K_0, m$ ), представлен в таблице 1. На рис. 1 показано сравнение результатов расчета (сплошные линии) ударной сжимаемости по степенным УРС ПФ с параметрами из таблицы 1 и экспериментальных данных (отдельные символы) из работ [22–27]. Наблюдается хорошее согласие данных расчетов и экспериментов до тех пор, пока рассматриваемая ПФ не переходит за ударной волной (УВ) в область двухфазного состояния. Приведенные на рис. 1 данные также показывают, что диоксид кремния обладает ярко выраженным полиморфизмом, что не позволяет описать ударную сжимаемость в рамках модели, не учитывающей ПП.

Таблица 1

Параметры УРС полиморфных форм  $\text{SiO}_2$

ПФ	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	$K_0$ , ГПа	$n$	$m$	$\Gamma_0(\rho_0)$	$\theta_{D0}$ , К	$\nu$
$\alpha$ -кварц	2,65	53,11	3,20	0	0,6	990	3
коэсит	2,92	89,42	2,66	1,40	0,4	1081	3
стишовит	4,30	353,09	5/3	1,18	1,25	1130	3



**Рис. 1.** Сравнение результатов расчета ударной сжимаемости по УРС ПФ с параметрами из таблицы 1 с экспериментальными данными работ [22–27]: а) — для  $\alpha$ -кварца; б) — для коэсита; в) — для стишовита

### Фазовая диаграмма диоксида кремния

Наличие фазовой диаграммы в сочетании с УРС для каждой из ПФ и расплава позволяет построить полиморфные УРС для всей представляющей интерес области изменения плотностей и температур. Для этого по заданным значениям  $\rho$ ,  $T$  необходимо с помощью фазовой диаграммы определить состояние вещества (фазовое состояние и вид ПФ, если состояние — кристаллическое), и затем уже воспользоваться УРС для соответствующей ПФ или расплава.

На границах фаз выполняются силовые (равенство давлений), тепловые (равенство температур) и термодинамические (равенство удельных энергий Гиббса  $G$  при неизменном химическом составе, т.е. в отсутствие химических реакций) условия равновесия фаз. Поэтому для расчета границ фазовой диаграммы требуется знание удельной энергии Гиббса в переменных  $P$  и  $T$ . В этих переменных энергия Гиббса является термодинамическим потенциалом и ее построение эквивалентно построению УРС.

Условия термодинамического равновесия задают границы фазовой диаграммы (зависимости  $T = T(P)$ ) в неявном виде. Для диоксида кремния имеем следующий набор границ:

на границе  $\alpha$ -кварц —  $\beta$ -кварц:

$$G_{\alpha Q}(P, T) = G_{\beta Q}(P, T), \quad (16)$$

на границах  $\alpha$ -кварц — коэсит и  $\beta$ -кварц — коэсит:

$$G_{\alpha Q}(P, T) = G_C(P, T), \quad G_{\beta Q}(P, T) = G_C(P, T), \quad (17)$$

на границе коэсит — стишовит:

$$G_C(P, T) = G_S(P, T), \quad (18)$$

на границах  $\beta$ -кварц — расплав, коэсит — расплав, стишовит — расплав:

$$G_{\beta Q}(P, T) = G_L(P, T), \quad G_C(P, T) = G_L(P, T), \quad G_S(P, T) = G_L(P, T). \quad (19)$$

Два соотношения (17) вместе описывают единую кривую границы коэсита с двумя ПФ кварца, а соотношения (19) — единую кривую плавления диоксида кремния.

Отметим, что при построении фазовой диаграммы для согласования уровней отсчета энергии и энтропии (определения констант  $E_0, S_0$  для различных ПФ  $\text{SiO}_2$  и расплава) требуется информация по стандартным молярным энтальпиям образования и энтропиям каждой из ПФ и расплава. Это согласование необходимо также для расчета УА с учетом ПП. Используемые при расчетах данные из [28] приведены в таблице 2.

Таблица 2

Стандартные данные для ПФ и расплава  $\text{SiO}_2$ 

параметры	$\alpha$ -кварц	$\beta$ -кварц	коэсит	стишовит	расплав
$\Delta H_{298}^0$ , кДж/моль	-910,7	-910,497	-906,4	-874,0	-901,013
$S_{298}^0$ , кДж/моль/К	41,46	41,7	40,60	24,60	49,03

На рис. 2 показаны результаты сравнения расчетной фазовой диаграммы, построенной в нашей работе [29] по условиям термодинамического равновесия фаз (16)–(19), с экспериментальными данными из работ [30–34].

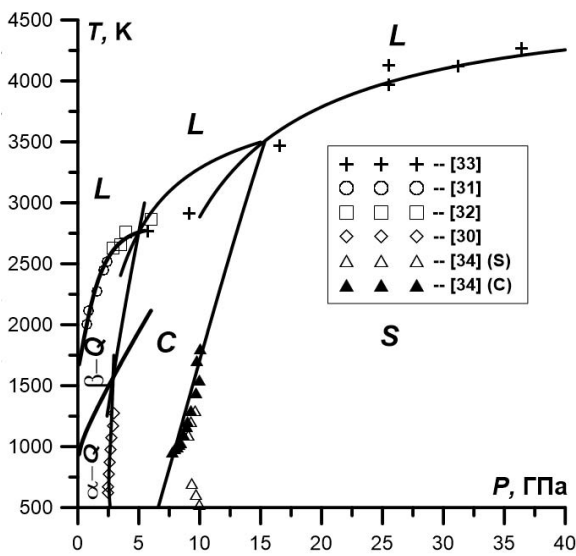


Рис. 2. Сравнение расчетной фазовой диаграммы диоксида кремния с экспериментальными данными

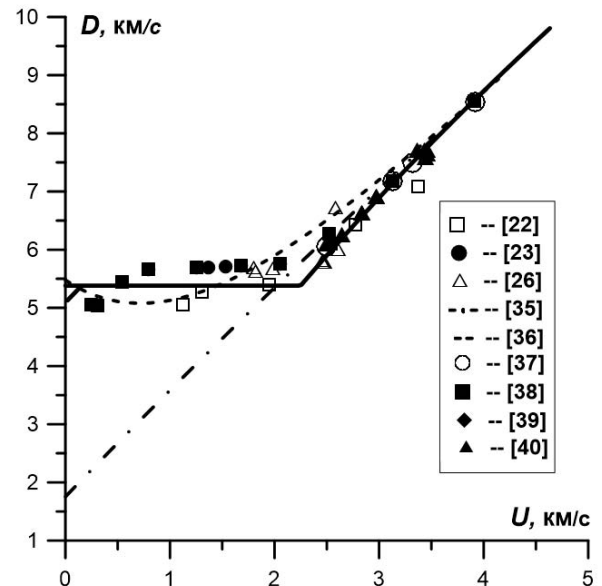


Рис. 3. Сравнение расчетной ударной адиабаты диоксида кремния с экспериментальными данными

### Расчет ударной адиабаты с учетом полиморфизма

Построенные УРС каждой из ПФ позволяют рассчитать УА с учетом полиморфизма. Расчет проводится с помощью соотношений Ренкина–Гюгонио:

$$\begin{cases} \rho(D - U) = \rho_{00}D, \\ P = P_0 + \rho_{00}DU, \\ E_k(\rho, T) - E_l(\rho_{00}, T_0) = (P_k(\rho, T) + P_l(\rho_{00}, T_0)) (1/\rho_{00} - 1/\rho) / 2, \end{cases} \quad (20)$$

где  $\rho_{00}, T_0, P_0$  – термодинамические параметры среды (считаются известными) перед УВ;  $P_l(\rho, T), E_l(\rho, T)$  – УРС  $l$ -ой (начальной фазы: в большинстве случаев начальное состояние  $\alpha$ -кварц и  $l = \alpha Q$ ) ПФ  $\text{SiO}_2$ ;  $P_k(\rho, T), E_k(\rho, T)$  – УРС  $k$ -ой (конечной) ПФ. В системе трех нелинейных уравнений (20) четыре неизвестных  $\rho, T, D, U$ , и, следовательно, если задать одну из них за УВ, то остальные неизвестные могут быть определены решением этой системы. Тогда при найденных  $\rho, T$  ударная сжимаемость  $P_H(\rho)$  определяется из УРС конечной ПФ  $P_H(\rho) = P_k(\rho, T)$ .

В случае учета полиморфных переходов расчет УА осложняется тем, что задание одной из неизвестных непосредственно не определяет значения  $k$  (в какую ПФ попадет вещество после ударного сжатия). Правильность выбора  $k$  зависит от положения границ состояний на фазовой плоскости, где

одной из независимых переменных является температура. Следовательно, представляется целесообразным первоначально задавать температуру. Тогда, обратившись к рассчитанной фазовой диаграмме при фиксированном значении  $T$ , мы получаем набор возможных в этом случае  $k$  (в том числе и для двухфазных областей с  $k = \alpha QС, СС$ ) и соответствующих им интервалов плотностей. Затем выполняется перебор  $k$  из полученного набора и поиск плотности из соответствующего каждому  $k$  интервалу плотностей посредством решения третьего уравнения системы (20). В случае, если решение существует, текущее значение  $k$  и является искомым.

При известных  $\rho, P_H$  скорость ударной волны  $D$  и массовая скорость частиц  $U$  за УВ находятся из первых двух уравнений системы (20):

$$D = \sqrt{\delta_0(P_H - P_0)/(\rho - \rho_{00})}, \quad U = \sqrt{(\delta_0 - 1)(P_H - P_0)/\rho}, \quad \delta_0 = \rho/\rho_{00}.$$

Таким образом, при описанном подходе ударная сжимаемость  $P_H(\rho)$  и ударная адиабата  $D(U)$  получаются в параметрическом виде (в качестве параметра служит температура  $T$ ):

$$\begin{cases} P_H = P_H(T), \\ \rho = \rho(T), \end{cases} \quad \begin{cases} D = D(T), \\ U = U(T). \end{cases}$$

На рис. 3 приведено сравнение рассчитанной по соотношениям Ренкина–Гюгонио (с использованием построенных УРС) УА (сплошная линия) и экспериментальных точек или аппроксимаций этих точек (пунктирные линии), измеренных в ударно-волновых экспериментах [22, 23, 26, 35–40]. Отличие расчетных данных от экспериментальных имеет место для  $\alpha$ -кварца в области сосуществования двух ПФ: коэсита и стишовита. Это отличие, по-видимому, обусловлено тем, что за УВ в условиях эксперимента не до конца реализуется переход требуемой условиями термодинамического равновесия части коэсита в стишовит (давление и температура выравниваются, а условие (18) не выполняется). В области высоких давлений, когда при ударном сжатии  $\alpha$ -кварц полностью переходит в стишовит, расчетные и экспериментальные данные отличаются в пределах ошибки измерений. Отличие в области низких давлений (малых  $U$ ) объясняется влиянием сопротивления сдвиговым деформациям и образованием двухволновой картины, что в рассматриваемой гидродинамической модели при высоких давлениях не учитывается.

### Заключение

Предложен вариант малопараметрических УРС для отдельных ПФ поликристаллов. Показано, что для их построения достаточно задать зависимость удельной холодной энергии от степени сжатия. В случае задания этой зависимости в виде степенной функции специального вида получены аналитические выражения основных термодинамических функций.

При определении значений параметров степенных УРС все параметры разбиваются на фиксируемые и варьируемые. Фиксируемые находятся из литературных источников. Варьируемые определяются из условия наилучшего согласия экспериментальных и расчетных данных для ударного сжатия. Это согласие достигается поиском минимума функции нескольких переменных методами Хука–Дживса и Нелдера–Мида. В результате проведенных расчетов получены значения варьируемых параметров для трех ПФ  $\text{SiO}_2$ : для  $\alpha$ -кварца  $n=3,2, m=0, K_0=53,11$  ГПа; для коэсита  $n=2,66, m=1,40, K_0=89,42$  ГПа; для стишовита  $n=5/3, m=1,18, K_0=353,09$  ГПа.

Предложен алгоритм численного решения системы уравнений Ренкина–Гюгонио для построения УА с учетом ПП. Сравнение с экспериментальными данными по УА показывает, что УРС в форме Ми–Грюнайзена позволяют рассчитать УА с приемлемой для практики точностью.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кормер С. Б., Урлин В. Д. Об интерполяционных уравнениях состояния металлов для области сверхвысоких давлений. *Докл. АН СССР*. 1960;131(3):542–545.
2. Альтшулер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений. *Успехи физ. наук*. 1965;85(2):197–258. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0085.196502a.0199>.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. 2-е изд. М.: Наука; 1966. 686 с.

4. Жарков В. Н., Калинин В. А. *Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах*. М.: Наука; 1968. 311 с.
5. Бушман А. В., Фортов В. Е. Модели уравнения состояния вещества. *Успехи физ. наук*. 1983;140(2):177–232. DOI: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.46054>.
6. Godwal B. K., Sikka S. K., Chidambaram R. Equation of State Theories of Condensed Matter up to about 10 TPa. *Phys. Reports*. 1983;102(3):121–197. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(83\)90014-5](https://doi.org/10.1016/0370-1573(83)90014-5).
7. Vinet P. et al. Temperature Effects on the Universal Equation of State of Solids. *Phys. Review B*. 1987;35(4):1945.
8. Бушман А. В., Ломоносов И. В., Фортов В. Е. *Уравнения состояния металлов при высоких плотностях энергии*. Черногловка: ИХФЧ РАН; 1992. DOI: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.46054>.
9. Lomonosov I. V. Multi-Phase Equation of State for Aluminum. *Laser and Particle Beams*. 2007;25(4):567–584. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0263034607000687>.
10. Фортов В. Е. *Уравнения состояния вещества от идеального газа до кварк-глюонной плазмы*. М: Физматлит; 2012. 490 с.
11. Глушак Б. Л., Гударенко Л. Ф., Стяжкин Ю. М. Полуэмпирическое уравнение состояния металлов с переменной теплоемкостью ядер и электронов. *ВАНТ. Сер.: Математическое моделирование физических процессов*. 1991;2:57–62.
12. Гордеев Д. Г. и др. Полуэмпирическая модель уравнения состояния металлов. Уравнение состояния алюминия. *Физика горения и взрыва*. 2008;44(2):61–75.
13. Гордеев Д. Г. и др. Модель уравнения состояния металлов с эффективным учетом ионизации. Уравнения состояния Ta, W, Al, Be. *Физика горения и взрыва*. 2013;49(1):106–120.
14. Симоненко В. А., Синько Г. В. Достижения и проблемы теории уравнений состояния. *Теплофизика высоких температур*. 1988;26(5):864–873.
15. Барышева Н. М., Жеребцов В. А., Синько Г. В. САУРС — широкодиапазонное уравнение состояния с использованием сплайн-аппроксимации. *ВАНТ. Сер.: Методики и программы численного решения задач математической физики*. 1988;15(2):80–86.
16. Сапожников А. Т. и др. Широкодиапазонное табличное уравнение состояния ГЛОБУС и его применение для описания термодинамических свойств меди. *ВАНТ. Сер.: Математическое моделирование физических процессов*. 1991;1:9–16.
17. Ким В. В., Ломоносов И. В., Острик А. В. Численная реализация табличных уравнений состояния компонентов композиционных материалов в современных гидрокодах. *Конструкции из композиционных материалов*. 2015;2:3–45.
18. Прокопов Г. П. Необходимость контроля энтропии в газодинамических расчетах. *Жур. выч. мат. и мат. физ.* 2007;47(9):1591–1601.
19. Ostriak A., Nikolaev D. Shock Induced Melting of Sapphire. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2022;2154:012010. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2154/1/012010>.
20. Зубарев В. Н., Ващенко В. Я. О коэффициенте Грюнайзена. *Физика твердого тела*. 1963;5:886–891.
21. Надыкто Б. А., Надыкто А. Б., Ломайкин А. И. Уравнение состояния стишовита до 1000 ГПа и более 10000 К, фазовая стабильность стишовита и описание при высоких давлениях ударных адиабат полиморфных фаз SiO<sub>2</sub> как ударных адиабат пористого стишовита. *ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика*. 2020;1:29–39.
22. Адударов Г. А. и др. Ударное сжатие кварца. *Прикл. мех. и техн. физ.* 1962;4:81–89.
23. Павловский М. Н. Измерения скорости звука в кварцитах, доломитах, ангидритах, хлориде натрия, парафине, плексигласе, полиэтилене и фторопласте-4 при ударном сжатии. *Прикл. мех. и техн. физ.* 1976;5:136–139.
24. Подурец М. А., Симаков Г. В., Телегин Г. С., Трунин Р. Ф. Полиморфизм кремнезема в ударных волнах и уравнения состояния коэсита и стишовита. *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1981;1:16–25.
25. Luo S. N. et al. Direct Shock Wave Loading of Stishovite to 235 GPa: Implications for Perovskite Stability Relative to an Oxide Assemblage at Lowermantle Conductions. *Geophysical Research Letter*. 2002;29(14):36. DOI: <https://doi.org/10.1029/2002GL015627>.
26. *Compendium of Shock Wave Data*. Ed. M. van Thiel. Livermore: Lawrence Livermore Laboratory Report UCRL-50108; 1977. С. 373–376.
27. Millot M. et al. Planetary Science. Shock Compression of Stishovite and Melting of Silica at Planetary

- Interior Conditions. *Science*. 2015;347:418–420. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1261507>.
28. Mao H. et al. Volumetric Properties and Phase Relations of Silica – Thermodynamic Assessment. *Journal of Alloys and Compounds*. 2001;327(1-2):253–262. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0925-8388\(01\)01465-7](https://doi.org/10.1016/S0925-8388(01)01465-7).
  29. Ахметова М. А., Острик А. В., Николаев Д. Н. Об использовании степенных потенциалов для построения уравнений состояния кристаллических компонентов композитных материалов. *Конструкции из композиционных материалов*. 2025;3:38–44. DOI: [https://doi.org/10.52190/2073-2562\\_2025\\_3\\_38](https://doi.org/10.52190/2073-2562_2025_3_38).
  30. Bohlen S. R., Boettcher A. L. The Quartz – Coesite Transformation: a Precise Determination and the Effects of Other Components. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1982;87(B8):7073–7078. DOI: <https://doi.org/10.1029/JB087iB08p07073>.
  31. Jackson I. Melting of Silica Isotypes SiO<sub>2</sub>, BF<sub>2</sub> and GeO<sub>2</sub> at Elevated Pressures. *Phys. Earth Planet. Inter*. 1976;13:218–231. DOI: [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(76\)90096-0](https://doi.org/10.1016/0031-9201(76)90096-0).
  32. Kanzaki M. Melting of Silica up to 7 GPa. *J. Am. Ceram. Soc.* 1990;73:3706–3707. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1990.tb04282.x>.
  33. Shen G., Lazor P. Measurement of Melting Temperatures of Some Minerals under Lower Mantle Pressures. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1995;100(B9):17699–17713. DOI: <https://doi.org/10.1029/95JB01864>.
  34. Zhang J. et al. In Situ X-Ray Observations of the Coesite-Stishovite Transition: Reversed Phase Boundary and Kinetics. *Physics and Chemistry of Minerals*. 1996;23:1–10. DOI: 10.1007/BF00202987.
  35. Knudson M. D., Desjarlais M. P. Adiabatic Release Measurements in  $\alpha$ -Quartz between 300 and 1200 GPa: Characterization of  $\alpha$ -Quartz as a Shock Standard in the Multimegabar Regime. *Physical Review B*. 2013;88(18):184107. DOI: 10.1103/PhysRevB.88.184107.
  36. Desjarlais M. P., Knudson M. D., Cochrane K. R. Extension of the Hugoniot and Analytical Release Model of  $\alpha$ -Quartz to 0.2–3 TPa. *Journal of Applied Physics*. 2017;122(3):35903. DOI: 10.1063/1.4991814.
  37. Альтшулер Л. В., Трунин Р. Ф., Симаков Г. В. Ударное сжатие периклаза, кварца и состава нижней мантии Земли. *Изв. Акад. Наук СССР. Физика Земли*. 1965;10:1–6.
  38. Трунин Р. Ф. и др. Динамическая сжимаемость кварца и кварцитов при высоком давлении. *Изв. Акад. Наук СССР. Физика Земли*. 1971;1:8–12.
  39. Трунин Р. Ф. Ударная сжимаемость конденсированных веществ в сильных ударных волнах, вызванных подземными ядерными взрывами. *Успехи физ. наук*. 1994;164(11):1215–1237.
  40. Marsh S. P. *LASL Shock Hugoniot Data*. Univ. of California Press; 1980. 658 p.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ С ТРЕЩИНАМИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**М. Н. Перельмутер**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Российская Федерация*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8430-5412>, [✉ perelm@ipmnet.ru](mailto:perelm@ipmnet.ru)*

*Аннотация:* метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) в прямой формулировке используется для численного решения двумерных нестационарных задач несвязанной термоупругости при наличии трещин. Первым этапом является решение нестационарной задачи теплопроводности, для решения которой используется формулировка ГИУ без вычисления интегралов по объему тела и шаговая по времени схема с кусочно-постоянной интерполяцией температуры и теплового потока по границе области и по времени. Результаты решения задачи теплопроводности используются как начальные данные для задачи термоупругости. При решении ГИУ в задаче термоупругости используются квадратичные изопараметрические граничные элементы и специальные граничные элементы вблизи вершины трещины, учитывающие асимптотическое поведение переменных задачи. Разработан пакет программ для решения задач нестационарной термоупругости с трещинами. Получены решения новых задач термоупругости с трещинами.

*Ключевые слова:* метод граничных интегральных уравнений, нестационарная теплопроводность, термоупругость, трещины.

*Благодарности:* работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-49-02002.

*Для цитирования:* Перельмутер М. Н. Решение задач нестационарной термоупругости с трещинами методом граничных интегральных уравнений. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):87–94.

*Поступила в редакцию:* 14.10.2025.

*В окончательном варианте:* 21.11.2025.

## SOLUTION OF NONSTATIONARY THERMOELASTICITY PROBLEMS WITH CRACKS USING THE BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS METHOD

**M. N. Perelmuter**

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8430-5412>, [✉ perelm@ipmnet.ru](mailto:perelm@ipmnet.ru)*

*Abstract:* we applied the boundary integral equation (BIE) method in its direct formulation to solve two-dimensional unsteady problems of uncoupled thermoelasticity in the presence of cracks. First, we solved the unsteady heat conduction problem using the BIE formulation without integrating over the body volume. We employed a time-stepping scheme with piecewise-constant interpolation of temperature and heat flux along the boundary and over time. We used the results of the heat conduction analysis as input data for the thermoelasticity problem.

In the thermoelasticity analysis, we solved the BIE using quadratic isoparametric boundary elements and special elements near the crack tip to capture the asymptotic behavior of the field variables. We implemented these methods in a software package to solve unsteady thermoelasticity problems with cracks. Using this approach, we obtained solutions to previously unsolved thermoelasticity problems involving cracks.

*Keywords:* boundary integral equations method, nonstationary heat conduction, thermoelasticity, cracks.

*Acknowledgements:* this work is supported by the Russian Science Foundation, project No. 24-49-02002.

*Cite this article:* Perelmuter M. N. Solution of Nonstationary Thermoelasticity Problems with Cracks Using the Boundary Integral Equations Method. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):87–94.

*Original article submitted:* 14.10.2025.

*Revision submitted:* 21.11.2025.

### Введение

Для решения нестационарных задач термоупругости с трещинами применяются преимущественно численные методы. Первые результаты получены методом конечных элементов [1–3]. Метод

граничных интегральных уравнений (ГИУ) применялся для решения нестационарных задач термоупругости с трещинами для однородных [4–6] и кусочно-однородных [7] областей, а также для моделирования трещин в материалах с градиентным изменением свойств [8, 9]. Первым этапом решения задачи термоупругости является решение нестационарной задачи теплопроводности. Для численного решения ГИУ нестационарной задачи теплопроводности используются два основных подхода. Первый из них основан на применении преобразования Лапласа к ГИУ, и решение выполняется в пространстве изображений для последовательности значений параметра преобразования [10]. Для нахождения значений неизвестных в действительном пространстве используется численная процедура обратного преобразования Лапласа. При таком подходе явная зависимость от времени в задаче устраняется, но возможны сложности при выполнении обратного преобразования. Второй подход основан на непосредственном интегрировании по времени ГИУ нестационарной теплопроводности с разбиением всего промежутка времени процесса теплообмена на последовательность временных шагов. Для численного решения ГИУ при этом используются две различные шаговые по времени схемы [11]: 1) каждый шаг решения по времени рассматривается как новая задача, и ввиду этого в конце каждого шага вычисляются значения температуры во внутренних точках области, которые используются как начальные значения для следующего шага по времени; 2) процесс интегрирования по времени всегда начинается с начального момента времени, и в процессе вычислений нужно хранить значения температуры и ее производных на границе тела для всех пройденных шагов по времени, а также соответствующие матрицы в дискретном представлении ГИУ. При такой схеме расчета не требуется вычислять значения температуры во внутренних точках области на каждом шаге по времени. В данной работе численное решение ГИУ нестационарной задачи теплопроводности выполняется посредством прямого интегрирования по времени с использованием второго типа шаговой схемы. Результаты решения задачи теплопроводности являются исходными данными для решения квазистатической несвязанной задачи термоупругости для тел с трещинами, с учетом связей между поверхностями трещины.

### ГИУ: теплопроводность и термоупругость

Для нестационарной задачи теплопроводности ГИУ для однородного тела или подобласти составной конструкции имеет вид [11]:

$$C(p) T(p, t_f) = K \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} [G(p, q, t_f, t) \psi(q, t) - F(p, q, t_f, t) T(q, t)] d\Gamma(q) dt - \int_V G(p, q, t_f, t_0) T_0(q, t_0) dV(q), \quad (1)$$

где  $K$  — коэффициент температуропроводности материала,  $T(q, t)$  — температура на границе тела и  $\psi(q, t) = \partial T(q, t) / \partial n$  — производная температуры по направлению внешней нормали к границе тела,  $t$  — время,  $t_0$  и  $t_f$  — начальный и конечный моменты времени, параметр  $C(p)$  зависит от локальной геометрии в точке  $p$ , последнее слагаемое в (1) учитывает вклад начального распределения температур  $T_0(q, t_0)$ .

Фундаментальные решения для двумерной задачи нестационарной теплопроводности  $G(p, q, \tau)$  и  $F(p, q, \tau)$  в ГИУ (1) определяются как [11]:

$$G(p, q, \tau) = \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4K\tau}\right)}{4\pi K\tau}, \quad F(p, q, \tau) = \frac{\partial G(p, q, \tau)}{\partial n} = -r \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4K\tau}\right)}{8\pi(K\tau)^2}, \quad (2)$$

где  $\tau = t_f - t$ ,  $r \equiv r(p, q)$  — расстояние между точками  $p$  и  $q$ .

Если начальное распределение температуры в теле является стационарным, то объемный интеграл в ГИУ (1) можно преобразовать к сумме интегралов по поверхности тела. В случае постоянной начальной температуры тела  $T_0$  выполняем в ГИУ (1) замену  $\bar{T}(q, t) = T(q, t) - T_0$  и интеграл по объему тела исключается из ГИУ. Далее полагаем  $T(q, t) \equiv \bar{T}(q, t)$ .

Для несвязанной квазистатической задачи термоупругости без массовых сил ГИУ для однородного тела или подобласти составной конструкции не содержит интегралов по объему тела [12]:

$$C_{ij}(p) u_j(p, t_f) = \int_{\Gamma} [G_{ij}(p, q) t_j(q, t) - F_{ij}(p, q) u_j(q, t)] d\Gamma(q) - K \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} [Z_i(p, q, t_f, t) \psi(p, t) - R_i(p, q, t_f, t) T(q, t)] d\Gamma(q) dt, \quad i, j = 1, 2, \quad (3)$$

где  $u_j(q, t)$  и  $t_j(q, t)$  — перемещения и усилия в точке  $q$  на границе подобласти от воздействия термомеханических нагрузок, коэффициенты матрицы  $C_{ij}(p)$  зависят от локальной геометрии в точке  $p$ , функции  $G_{ij}(p, q)$  и  $F_{ij}(p, q)$  — фундаментальные решения Кельвина статической задачи теории упругости, а функции  $Z_i(p, q, t_f, t)$  и  $R_i(p, q, t_f, t)$  являются решениями для перемещений и усилий при действии точечного теплового источника. При решении задачи термоупругости последние два интеграла в ГИУ (3) определяют температурную нагрузку, зависящую от времени.

Для состояния плоской деформации имеем ( $\alpha$  — коэффициент теплового расширения,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\tau = t_f - t$ ) [12]:

$$Z_i(p, q, \tau) = \frac{\alpha(1-\nu)}{2\pi r(1+\nu)} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4K\tau}\right) \right] \frac{\partial r}{\partial x_i}, \quad R_i(p, q, \tau) = \frac{\partial Z_i(p, q, \tau)}{\partial n}. \quad (4)$$

При наличии в концевой области трещины связей между ее поверхностями ГИУ (3) дополняется законом деформирования связей в форме [13]

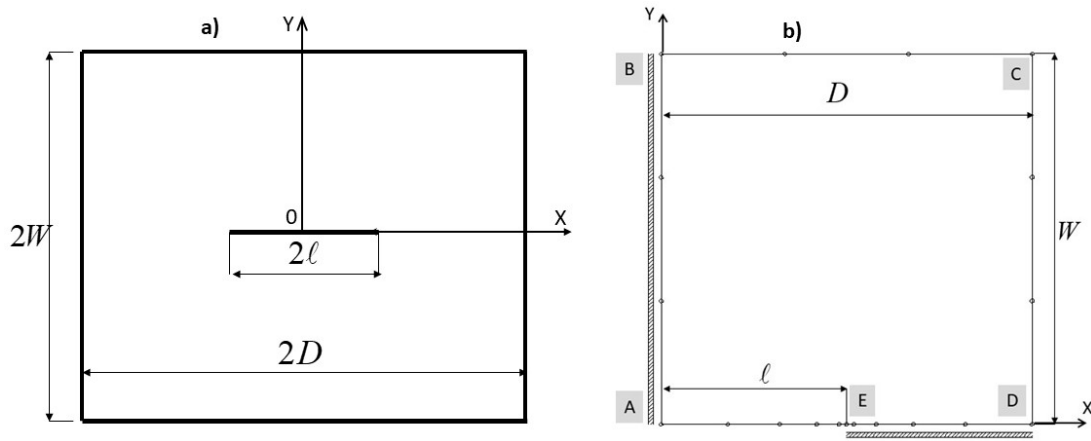
$$t_i(p, t) = \chi_i(p, t) \Delta u_i(p, t), \quad \chi_i(p, t) = \omega_i(p, t) \frac{E_b}{H}, \quad (5)$$

где  $i = 1, 2$  соответствует касательному и нормальному к плоскости трещины направлениям,  $t_i(p, t)$  и  $\Delta u_i(p, t)$  — компоненты вектора усилий и раскрытия трещины в локальной системе координат,  $\chi_i(p, t)$  — жесткость связей между поверхностями трещины,  $\omega_i(p, t)$  — безразмерная функция, зависящая от положения точки  $p$  вдоль концевой области трещины и времени нагружения,  $H$  — линейный размер, пропорциональный толщине зоны связей в концевой области трещины,  $E_b$  — эффективный модуль упругости связей.

### Методика численного решения ГИУ

Численное решение ГИУ (1) выполняется посредством прямого интегрирования по времени с использованием шаговой схемы второго типа. Полагаем, что начальная температура тела постоянна. В этом случае интеграл по объему тела не вычисляется. Используется кусочно-постоянная аппроксимация переменных задачи по времени: временной промежуток решения нестационарной задачи теплопроводности  $t_f$  (начальный момент времени  $t_0 = 0$ ) разбивается на  $N$  шагов равной длительности  $\Delta t = t_f/N$  и в пределах каждого шага температура  $T(q, t)$  и производная температуры по нормали к границе области  $\psi(q, t)$  полагаются постоянными. Для математического описания границы области при решении задачи теплопроводности используются линейные граничные элементы, на которых переменные задачи полагаются постоянными. Дискретизация границы тела и аппроксимация переменных позволяют заменить вычисление интегралов по всей границе области в ГИУ (1) суммой интегралов по совокупности элементов и получить дискретное представление ГИУ. Интегрирование по времени фундаментальных решений (2) выполняется аналитически. Интегрирование полученных выражений по пространственным координатам выполняется по квадратурным формулам Гаусса–Лежандра с учетом сингулярностей фундаментальных решений ГИУ (1) при вычислении интегралов по элементам, содержащим точку коллокации  $p$ .

Вклад температурной нагрузки в напряженно-деформированное состояние тела, определяемый последними двумя интегралами в (3), вычисляется на каждом шаге по времени в ходе решения задачи теплопроводности с учетом того, что температура и производная температуры постоянны в пределах каждого шага по времени, а также постоянны на каждом линейном граничном элементе. Интегрирование соответствующих выражений выполняется, как и при дискретизации ГИУ (1), аналитически по времени и численно — по пространственным координатам.



**Рис. 1.** Пластина с центральной трещиной,  $D/W = 1$ : а) расчетная область,  $2\ell$  — длина трещины; б) модель с учетом симметрии задачи,  $\ell/D = 0.5$ , 19 квадратичных граничных элементов

При решении ГИУ (3) квазистатической задачи термоупругости используются изопараметрические квадратичные граничные элементы и специальные квадратичные граничные элементы вблизи вершины трещины, учитывающие асимптотическое поведение перемещений и поверхностных усилий. Интегрирование фундаментальных решений  $G_{ij}(p, q)$  и  $F_{ij}(p, q)$  по граничным элементам в дискретном представлении ГИУ (3) выполняется численно. Дискретизация ГИУ (3), учет граничных условий и дополнительных условий между поверхностями трещины (5) позволяют получить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения узловых неизвестных задачи, см. описание методики в [13, 14]. Результаты вычисления интегралов функций (4), определяющих температурную нагрузку, учитываются при формировании правой части СЛАУ, получаемой для каждого шага по времени.

Для задач теплопроводности и термоупругости выполняется одинаковая дискретизация границы области. Ввиду этого при решении задачи теплопроводности  $M$  узлов на границе области соответствуют  $M$  линейным элементам с кусочно-постоянной аппроксимацией переменных, а в задаче термоупругости указанные  $M$  узлов определяют  $M/2$  квадратичных изопараметрических элементов на границе области. Для получения удовлетворительной точности результатов расчета в задаче термоупругости решение задачи теплопроводности выполняется с увеличенным числом узлов, которое определяется параметром дополнительного дробления границы  $M_u$  (четное число). При одинаковой начальной дискретизации границы области в обеих задачах ( $M$  узлов) и задании параметра  $M_u$  решение задачи теплопроводности выполняется с  $M \cdot M_u$  кусочно-постоянными элементами (число узлов также  $M \cdot M_u$ ) на границе области, а решение задачи термоупругости — с  $M/2$  квадратичными элементами на границе области ( $M$  узлов всего).

При решении квазистатической задачи термоупругости расчет напряженно-деформированного состояния тела выполняется для каждого временного шага, для которого получено решение задачи нестационарной теплопроводности и сформирован вектор термической нагрузки. При завершении расчета на каждом временном шаге по методике, рассмотренной в [13], определяются КИН, являющиеся функцией времени, которые вычисляются по значениям нормального раскрытия трещины  $\Delta u_n(t)$  в промежуточном узле квадратичного граничного элемента длины  $L$ , примыкающего к вершине трещины ( $E$  — модуль упругости материала,  $\beta = 1$  для плоского напряженного состояния,  $\beta = 1 - \nu^2$  — для плоской деформации):

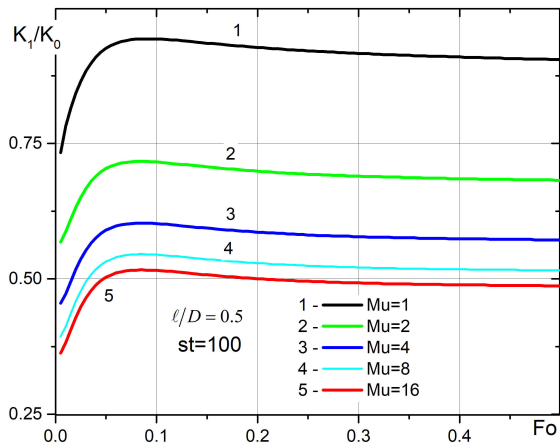
$$K_I(t) = \frac{E}{2\beta} \Delta u_n(t) \sqrt{\frac{2\pi}{L}}.$$

Методика численного решения ГИУ нестационарных задач теплопроводности и квазистатических термоупругости с трещинами реализована в пакете программ для ЭВМ.

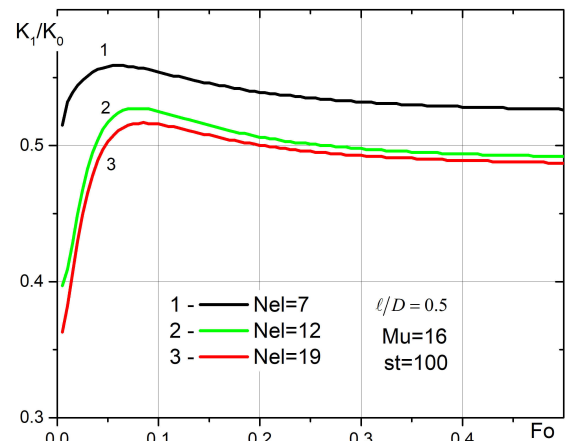
### Результаты расчетов

Для оценки точности разработанной методики численного решения ГИУ выполнен расчет КИН при температурном нагружении пластины с центральной прямолинейной трещиной, рис. 1а. Полагалось, что процесс теплообмена происходит на временном промежутке  $0 \leq Fo \leq 0.5$  ( $Fo = Kt/D^2$  —

число Фурье,  $t$  — время расчета). В начальный момент времени пластина и поверхность трещины имеют постоянную температуру  $T_1$ , на контуре пластины при  $|x| = D$ ,  $|y| \leq W$  и  $|y| = W$ ,  $|x| \leq D$  в процессе теплообмена поддерживается постоянная температура  $T_2 > T_1$ , а на поверхности трещины сохраняется температура  $T_1$ . При такой температурной нагрузке возникает КИН, соответствующий растягивающей нагрузке и, ввиду симметрии температурной и механической задач, расчет выполнен для четверти пластины ( $0 \leq x \leq D$ ,  $0 \leq y \leq W$ ), см. рис. 1б, где тонкие заштрихованные зоны  $AB$  и  $DE$  (эти обозначения только на рисунке, не являются частью модели) показывают участки границы модели, на которых задан нулевой тепловой поток в задаче теплопроводности и заданы нулевые перемещения по нормали к соответствующему участку границы, а также нулевые касательные усилия. На участках границы  $BC$  и  $CD$  задана температура  $T_2$ , а на поверхности трещины  $EA$  — температура  $T_1$ , указанные участки границы области свободны от внешних нагрузок. Решение задачи термоупругости

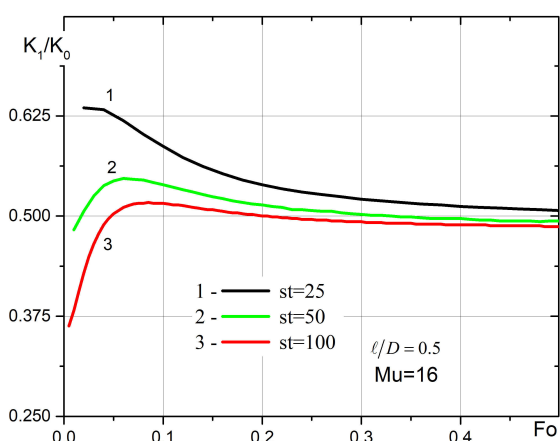


**Рис. 2.** КИН при изменении параметра дополнительного дробления границы  $Mu$ , 19 квадратичных элементов, число шагов по времени  $st = 100$

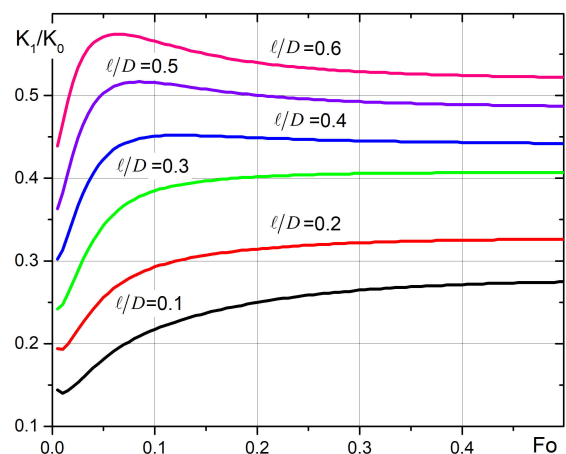


**Рис. 3.** КИН при изменении числа узлов  $M = 2 \cdot Nel$  в задаче термоупругости,  $Mu = 16$ , число шагов по времени  $st = 100$

получено для состояния плоской деформации, коэффициент Пуассона материала  $\nu = 0.3$ . Нормирование значений КИН выполнено величиной  $K_0 = \alpha E (T_2 - T_1) \sqrt{W}$ , где  $E$  — модуль упругости материала. Для оценки влияния числа узлов на границе области при решении задачи теплопроводности на точ-



**Рис. 4.** КИН при изменении числа шагов по времени в задаче теплопроводности,  $Mu = 16$ ,  $Nel = 19$

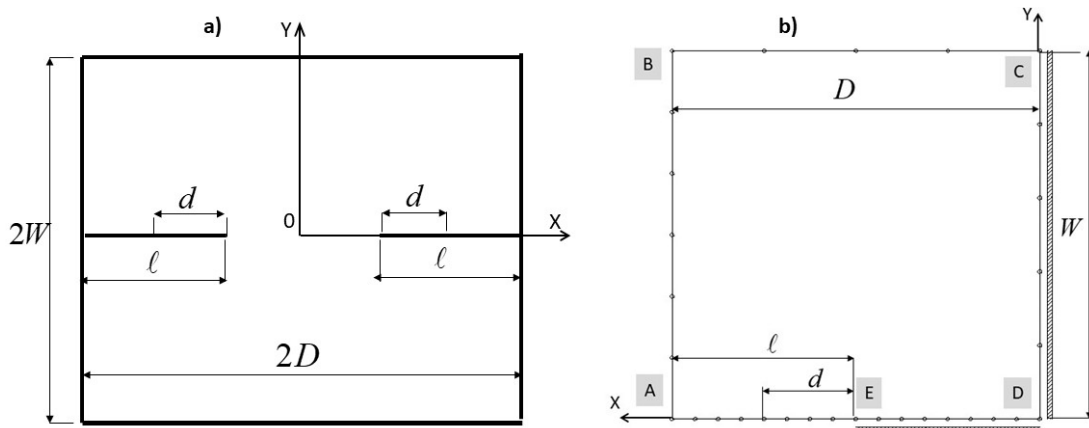


**Рис. 5.** КИН при изменении относительной длины трещины  $l/D$ ,  $Mu = 16$ ,  $Nel = 19$ , число шагов по времени  $st = 100$

ность решения задачи термоупругости выполнены расчеты для ряда значений параметра  $Mu$ , см. рис. 2. Имеется быстрая сходимость результатов расчета к известному решению [3], погрешность расчета при  $Mu = 8$  не превышает 5%. Оценка влияния на точность расчетов числа элементов при решении задачи

термоупругости выполнена при  $Mu = 16$ . Количество квадратичных граничных элементов  $Nel > 12$  обеспечивает достаточную точность решения, см. рис. 3. Влияние числа шагов по времени  $st$  при решении задачи теплопроводности на точность решения задачи термоупругости рассмотрено при  $Nel = 19$  квадратичных элементах на границе области и  $Mu = 16$ . Удовлетворительная точность результатов расчета обеспечивается при выборе 50 – 100 шагов по времени, см. рис. 4. Зависимости КИН от относительного времени теплообмена  $Fo = Kt/D^2$  для трещин различной длины ( $\ell/D = 0.1 - 0.6$ , обозначения см. рис. 1b) приведены на рис. 5. Имеется удовлетворительное соответствие с результатами работ [3, 5, 6].

В качестве примера влияния нестационарных температурных полей на КИН для трещины со связями в концевой области рассмотрена задача для пластины шириной  $2D$  и высотой  $2W$  с двумя краевыми трещинами длины  $\ell$ , заполненными линейно-упругими связями, рис. 6а, ( $D/W = 1, D/\ell = 2, D = 10$  мм, состояние плоской деформации). Материал пластины – керамика ( $Al_2O_3$ ) с физико-механическими свойствами: модуль упругости  $E = 360$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.2$ , коэффициент температуропроводности  $K = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , коэффициент линейного расширения  $\alpha = 8 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ . В начальный момент времени ( $t = 0$ ) пластина имеет постоянную температуру  $T_1$ . Начиная с момента времени  $t > 0$  боковые поверхности пластины  $|x| = D$  поддерживаются при температуре  $T_2$ , меньшей, чем  $T_1$ . Расчеты тепловых полей и температурных напряжений выполнялись ввиду симметрии задачи для 1/4 пластины  $-D \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq W$ , см. рис. 6б. Граничные условия: на участке  $AB$  задана температура  $T_2$ , а на участках  $BC, CD, DE$  и  $EA$  задан нулевой тепловой поток; тонкие заштрихованные зоны  $CD$  и  $DE$  показывают участки границы, на которых заданы нулевые нормальные перемещения, а также нулевые касательные усилия; участки границы области  $AB$  и  $BC$  свободны от внешних нагрузок. При учете связей между поверхностями трещины на участке концевой области трещины  $-D + \ell - d \leq x < -D + \ell$  выполняются условия (5), остальная часть трещины  $EA$  свободна от внешних нагрузок.



**Рис. 6.** Пластина с двумя краевыми трещинами,  $D/W = 1$ : а) расчетная область,  $\ell$  – длина трещины,  $d$  – концевая область трещины; б) модель с учетом симметрии задачи,  $\ell/D = 0.5$ ,  $d/\ell = 0.5$ , 31 квадратичный граничный элемент

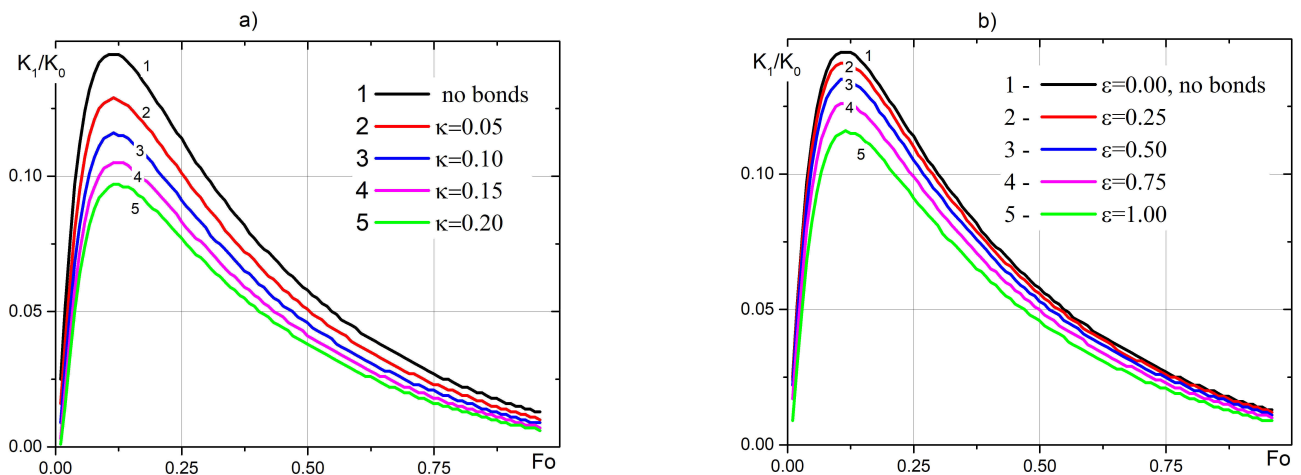
Расчет выполнен при  $\Delta T = T_1 - T_2 = 50 \text{ К}$  для пластины с трещинами без связей и при наличии трещин с различным размером концевой области, заполненной связями. Полагалось, что компонента жесткости связей, соответствующая касательному к плоскости трещины направлению,  $\chi_1(p, t)$  равна нулю и  $\omega_2(p, t) = 1$ , см. выражение (5). Нестационарное температурное поле является причиной возникновения в пластине нормальных напряжений, раскрывающих трещину. Наличие связей между поверхностями трещины сдерживает ее раскрытие при термической нагрузке. Выполнено параметрическое исследование влияния жесткости связей в концевой области трещины на величину КИН. Для нормировки и представления результатов использованы следующие значения:

$$K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell}, \quad \sigma_0 = \frac{\alpha E (T_1 - T_2)}{1 - \nu}, \quad \kappa = \frac{E_b \ell}{HE}, \quad (6)$$

где  $\kappa$  – относительная жесткость связей в направлении, нормальном к плоскости трещины. Изменение относительной жесткости связей выполнялось при вариации параметра  $H$  в (6), полагая, что  $E_b = E$ .

Зависимости нормированного термического КИН  $K_I/K_0$  от безразмерного времени  $Fo$  для трещины, заполненной связями ( $d/\ell = 1$ ), при различных значениях относительной жесткости связей  $\kappa$  приведены на рис. 7а в сопоставлении с расчетом при отсутствии связей между поверхностями трещины ( $\kappa = 0$ ). Результаты, полученные при постоянной относительной жесткости связей  $\kappa = 0.1$ , и вариации размера концевой области трещины  $\varepsilon = d/\ell$  в диапазоне  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  приведены на рис. 7б, где  $\varepsilon = 0$  соответствует трещине без связей.

В рассматриваемой задаче экстремум КИН достигается на начальном этапе процесса теплообмена. Заметное влияние изменения жесткости связей между поверхностями трещины на КИН имеется при  $0.1 < Fo < 0.5$ , причем наибольший эффект наблюдается на этапе достижения экстремума КИН. Возрастание суммарной жесткости связей  $d(E_b/H)$  между поверхностями трещины за счет уменьшения параметра  $H$  (рис. 7а) или при увеличении длины концевой области (рис. 7б) приводит к нелинейному снижению КИН. Для трещины, заполненной связями, при возрастании жесткости связей относительное изменение КИН снижается (рис. 7а), а при увеличении длины концевой области и неизменной жесткости связей относительное изменение КИН возрастает (рис. 7б). Граничные условия задач теплопроводности и термоупругости определяют, что при выходе на стационарный режим термический КИН стремится к нулю, независимо от жесткости связей и размера концевой области трещины.



**Рис. 7.** Зависимость КИН от времени нагрева, длина трещины  $\ell/D = 0.5$ : а) трещина, заполненная связями,  $d/\ell = 1$ ; б) частичное заполнение трещины связями,  $\varepsilon = d/\ell$ ,  $\kappa = 0.1$

### Заключение

В работе приведена методика численного решения задач нестационарной теплопроводности и несвязанной квазистатической термоупругости методом граничных интегральных уравнений. Предложен алгоритм расчета при использовании кусочно-постоянных и квадратичных граничных элементов при одинаковой дискретизации границы области в задачах теплопроводности и термоупругости. Исследовано влияние точности решения задачи нестационарной теплопроводности на результаты расчета КИН при тепловом нагружении. Показана эффективность применения ГИУ при расчете КИН от нестационарного теплового нагружения на модели трещины со связями в концевой области. Разработанный пакет программ может быть использован для решения научных и прикладных задач теплопроводности и термоупругости с трещинами при нестационарном тепловом нагружении.

### ЛИТЕРАТУРА


- Emery A. F., Neighbors P. K., Kobayashi A. S., Love W. J. Stress Intensity Factors in Edge-Cracked Plates Subjected to Transient Thermal Singularities. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 1977;99(1):100–5. DOI: 10.1115/1.3454491.
- Hellen T. K., Cesari F., Maitan A. The Application of Fracture Mechanics in Thermally Stressed Structures. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1982;10(3):181–204. DOI: 10.1016/0308-0161(82)90032-1.

3. Emmel E., Stamm H. Calculation of Stress Intensity Factors of Thermally Loaded Cracks Using the Finite Element Method. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1985;19(1):1–17. DOI: 10.1016/0308-0161(85)90050-X.
4. Tanaka M., Togoh H., Kikuta M. Boundary Element Method Applied to 2-D Thermoelastic Problems in Steady and Non-Steady States. *Engineering Analysis*. 1984;1(1):13–9. DOI: 10.1016/0264-682X(84)90005-4.
5. Raveendra S. T., Banerjee P. K. Boundary Element Analysis of Cracks in Thermally Stressed Planar Structures. *International Journal of Solids and Structures*. 1992;29(18):2301–17. DOI: 10.1016/0020-7683(92)90217-H.
6. Prasad N. N. V., Aliabadi M. H., Rooke D. P. The Dual Boundary Element Method for Transient Thermoelastic Crack Problems. *International Journal of Solids and Structures*. 1996;33(19):2695–718. DOI: 10.1016/0020-7683(95)00183-2.
7. Keppas L. K., Anifantis N. K. Boundary Element Analysis of Cracked Homogeneous or Bi-Material Structures under Thermo-Mechanical Cycling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010;199(49):3345–55. DOI: 10.1016/j.cma.2010.07.006.
8. Ekhlakov A. V., Khay O. M., Zhang C., Sladek J., Sladek V. A BDEM for Transient Thermoelastic Crack Problems in Functionally Graded Materials under Thermal Shock. *Computational Materials Science*. 2012;57:30–7. DOI: 10.1016/j.commatsci.2011.06.019.
9. Chung Y. L., Lee K. L. Evaluation of Thermal Stress Intensity Factors of an Interface Crack in FGMs with Varying Thermal Expansion Coefficient by Multi-Region BEM. *Mechanics of Materials*. 2025;203:105266. DOI: 10.1016/j.mechmat.2025.105266.
10. Rizzo F. J., Shippy D. J. A Method of Solution for Certain Problems of Transient Heat Conduction. *AIAA Journal*. 1970;8(11):2004–9. DOI: 10.2514/3.6038.
11. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary Element Techniques — Theory and Applications in Engineering*. Berlin: Springer-Verlag; 1984.
12. Sládek V., Sládek J. Computation of Thermal Stresses in Quasistatic Non-Stationary Thermoelasticity Using Boundary Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1989; 28(5):1131–44. DOI: 10.1002/nme.1620280510.
13. Perelmuter M. Boundary Element Analysis of Structures with Bridged Interfacial Cracks. *Computational Mechanics*. 2013;51(4):523–34. DOI: 10.1007/s00466-012-0817-4.
14. Perelmuter M. Analysis of Interaction of Bridged Cracks and Weak Interfaces. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018;149:349–60. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.10.011.

## ТРАЕКТОРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ РОБОТА С ПОМОЩЬЮ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

**Н. В. Плотникова**

*Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет),  
г. Челябинск, Российская Федерация*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9164-8723>,  [plotnikovanv@susu.ru](mailto:plotnikovanv@susu.ru)*

*Аннотация:* задача планирования траектории заключается в определении заданного закона изменения положений степеней свободы робота за определенный промежуток времени. Движение будет заключаться в последовательном прохождении конкретных точек позиционирования, причем перемещаться по указанным координатам будут либо звенья манипулятора (при задании точек в пространстве обобщенных координат), либо его схват (при задании их в декартовом пространстве). Для построения гладкой траектории можно применить интерполяционные полиномы: такой подход позволяет сформировать простую систему линейных уравнений, легко поддающихся решению. Еще один способ получения гладкой траектории заключается в применении нескольких многочленов, соединяемых определенным образом.

Тем не менее, если величины обобщенных координат, скоростей и ускорений заданы в начальных и конечных точках траектории, то может оказаться, что матрица формируемой системы линейных уравнений будет вырожденной, вследствие чего искомое решение может не существовать. При увеличении числа промежуточных точек траектории увеличивается степень используемого многочлена, что, в свою очередь, создает проблемы при расчете его значений в каждой отдельной точке из-за существенного роста вычислительной нагрузки. Устранить недостаток, связанный с большими объемами вычислений, можно, применяя сплайн-функции. Согласно теоретическим расчетам образующаяся система уравнений гарантированно имеет решение и эффективно решается методом прогонки.

*Ключевые слова:* планирование траектории робота, сплайн-аппроксимация.

*Для цитирования:* Плотникова Н. В. Траекторное планирование робота с помощью сплайн-функций. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):95–100.


*Поступила в редакцию:* 14.10.2025.

*В окончательном варианте:* 14.11.2025.

## ROBOT PATH PLANNING USING SPLINE FUNCTIONS

**N. V. Plotnikova**

*South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russian Federation*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9164-8723>,  [plotnikovanv@susu.ru](mailto:plotnikovanv@susu.ru)*

*Abstract:* we studied the problem of robot path planning, which determines how the robot's degrees of freedom change over time. The robot moves by passing through specified points, either with its joints (when points are given in joint space) or with its end-effector (when points are given in Cartesian space). We constructed smooth paths using interpolation polynomials, which produce simple linear systems that are easy to solve. We also explored using multiple polynomials connected in sequence to generate smooth paths.

We found that specifying joint positions, velocities, and accelerations at the start and end points can make the linear system degenerate, preventing a solution from existing. Increasing the number of intermediate points requires higher-degree polynomials, which significantly increases the computational load when calculating values at each point. We addressed this issue by using spline functions, which guarantee that the system of equations has a solution and can be efficiently solved using the sweep method.

*Keywords:* robot path planning, spline approximation.

*Cite this article:* Plotnikova N. V. Robot Path Planning Using Spline Functions. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):95–100.

*Original article submitted:* 14.10.2025.

*Revision submitted:* 14.11.2025.

При проектировании траекторий движений роботов используются разнообразные подходы и методики, в которых применяются графы, генетические алгоритмы, методы потенциальных полей или алгоритмы роя частиц [1–6].

Они большей частью ориентированы на движение мобильных роботов в пространстве с препятствиями либо в условиях движения нескольких роботов.

Рассмотрим процедуру кинематического управления роботом-манипулятором. Ее реализация возможна в два этапа. Первый этап включает разработку траектории, то есть предварительное задание программы перемещения звеньев робота  $q^*(t)$  в пределах определенного временного интервала  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ .

Второй этап подразумевает непосредственную обработку запланированной траектории приводами сочленений. Это типично для позиционных систем управления, где перемещение робота осуществляется путем последовательного прохождения определенных точек позиционирования либо непосредственно звеньями робота (если координаты заданы в пространстве обобщенных координат), либо рабочим органом (схватом) робота (при задании координат в трехмерном декартовом пространстве).

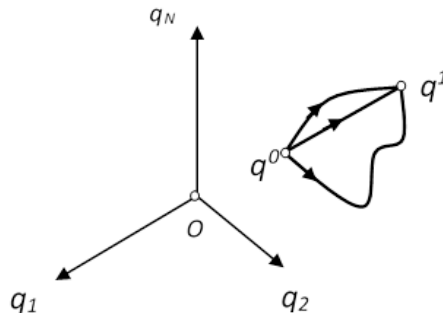
Проанализируем первый этап кинематического управления с точки зрения задачи математического программирования.

Планирование траектории представляет собой процедуру нахождения программного движения либо звеньев манипулятора  $q^*(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , либо его схвата  $s^*(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Методы, которые используются для этого, имеют много общего, но отличия обуславливают необходимость их отдельного рассмотрения.

1. Рассмотрим задачу перевода манипулятора из одной точки  $q^i$  в другую точку  $q^{i+1}$  в пространстве обобщенных координат  $Q = q^1 \times q^2 \times \dots \times q^N$ , где  $N$  — число звеньев манипулятора. Задача заключается в определении траектории  $q = q(t)$ ,  $t \in [t_n, t_k]$  с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} q(t_n) &= q^n, \\ q(t_k) &= q^k. \end{aligned}$$

При отсутствии каких-либо дополнительных условий или ограничений подобная задача допускает бесконечное множество вариантов решения (рис. 1).



**Рис. 1.** Перевод манипулятора из точки в точку в пространстве обобщенных координат

Если манипулятор начинает движение из состояния покоя либо должен остановиться в конечной точке, то при реализации закона движения по прямой возможны разрывы первого и второго рода в начальный и конечный моменты времени для скоростей и ускорений звеньев. С физической точки зрения это приводит к тому, что со стороны приводов к звеньям манипулятора нужно будет прикладывать бесконечно большие моменты или силы.

Применение специальной параметризации позволяет реализовать перемещение манипулятора по прямой линии с желаемой меняющейся скоростью, обеспечивающей равномерное и плавное прохождение всей траектории.

2. Альтернативный метод планирования траектории из одной точки в другую, отвечающей критериям гладкости, предусматривает применение интерполяционных многочленов более высокой степени относительно тех, что рассмотрены далее.

Обозначим обобщенную координату  $i$ -го звена манипулятора через  $q$ , и пусть известны ее значения в начальной и конечной точках временного отрезка  $[t_n, t_k]$ :

$$\begin{aligned} q(t_n) &= q^n, \\ q(t_k) &= q^k. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть на концах рассматриваемого отрезка  $[t_n, t_k]$  действуют следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t_n) = \dot{q}(t_k) = 0 \\ \ddot{q}(t_n) = \ddot{q}(t_k) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Ограничениям (1), (2) удовлетворяет многочлен пятой степени

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5. \quad (3)$$

Положим  $t_n = 0$ ,  $t_k = T$  и для нахождения коэффициентов полинома (3) составим систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} a_0 = q_0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 T + 3a_3 T^2 + 4a_4 T^3 + 5a_5 T^4 = 0, \\ a_2 + 6a_3 T + 12a_4 T^2 + 20a_5 T^3 = 0, \end{cases}$$

которая может быть легко разрешима.

Возможно вместо одного многочлена применить несколько, соединяемых так, чтобы итоговая траектория имела необходимую степень гладкости.

Иногда, когда известна информация о начальных и конечных значениях обобщенных координат, скоростей и ускорений, матрица полученной системы линейных уравнений может стать вырожденной, и в таком случае решение этой системы может отсутствовать.

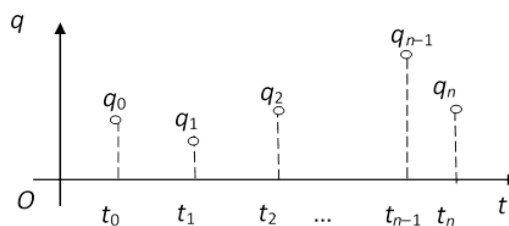
При перемещении манипулятора между точками в пространстве обобщенных координат (рис. 2) он должен попасть в момент времени  $t_i$  в каждую точку  $q_i$ :

$$q(t_i) = q_i. \quad (4)$$

При этом неважно, как (с какой скоростью) движется манипулятор через внутренние точки  $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ , но имеет значение выполнение условий для скоростей и ускорений в начальной и конечной точках  $q_0$  и  $q_n$ :

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 = a_1, \quad \ddot{q}_0 = b_1, \\ \dot{q}_n = a_2, \quad \ddot{q}_n = b_2, \end{aligned}$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — заданные векторы.



**Рис. 2.** Движение по точкам в пространстве обобщенных координат

Если в начале и в конце движения по траектории манипулятор находится в состоянии покоя, то задача определения траектории в пространстве обобщенных координат  $Q$  может быть решена с помощью интерполяционных многочленов степени  $n$  (если отсутствуют дополнительные ограничения для концов траектории) или степени  $n + 4$  (при наличии таких ограничений).

Однако, если количество точек велико, возрастает и степень многочлена, что усложняет процесс расчета его значений в каждой точке из-за большого объема вычислений. Для преодоления этой проблемы целесообразно применять сплайн-функции.

На каждом из отрезков траектории  $[a, b]$  (необязательно равноотстоящих) функции  $q(x), q'(x), \dots, q^{(m-1)}(x)$  должны быть непрерывными и сама функция  $q(x)$  должна иметь вид многочлена со степенью не больше  $m$ .

Если применить кубическую сплайн-интерполяцию, функция  $q(x)$  будет описываться многочленом:

$$q(x) = a_0^k + a_1^k x + a_2^k x^2 + a_3^k x^3, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

В этом случае количество неизвестных будет равно  $4n$ :  $a_j^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ;  $j = 0, 1, 2, 3$ .

Из условий непрерывности функции и ее производных можно получить  $n+1$  и  $3(n-1)$  уравнений, поэтому есть еще два дополнительных ограничения, которые могут быть наложены на функцию и которые будут указаны далее.

Если планируется циклическое повторение движений манипулятора, т. е. последовательность точек  $\{q_i\}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , которая аппроксимирует некоторый контур, должна быть пройдена манипулятором несколько раз так, что начало и конец траектории совпадают, т. е.  $q_0 = q_n$ , тогда необходимо наложить условие замкнутости траектории по скоростям и ускорениям:

$$\dot{q}_0 = \dot{q}_n, \quad \ddot{q}_0 = \ddot{q}_n.$$

Реализуя метод сплайн-функций, можно получить, что на рассчитанной траектории  $q(t)$  ряд составляющих векторов  $q$ , скоростей  $\dot{q}$  и ускорений  $\ddot{q}$  будет больше допустимых значений максимальных скоростей и ускорений  $\dot{Q}_i^{\max}$ ,  $\ddot{Q}_j^{\max}$ , которые могут обеспечить звенья манипулятора.

Учесть ограничения на скорости и ускорения можно в виде следующих неравенств:

$$\max |\dot{q}_i(t)| \leq \dot{Q}_i^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

$$t_0 \leq t \leq t_n,$$

$$\max |\ddot{q}_i(t_k)| \leq \ddot{Q}_i^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

В качестве целевой функции можно принять время обхода  $T = t_n - t_0$  манипулятором заданной совокупности точек.

Построим на отрезке  $[x_k, x_{k+1}]$  кубический сплайн. Для функции  $q(x)$  вторая производная будет иметь следующий вид

$$q''(x) = q''_{k+1} \frac{x - x_k}{h_k} - q''_k \frac{x - x_{k+1}}{h_k}, \quad (8)$$

где  $h_k = x_{k+1} - x_k$ , а  $q''_i = q''(x_i)$  — неизвестные значения вторых производных сплайна, взятых в узловых точках, а так как функция  $q''(x)$  непрерывна, то не нужно указывать, с какой стороны взяты эти производные. Проинтегрируем дважды выражение (8), получим:

$$q'(x) = q'_k + \int_{x_k}^x q''(t) dt = q'_k + \frac{(x - x_k)^2}{2h_k} q''_{k+1} - \frac{(x - x_{k+1})^2}{2h_k} q''_k + \frac{h_k}{2} - q''_k \quad (9)$$

$$q(x) = q_k + \int_{x_k}^x q'(t) dt = q_k + (x - x_k) q'_k + \frac{(x - x_k)^2}{6h_k} q''_{k+1} - \left[ \frac{(x - x_{k+1})^2}{6h_k} + \frac{h_k}{6} - (x - x_k) \frac{h_k}{2} \right] q''_k, \quad (10)$$

$q'_i, q''_i$  — являются неизвестными величинами, которые следует найти далее.

Положив в выражении (10)  $x = x_{k+1}$ , получим:

$$q_{k+1} = q_k + h_k q'_k + \frac{h_k^2}{6} q''_{k+1} - \frac{h_k^2}{3} q''_k. \quad (11)$$

Отсюда находим

$$q'_k = \frac{q_{k+1} - q_k}{h_k} - \frac{h_k^2}{6} q''_{k+1} + \frac{h_k^2}{3} q''_k. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), можно заметить, что сплайн  $q(x)$  будет полностью определяться значениями его вторых производных в узлах  $q''_k, q''_{k+1}$ . Поэтому, определив эти неизвестные, мы решим задачу поиска сплайна. Подставив выражение (12) в (9), получаем:

$$q'(x) = \frac{q_{k+1} - q_k}{h_k} - \frac{h_k^2}{6} q''_{k+1} + \frac{(x - x_k)}{2h_k} q''_{k+1} - \frac{(x - x_{k+1})}{2h_k} q''_k + \frac{h_k^2}{3} q''_k. \quad (13)$$

Выражения (8)–(13) справедливы для  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ . Применяя теперь соотношение (13) к отрезку  $[x_{k-1}, x_k]$ , имеем:

$$q'(x) = \frac{q_k - q_{k-1}}{h_{k-1}} - \frac{h_{k-1}}{6} q_k'' + \frac{(x - x_{k-1})^2}{2h_{k-1}} q_k'' - \frac{(x - x_k)}{2h_{k-1}} q_{k-1}'' + \frac{h_{k-1}^2}{6} q_{k-1}''.$$

Подставляя в последнее выражение  $x = x_k$ , получаем:

$$q'_k = \frac{q_k - q_{k-1}}{h_{k-1}} + \frac{h_{k-1}}{3} q_k'' + \frac{h_{k-1}}{6} q_{k-1}''.$$
 (14)

Сравнивая выражения (12) и (14), видим, что:

$$\frac{q_{k+1} - q_k}{h_k} - \frac{q_k - q_{k-1}}{h_{k-1}} = \frac{h_k}{6} q_{k+1}'' + \frac{h_k + h_{k-1}}{3} q_k'' + \frac{h_{k-1}}{6} q_{k-1}''.$$

Откуда следует, что:

$$\alpha_k q_{k+1}'' + 2q_k'' + (1 - \alpha_k) q_{k-1}'' = M_k,$$
 (15)

где

$$\alpha_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k-1}},$$
 (16)

$$M_k = 6 \frac{\frac{q_{k+1} - q_k}{h_{k+1}} - \frac{q_k - q_{k-1}}{h_k}}{h_{k+1} + h_k}.$$
 (17)

Уравнение (15) можно записать для  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 q_2'' + 2q_1'' + (1 - \alpha_1) q_0'' &= 6f(x_0, x_1, x_2), \\ \alpha_2 q_3'' + 2q_2'' + (1 - \alpha_2) q_1'' &= 6f(x_1, x_2, x_3), \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1} q_n'' + 2q_{n-1}'' + (1 - \alpha_{n-1}) q_{n-2}'' &= 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$
 (18)

Тем самым получаем систему линейных уравнений порядка  $(n - 1)$  относительно  $n + 1$  неизвестных  $q_0'', q_1'', \dots, q_n''$ . Очевидно, что система уравнений (18) всегда будет иметь решение. Если выбрать произвольно  $q_0'' = x, q_1'' = y$ , то из первого уравнения можно определить  $q_2''$ , это значение подставить затем в остальные уравнения. Далее операция повторяется до тех пор, пока не будет найдено  $q_n''$  из последнего уравнения. Отсюда можно сделать вывод о существовании решения и его зависимости от двух произвольно выбранных параметров  $x$  и  $y$ .

Найдем решение системы (18). Зададимся значениями  $\ddot{q}_0$  и  $\ddot{q}_n$ , т. е. будем полагать, что на концах отрезка  $[a, b]$  значения вторых производных известны. Тогда имеем систему из  $(n - 1)$  уравнений с  $(n - 1)$  неизвестными вида:

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{z},$$
 (19)

где  $\mathbf{C}$  — матрица  $(n - 1) \times (n - 1)$ :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 - \alpha_2 & 2 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - \alpha_{n-1} & 2 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{z}$  — вектор, элементы которого и нужно определить:

$$\mathbf{z} = (q_1'', q_2'', \dots, q_{n-1}'')^T.$$
 (20)

Матрицы, имеющие такой вид, называются ленточными, или матрицами Якоби, и для их обращения можно использовать специальный метод — рекуррентный метод прогонки.

Заметим, что для аппроксимации функций, которые не обладают достаточной степенью гладкости, часто используют именно сплайны.

### Использование сплайн-функций при планировании траектории

Метод формирования интерполяционных многочленов в форме кубического сплайна применим для разработки траектории в пространстве обобщенных координат. Как отмечалось ранее, основная цель состоит в создании плавной траектории  $q(t)$  в указанном пространстве, проходящей через заданные узловые точки  $q(t_i) = q_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , такой, чтобы на концах траектории дополнительно выполнялись соотношения  $\dot{q}_0 = \mathbf{a}_1$ ,  $\ddot{q}_0 = \mathbf{b}_1$ ,  $\dot{q}_n = \mathbf{a}_2$ ,  $\ddot{q}_n = \mathbf{b}_2$ , где  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  — заданные векторы.

1. Для построения сплайна применяется метод прогонки, реализация которого осуществляется посредством обратной рекурсии.

2. При планировании циклически повторяющихся движений манипулятора необходимо накладывать условие замкнутости траектории:

$$\dot{q}_0 = \dot{q}_n, \quad \ddot{q}_0 = \ddot{q}_n.$$

Система линейных уравнений также решается методом прогонки.

3. Реализация метода сплайн-функций для траекторного планирования может привести к тому, что ряд составляющих векторов скоростей и ускорений будет превышать некоторые допустимые значения (определяемые возможностями приводов манипулятора). Поскольку изменения ускорений носят линейный характер, то экстремальное значение достигается в точках, лежащих на границах отрезка, то есть в узловых точках.

Поскольку скорость зависит от времени квадратично, то для нахождения экстремума нужно дополнительно оценить значение скорости и во внутренних точках отрезка.

Ограничения на скорости и ускорения определяются условиями (6), (7), обеспечить выполнение этих условий возможно, изменив разбиение отрезка  $[t_0, t_n]$ , например, увеличив тот отрезок времени, где нарушаются эти ограничения (при этом будет увеличиваться время  $T = t_n - t_0$  обхода роботом заданного набора точек). Можно использовать и другой способ — минимизировать время обхода и выбрать такое разбиение  $\{t_i\}$ , при котором ограничения (6), (7) будут выполняться.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Головин В. А., Яковлев К. С. Прimitives движения робота в задаче планирования траектории с кинематическими ограничениями. *Информатика и автоматизация*. 2023;6:1354–1386. DOI: 10.15622/ia.22.6.4.
2. Лагузина Е. А. Обзор методов планирования траектории движения мобильных роботов. *Вестник науки*. 2025;1(6):1467–1475.
3. Павлов А. С. Методика планирования траектории движения группы мобильных роботов в неизвестной замкнутой среде с препятствиями. *Системы управления, связи и безопасности*. 2021;3:38–59. DOI: 10.24412/2410-9916-2021-3-38-59.
4. Hamdan N. et al. Study of Path Planning Methods in Two-Dimensional Mapped Environments. *International Conference on Interactive Collaborative Robotics*. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2023:137–155.
5. Huang H.-P., Chung S.-Y. Dynamic Visibility Graph for Path Planning. *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566)*. Sendai, Japan. 2004;3:2813–2818.
6. Pshikhopov V., Medvedev M. et al. Trajectory Planning Algorithms in Two-Dimensional Environment with Obstacles. *Informatics and Automation*. 2022;21(3):459–492. DOI: 10.15622/ia.21.3.1.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОЛГОВРЕМЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО РАЗВИТИЯ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ

Л. А. Прокудина

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет),  
г. Челябинск, Российская Федерация

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0793-7667>, ✉ [prokudinala@susu.ru](mailto:prokudinala@susu.ru)

*Аннотация:* представлена нелинейная математическая модель развития возмущений в жидкой пленке — нелинейное параболическое уравнение — для амплитуды огибающей спектрально узкого волнового пакета. Коэффициенты нелинейного параболического уравнения выражены через инкремент, частоту, а также их первые и вторые производные. По результатам вычислительных экспериментов в области неустойчивости жидкой пленки для умеренных чисел Рейнольдса выделены точки перегиба на кривой инкремента и гармоники максимального инкремента. Для волнового числа, соответствующего точке перегиба, скачкообразно меняется механизм нелинейного развития возмущений. В окрестности максимального инкремента коэффициенты при нелинейном члене нелинейного параболического уравнения отличны от нуля и практически сохраняют постоянное значение. Также по спектру волновых чисел наблюдается падение фазовой скорости до ее минимального значения в точке максимального инкремента. Амплитуды волнового пакета, возбужденного вблизи кривой нейтральной устойчивости, затухают.

*Ключевые слова:* жидкая пленка, неустойчивость, инкремент, фазовая скорость, волновой пакет, нелинейное параболическое уравнение.

*Для цитирования:* Прокудина Л. А. Математическое моделирование долговременного нелинейного развития и взаимодействия возмущений в жидкой пленке. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):101–105.

*Поступила в редакцию:* 16.10.2025.

*В окончательном варианте:* 19.11.2025.

## SIMULATION OF THE LONG-TERM NONLINEAR EVOLUTION AND INTERACTION OF DISTURBANCES IN A LIQUID FILM

L. A. Prokudina

South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russian Federation

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0793-7667>, ✉ [prokudinala@susu.ru](mailto:prokudinala@susu.ru)

*Abstract:* we present a nonlinear mathematical model describing the evolution of disturbances on a liquid film surface. The model is formulated as a nonlinear parabolic equation for the envelope amplitude of a narrow wave packet. The equation coefficients are expressed in terms of wave characteristics, including growth rate, frequency, and their first- and second-order derivatives.

Using calculations in the liquid film instability region, we identified inflection points of the growth rate and the wave numbers corresponding to the maximum growth rate for moderate Reynolds numbers. We show that the nonlinear evolution of disturbances changes abruptly at the wave numbers where the growth rate is maximal, while the equation coefficients remain nonzero and vary only slightly. We also demonstrate that the phase velocity reaches a minimum at the point of maximum growth rate. Wave packet amplitudes perturbed near the neutral stability point experience damping.

*Keywords:* liquid film, instability, increment, phase velocity, wave package, nonlinear parabolic equation.

*Cite this article:* Prokudina L. A. Simulation of the Long-Term Nonlinear Evolution and Interaction of Disturbances in a Liquid Film. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):101–105.

*Original article submitted:* 16.10.2025.

*Revision submitted:* 19.11.2025.

Для расчета и реализации течений жидких пленок (тонких слоев вязкой жидкости) [1, 2] в пленочных аппаратах различных отраслей промышленности [3–8] ставятся задачи исследования параметров волнового течения, возможности влияния на них различных физико-химических факторов. С другой стороны, современные технологии требуют развития теоретических и численных методов исследования нелинейных моделей, к которым относится математическая модель жидкой пленки.

Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений в жидкой пленке исследовано заданием волнового пакета, ширина полосы которого  $\Delta k = o(\varepsilon)$ . Выведено нелинейное параболическое уравнение для амплитуды огибающей волнового пакета (НПУ) [9]:

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} + i \frac{\partial \omega_i}{\partial k_x} \frac{\partial A}{\partial x_1} - \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x^2} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = \bar{\omega}_i A - (\beta_1 + i\beta_2) |A|^2 A, \quad (1)$$

где  $A$  — комплексная амплитуда огибающей волнового пакета;  $t_2, x_1$  — медленные переменные;  $\bar{\omega}_i$  — нелинейный инкремент,  $\beta_1$  характеризует нелинейное развитие возмущений,  $\beta_2$  характеризует зависимость фазы от амплитуды,  $k_x$  — волновое число.

Коэффициенты НПУ (1) выражены через первые и вторые производные частоты ( $\omega_r$ ) и инкремента ( $\omega_i$ ), для которых получено дисперсионное соотношение:

$$(\omega_r + i\omega_i)(a_7 k_x + i) + a_1 k_x^4 - a_4 i k_x^3 - a_6 k_x^2 + a_{11} i k_x = 0. \quad (2)$$

Учет различных физико-химических факторов, в частности, наличия высоких температур, нерастворимых поверхностно-активных веществ, движения газового потока над свободной поверхностью пленки, представлен в коэффициентах уравнения (2):

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\sigma Re}{3}, & a_4 &= -\frac{Re^2 F_x N}{2}, \\ a_6 &= -\frac{Re M}{2} + \frac{3}{40} Re^3 F_x (\tau_x + F_x), \\ a_7 &= \frac{5}{24} Re^2 F_x, & a_{11} &= -Re F_x - \tau_x Re, \end{aligned}$$

где  $Re$  — число Рейнольдса;  $F_x$  — число Фруда;  $\sigma$  — параметр поверхностного натяжения;  $N$  — параметр поверхностной вязкости;  $M$  — число Марангони;  $\tau_x$  — постоянное касательное напряжение.

Вычислительные эксперименты по расчету частоты, инкремента уравнения (2), а также фазовой скорости [10] представлены на рис. 1–3.

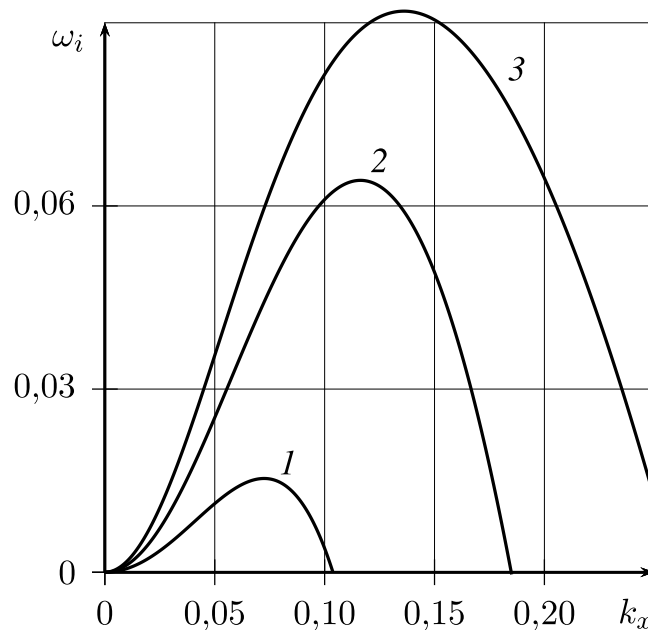
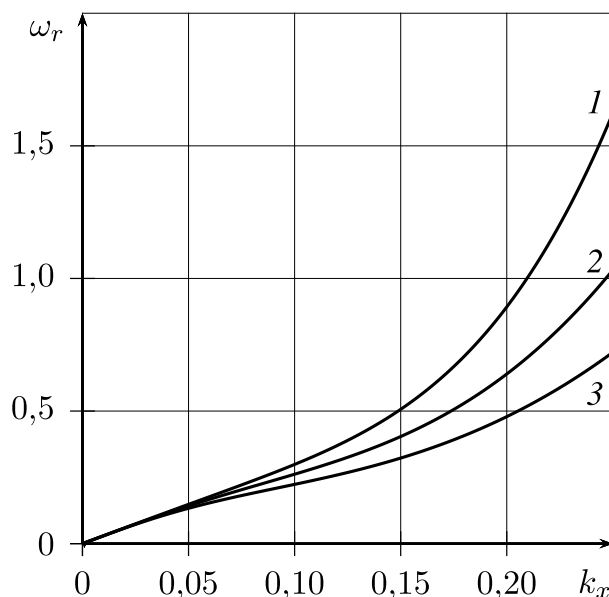
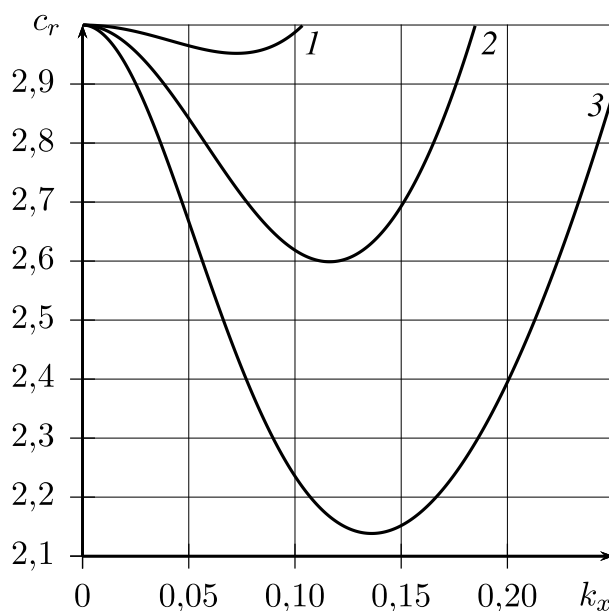


Рис. 1. Инкремент: 1 —  $Re = 5$ , 2 —  $Re = 10$ , 3 —  $Re = 15$

На кривой инкремента можно выделить три характерных точки (рис. 1): точку перегиба, точку максимального значения инкремента и точку, соответствующую положению кривой нейтральной устойчивости.



**Рис. 2.** Частота: 1 –  $Re = 5$ , 2 –  $Re = 10$ , 3 –  $Re = 15$



**Рис. 3.** Фазовая скорость: 1 –  $Re = 5$ , 2 –  $Re = 10$ , 3 –  $Re = 15$

Для более скоростных течений жидких пленок наблюдается снижение величин частоты (рис. 2) и фазовой скорости (рис. 3). Минимальное значение фазовой скорости соответствует режиму с максимальным значением инкремента.

Представим в (1) комплексную амплитуду  $A = U + iV$ , а производные по координате  $x$  – конечными разностями:

$$U'_j = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}, \quad V'_j = \frac{V_{j+1} - V_{j-1}}{2\Delta x},$$

$$U''_j = \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{\Delta x^2}, \quad V''_j = \frac{V_{j+1} - 2V_j + V_{j-1}}{\Delta x^2}$$

и перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dU_j}{dt} = dV_j' + d_1 U_j'' - d_2 V_j'' + \gamma U_j - (U_j^2 + V_j^2) (\beta_1 U_j - \beta_2 V_j), \\ \frac{dV_j}{dt} = -dU_j' + d_1 V_j'' + d_2 U_j'' + \gamma V_j - (U_j^2 - V_j^2) (\beta_1 V_j + \beta_2 U_j), \end{cases} \quad (3)$$

где  $j = 1, 2, \dots, 100$ .

Коэффициенты (3):  $d = \frac{\partial \omega_i}{\partial k_x}$ ,  $d_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2}$ ,  $d_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2}$ ,  $\gamma = \frac{\omega_i}{\varepsilon^2}$ .

Результаты вычислительных экспериментов по нелинейному развитию и взаимодействию возмущений, проведенных для режима свободного стекания вертикальной жидкой пленки воды, представлены на рис. 4–5 (• обозначены точки, соответствующие максимальному значению инкремента  $\omega_i$ , × — точки, соответствующие  $\omega_i = 0$ ). В точке перегиба на кривой инкремента скачкообразно меняется механизм нелинейного развития возмущений (рис. 4–5). В окрестности точек максимального инкремента и до кривой нейтральной устойчивости наблюдается плавное изменение величин  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , сохраняется характер нелинейного развития и взаимодействия возмущений, что связано с формированием достаточно устойчивой диссипативной структуры.

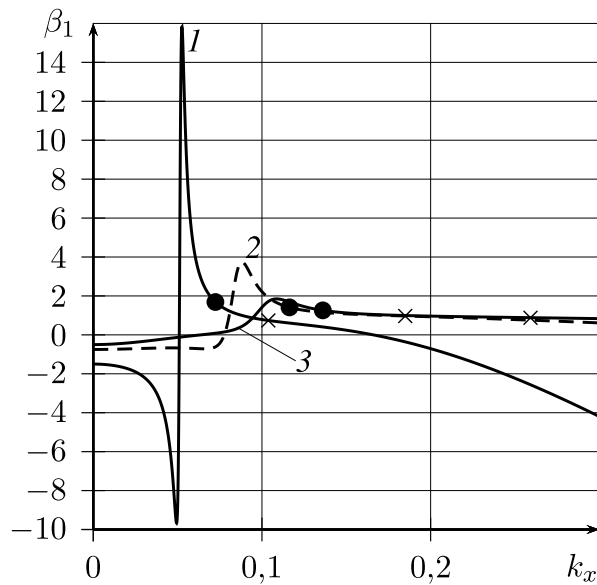


Рис. 4. Характер нелинейного развития возмущений. 1 —  $Re = 5$ , 2 —  $Re = 10$ , 3 —  $Re = 15$

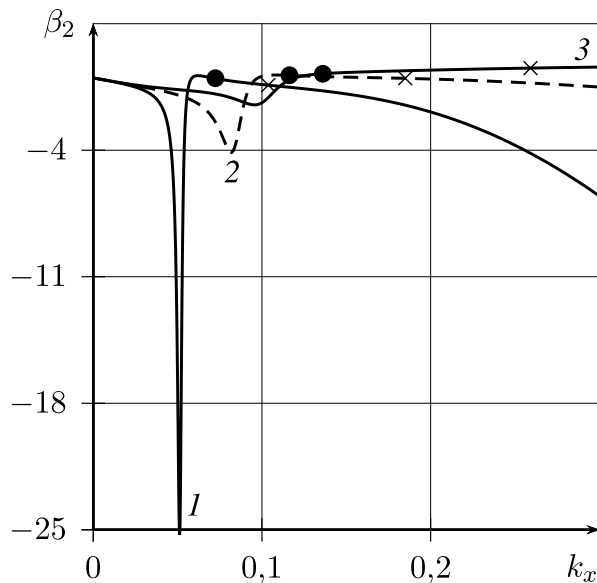


Рис. 5. Нелинейная зависимость фазы от амплитуды. 1 —  $Re = 5$ , 2 —  $Re = 10$ , 3 —  $Re = 15$

Величины коэффициентов при нелинейном члене уравнения (1) в окрестности максимального значения инкремента (волновое число  $k_{\omega_{imax}}$ ) приведены в таблице.

Таблица

Свободное стекание жидкой пленки воды

$Re$	$k_{\omega_{imax}}$	$\omega_{imax}$	$C_r$	$\beta_1$	$\beta_2$
1	0.01919	0.00022	2.99986	7.50449	-0.01525
2	0.03418	0.00140	2.99825	3.76784	-0.02679
3	0.04784	0.00410	2.99230	2.55092	-0.03552
4	0.06058	0.00871	2.97823	1.98451	-0.03871
5	0.07245	0.01536	2.95201	1.68957	-0.03332
6	0.08340	0.02388	2.91046	1.53829	-0.01608
7	0.09331	0.03376	2.85229	1.46725	0.01368
8	0.10211	0.04428	2.77860	1.43767	0.05312
9	0.10974	0.05464	2.69265	1.42465	0.09697
10	0.11628	0.06419	2.59882	1.41392	0.13960
11	0.12181	0.07250	2.50155	1.39760	0.17635
12	0.12642	0.07939	2.40459	1.37357	0.20468
13	0.13026	0.08484	2.31069	1.34166	0.22371
14	0.13345	0.08896	2.22164	1.30316	0.23382
15	0.13610	0.09190	2.13841	1.25958	0.23603

Вычислительные эксперименты по исследованию долговременного развития возмущений волнового пакета указывают на неоднородность амплитуды по пространственной координате, что порождает пространственные производные фазы. Такое взаимное влияние отражается на амплитуде огибающей волнового пакета [9]. При возбуждении волнового пакета вблизи кривой нейтральной устойчивости наблюдается затухание его амплитуд.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. *ЖЭТФ*. 1948;18(1):3–28.
- Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. *ЖЭТФ*. 1949;19(2):105–120.
- Stainhorp F. P., Allen J. M. The Development of Ripples on the Surface of a Liquid Film Flowing Inside a Vertical Tube. *Transactions of the Institute of Chemical Engineers*. 1965;43:85–91.
- Jones L. O., Whitaker S. An Experimental Study of Falling Liquid Films. *American Institute of Chemical Engineers Journal*. 1966;12(3):525–529.
- Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. *Волновое течение пленок жидкости*. Новосибирск: Наука; 1992. 255 с.
- Демехин Е. А., Каплан М. А., Шкадов В. Я. О математических моделях теории тонких слоев вязкой жидкости. *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1987;6:73–81.
- Холпанов Л. П., Шкадов В. Я. *Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела*. Москва: Наука; 1990. 271 с.
- Сергеев А. Д., Холпанов Л. П., Николаев Н. А. и др. Измерение волновых параметров пленочного течения жидкости методом локальной электропроводности. *ИФЖ*. 1975;29(5):843–846.
- Прокудина Л. А., Вяткин Г. П. Самоорганизация возмущений в жидких пленках. *ДАН*. 2011;439(4):481–484.
- Prokudina L. A. Mathematical Modeling of Wave Parameters of the Flow of a Thin Layer of Viscous Liquid in Film Apparatuses. *AIP Conference Proceedings*. 2020;2312:050019. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0035536>.

## СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ И НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОДХОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ГЕОАКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ С ОДНИМ ДИСЛОКАЦИОННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Д. Ф. Сергиенко<sup>1,2,a</sup>, Р. И. Паровик<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup> Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга,  
г. Петропавловск-Камчатский, Россия

<sup>2</sup> Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,  
с. Паратунка, Россия

<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0008-6512-4537>, ✉ [sergienko@ikir.ru](mailto:sergienko@ikir.ru)

<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1576-1860>, [parovik@ikir.ru](mailto:parovik@ikir.ru)

*Аннотация:* в работе проводится сравнительный анализ эффективности численных методов (Розенброка 4-го порядка, Radau, BDF, LSODA библиотеки SciPy) и нейросетевого подхода Physics-Informed Neural Networks (PINN) для решения математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии с одним дислокационным источником на языке программирования Python. Параллельная реализация метода Розенброка на 8 процессорах позволила значительно повысить его производительность. Сравнение проводилось по критериям точности, вычислительной стоимости и устойчивости. Показано, что подход PINN, архитектура которого специально разработана для решения задач математической физики, обеспечивает сопоставимую точность с методом Розенброка, реализованным вручную, обладая при этом рядом преимуществ, таких как простота параметризации задачи и глобальная аппроксимация решения, обеспечивающая его гладкость и отсутствие численной дисперсии, характерной для сеточных методов.

*Ключевые слова:* высокочастотная геоакустическая эмиссия, дислокационный источник, математическое моделирование, численные методы, метод Розенброка, Physics-Informed Neural Networks (PINN), SciPy.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № темы 124012300245-2).

*Для цитирования:* Сергиенко Д. Ф., Паровик Р. И. Сравнение эффективности численных методов и нейросетевого подхода к исследованию математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии с одним дислокационным источником. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):106–113.

*Поступила в редакцию:* 16.10.2025.

*В окончательном варианте:* 14.11.2025.

## COMPARISON OF NUMERICAL METHODS AND NEURAL NETWORK APPROACHES FOR SIMULATING HIGH-FREQUENCY GEOACOUSTIC EMISSION FROM A SINGLE DISLOCATION SOURCE

D. F. Sergienko<sup>1,2,a</sup>, R. I. Parovik<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup> Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Paratunka, Russian Federation

<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0008-6512-4537>, ✉ [sergienko@ikir.ru](mailto:sergienko@ikir.ru)

<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1576-1860>, [parovik@ikir.ru](mailto:parovik@ikir.ru)

*Abstract:* we present a comparative analysis of numerical methods (4th-order Rosenbrock, Radau, BDF, and LSODA from the SciPy library) and the Physics-Informed Neural Networks (PINN) approach for solving a mathematical model of high-frequency geoacoustic emission from a single dislocation source using Python. Parallel implementation of the Rosenbrock method on eight processors significantly improved its performance. We compared the methods in terms of accuracy, computational cost, and stability. The results show that the PINN approach, with an architecture specifically designed for mathematical physics problems, achieves accuracy comparable to the manually implemented Rosenbrock method. In addition, PINNs offer advantages such as simplified problem parameterization and a global approximation of the solution, ensuring smoothness and avoiding the numerical dispersion typical of grid-based methods.

*Keywords:* high-frequency geoacoustic emission, dislocation source, simulation, numerical methods, Rosenbrock method, physics-informed neural networks (PINN), SciPy.

*Acknowledgements:* this is a part of government contract 124012300245-2 granted to the Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.

*Cite this article:* Sergienko D. F., Parovik R. I. Comparison of Numerical Methods and Neural Network Approaches for Simulating High-Frequency Geoacoustic Emission from a Single Dislocation Source. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):106–113.

*Original article submitted:* 16.10.2025.

*Revision submitted:* 14.11.2025.

## **Введение**

Современная геофизика и сейсмология сталкиваются с фундаментальной проблемой интерпретации сложных волновых полей, генерируемых разнородными источниками в неоднородных геологических средах [1, 2]. Важным объектом таких исследований является геоакустическая эмиссия (ГАЭ) — высокочастотные акустические сигналы, возникающие в геологических средах в результате быстрых динамических процессов, таких как движение дислокаций, микротрещинообразование и релаксация напряжений [3]. Среди множества математических моделей, описывающих динамику упругих систем, осциллятор Берлаге занимает особое положение как одна из наиболее физически адекватных моделей, способная воспроизводить сложные спектральные характеристики и временные структуры реальных сейсмоакустических сигналов [4–6]. Следует отметить, что Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН (ИКИР ДВО РАН) проводит систематическую регистрацию и исследование геоакустической эмиссии с 1999 года [7], что обеспечивает обширную экспериментальную базу для верификации математических моделей.

Актуальность разработки и совершенствования математической модели осциллятора Берлаге с одним источником обусловлена несколькими критически важными факторами. Во-первых, такая модель служит теоретической основой для интерпретации данных мониторинга сейсмической активности, где корректное описание динамики одиночного источника является необходимым условием для последующего анализа сложных многокомпонентных систем. Во-вторых, модель Берлаге демонстрирует исключительную эффективность при моделировании переходных процессов и нелинейных эффектов, характерных для реальных геофизических систем, включая явления гистерезиса и релаксации напряжений.

Прикладной аспект исследований в данной области охватывает чрезвычайно широкий спектр задач — от прогнозирования землетрясений и мониторинга инженерных сооружений до решения фундаментальных проблем физики очага сейсмических событий. Математическая модель осциллятора Берлаге позволяет устанавливать количественные связи между параметрами источника и характеристиками регистрируемых волновых полей, что является основой для разработки новых методов дистанционной диагностики состояния геологических сред.

В настоящее время традиционные подходы к решению уравнений модели Берлаге основаны на применении классических численных методов, включая методы Рунге–Кутты, схемы Розенброка и другие алгоритмы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако эти методы сталкиваются с существенными ограничениями при решении обратных задач, многопараметрической оптимизации и работе с зашумленными данными. Кроме того, классические численные схемы часто требуют значительных вычислительных ресурсов и времени выполнения, что ограничивает их практическое применение в задачах оперативного мониторинга.

Перспективной альтернативой традиционным подходам представляется использование нейросетевых методов, в частности, метода Physics-Informed Neural Networks (PINN). Этот подход позволяет интегрировать физические законы, описываемые уравнениями модели Берлаге, непосредственно в архитектуру нейронной сети, обеспечивая тем самым соблюдение фундаментальных физических принципов в процессе обучения. Важнейшим преимуществом PINN является возможность одновременного решения прямых и обратных задач, а также естественная работа с неполными и зашумленными данными, что особенно актуально для практических геофизических приложений.

В данной работе проводится комплексное исследование, направленное на сравнительный анализ эффективности классических численных методов и нейросетевого подхода PINN применительно к математической модели осциллятора Берлаге с одним источником. Исследование включает в себя: разработку вычислительной схемы на основе метода Розенброка 4 порядка точности и численных алгоритмов для одного источника; создание специализированной архитектуры PINN для модели Берлаге;

сравнительную оценку точности и вычислительной эффективности методов и нейронной сети; анализ устойчивости решений к вариациям параметров модели.

### Математическая модель ГАЭ

В настоящей работе для описания одиночного импульса ГАЭ мы воспользуемся следующей математической моделью:

$$\begin{cases} \ddot{g}(t) = \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right)\dot{g}(t) - \left(\frac{a}{t^2} + c^2\right)g(t) + \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right)A \cdot c \cdot t^a \exp\left(-\frac{a}{b}t\right) \cos(ct + \phi_0), \\ g(t_0) = A \cdot t_0^a \exp\left(-\frac{a}{b}t_0\right) \sin(ct_0 + \phi_0), \\ \dot{g}(t_0) = \left(\frac{a}{t_0} - \frac{a}{b}\right)g(t_0) + A \cdot c \cdot t_0^a \exp\left(-\frac{a}{b}t_0\right) \cos(ct_0 + \phi_0), \end{cases} \quad (1)$$

где  $A > 0$  – амплитуда импульса, от. ед.;  $n = \frac{\ln 20}{\frac{1}{p_{max}} - \ln \frac{1}{p_{max}} - 1}$  – параметр, отвечающий за форму огибающей сигнала;  $p_{max} \in [0.01, 0.4]$  – положение максимума;  $\Delta$  – крутизна огибающей сигнала, [1.1, 5];  $t \in [t_0, t_{end}]$  – время, с;  $t_0 > 0$  – начальный момент времени, с;  $t_{end}$  – длительность импульса, с;  $f \in [200, 20000]$  – частота заполнения, Гц;  $\phi_0$  – начальная фаза;  $a = n \cdot p_{max} \cdot \Delta$ ;  $b = p_{max} \cdot t_{end}$ ;  $c = 2 \cdot \pi f$ .

Можно показать, что решением модели (1) является функция Берлаге [8]:

$$g(t) = A \cdot t^a \cdot \exp\left(-\frac{a}{b}t\right) \cdot \sin(ct + \phi_0). \quad (2)$$

Математическую модель (1), решением которой является функция Берлаге (2), будем называть осциллятором Берлаге.

Осциллятор Берлаге (1) описывает один дислокационный источник (трещину), излучающий один импульс высокочастотной ГАЭ. Практическая применимость данной модели была подтверждена в работе [8], где она была использована для описания реальных экспериментальных данных с помощью двухэтапной оптимизации, сочетающей дифференциальную эволюцию и метод Нелдера–Мида, что позволило с высокой точностью уточнить параметры импульса.

Ранее в работах [9–11] было дано описание взаимодействия двух дислокационных источников с помощью двух линейно связанных осцилляторов Берлаге. Учет более двух дислокационных источников приводит нас к цепочке связанных осцилляторов Берлаге, что равносильно рассмотрению волнового процесса распространения ГАЭ. Для модели двусвязанных линейных осцилляторов Берлаге был проведен и реализован количественный и качественный анализ в комплексе QAMODEL [12]. Было проведено исследование модели на жесткость, в ходе которого было подтверждено, что при определенных параметрах модель является жесткой.

Для решения модели двусвязанных осцилляторов в работе [13] рассматривалась эффективность численных методов (метода Розенброка 4 порядка, LSODA, BDF, Radau), наиболее устойчивых к жестким системам. В данной работе мы рассмотрим в комплексе применение численных методов и нейронной сети PINN для решения модели и оценим эффективность применения сети.

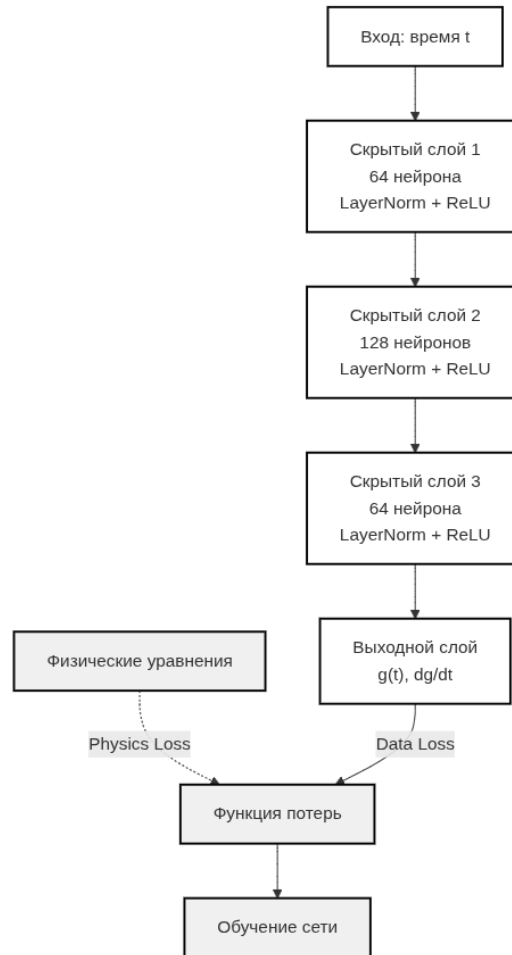
Выбор сети PINN обусловлен ее принципиальной способностью учитывать физические законы, описываемые уравнением осциллятора Берлаге, непосредственно в процессе обучения. Это обеспечивает получение глобального физически осмысленного решения, а не просто аппроксимацию данных.

### Методика исследования

Для комплексного сравнения использовались алгоритмы из библиотеки SciPy: метод LSODA с адаптивным переключением между нежесткими и жесткими схемами, метод обратных дифференциальных формул BDF [14–16], предназначенный для решения жестких систем, и метод Radau неявного типа высокой точности [17, 18]. Также был реализован параллельный метод Розенброка 4 порядка точности по схеме [19]. Каждый из методов настраивался с относительной и абсолютной погрешностью  $rtol = atol = 10^{-7}$ .

Архитектура PINN представляет собой многослойный перцептрон с улучшенной структурой, включающей остаточные соединения (residual connections) и нормализацию (рисунок 1). Сеть состоит из входного слоя, четырех скрытых слоев размерностью 256, 512, 256 и 128 нейронов соответственно и выходного слоя с двумя нейронами для предсказания функции и ее производной модели (1).

Ключевой особенностью архитектуры является использование остаточных блоков (residual blocks), которые позволяют избежать проблемы исчезающих градиентов при обучении глубоких сетей. Каждый блок включает линейные преобразования, нормализацию слоя (layer normalization) и SiLU — функцию активации. Инициализация весов выполняется методом Xavier, что обеспечивает стабильность процесса обучения.



**Рис. 1.** Архитектура Physics-Informed Neural Network (PINN) для решения модели (1)

Данные предварительно нормализовались с помощью StandardScaler, что ускоряет сходимость и улучшает обобщающую способность модели. Контроль переобучения осуществлялся путем мониторинга сходимости обеих компонент функции потерь — по начальным условиям и невязке дифференциального уравнения, а также за счет применения L2-регуляризации весов сети.

### Результаты исследования

Эффективность численных методов и сети PINN оценивалась по трем основным критериям: точность решения, вычислительная эффективность и устойчивость. Точность измерялась как для самой функции, так и для ее производной относительно вычисления аналитической функции (2). Вычислительная эффективность оценивалась по времени выполнения алгоритмов, а устойчивость — по способности методов сохранять точность при варьировании параметров модели.

Параметры модели (1) для примеров 1–2 (таблица 1) были взяты согласно работе [20]. Обучение нейросети проводилось с использованием оптимизатора AdamW с адаптивной скоростью обучения, выбранной при инициализации сети  $lr = 0.001$  (таблица 1) и L2-регуляризацией.

Для оценки адекватности модели были вычислены следующие параметры (таблицы 2–3): среднеквадратичная ошибка  $MSE g(t)$  и  $MSE dg/dt$ , относительная ошибка  $\varepsilon_{g(t)}$ , %.

Таблица 1

Параметры математической модели и настройки PINN для примеров 1 и 2

Параметр	Пример 1	Пример 2
$A$	0.6686	0.6686
$a$	0.7695	2.43
$b$	0.0014	0.0014
$c$	6283.1853	12432.6
$\phi_0$	3.6	3.6277
$t$	$[10^{-3}; 8 \cdot 10^{-3}]$	$[10^{-3}; 8 \cdot 10^{-3}]$
$N_{epoch}$	400	600
lr	0.001	0.001
Точки коллокации	1000	1000

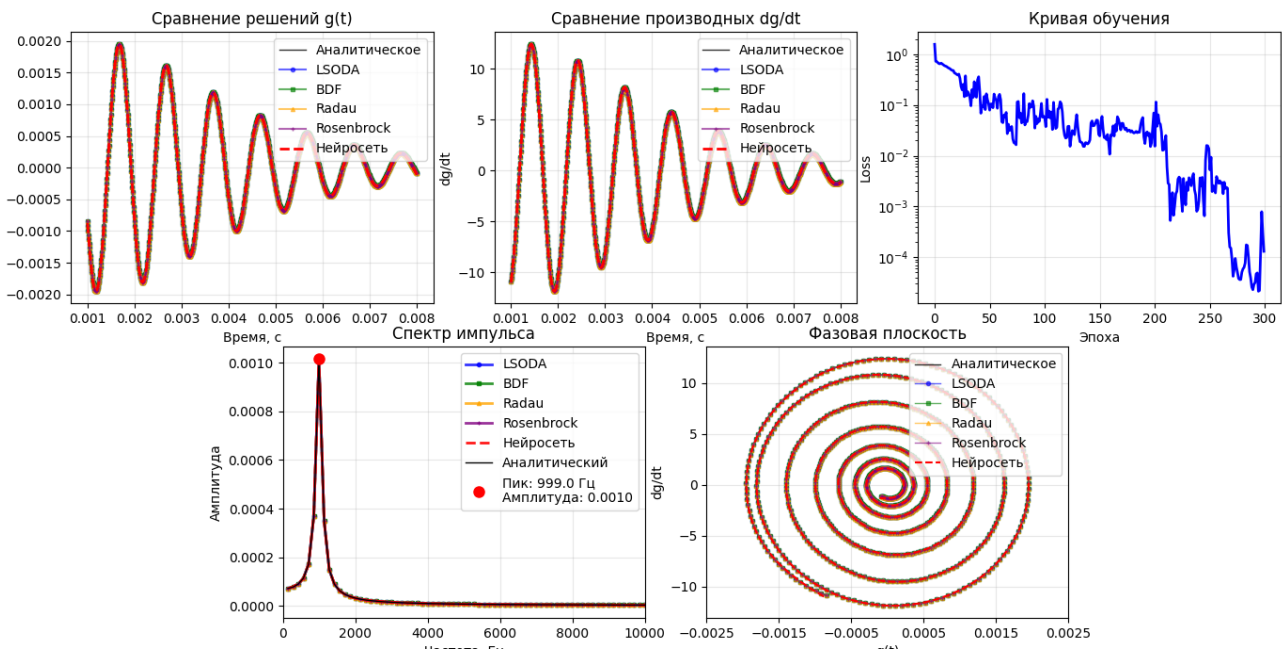


Рис. 2. Сравнение эффективности численных методов и нейросетевого подхода PINN для решения модели (1). Пример 1

Также были проанализированы спектральные характеристики решений, фазовые портреты и способность методов сохранять физическую осмысленность решения в течение всего временного интервала (рисунки 2–3).

Проведенное исследование демонстрирует устойчивую эффективность подхода PINN при различных параметрах математической модели. Для первого набора параметров PINN достигла уровня потерь порядка  $10^{-5}$ , а для второго —  $10^{-9}$ , что свидетельствует о высокой чувствительности метода к выбору параметров модели и возможностях оптимизации процесса обучения.

Таблица 2

Сравнение методов решения модели (1). Пример 1

Метод	Время, с	MSE $g(t)$	MSE $dg/dt$	Отн. $\varepsilon_{g(t)}$ , %
LSODA	0.0176	$4.36 \times 10^{-15}$	$1.77 \times 10^{-07}$	0.0058
BDF	0.0746	$3.53 \times 10^{-15}$	$1.48 \times 10^{-07}$	0.0056
Radau	0.1274	$1.84 \times 10^{-20}$	$2.95 \times 10^{-13}$	0.0001
Rosenbrock	0.1356	$9.70 \times 10^{-16}$	$3.87 \times 10^{-08}$	0.0029
Нейросеть (PINN)	обучение: 43.69 предсказание: 0.001	$2.48 \times 10^{-09}$	$1.13 \times 10^{-01}$	11.5317

Таблица 3

Сравнение методов решения модели (1). Пример 2

Метод	Время, с	MSE $g(t)$	MSE $dg/dt$	Отн. $\varepsilon_{g(t)}$ , %
LSODA	0.0119	$2.79 \times 10^{-22}$	$4.39 \times 10^{-14}$	0.4586
BDF	0.0476	$2.92 \times 10^{-22}$	$4.59 \times 10^{-14}$	0.4516
Radau	0.0537	$8.05 \times 10^{-26}$	$1.04 \times 10^{-17}$	0.0229
Rosenbrock	0.0620	$9.14 \times 10^{-26}$	$1.44 \times 10^{-17}$	0.0106
Нейросеть (PINN)	обучение: 46.64 предсказание: 0.001	$1.28 \times 10^{-21}$	$2.97 \times 10^{-13}$	2.5346

Спектральный анализ подтвердил точное воспроизведение частотных характеристик: в первом случае пиковая частота составила 999 Гц с амплитудой 0.001, во втором — 1998 Гц с амплитудой 0.0008, что полностью соответствует аналитическим решениям и демонстрирует способность PINN корректно работать в различных частотных диапазонах. Фазовые траектории, полученные с помощью PINN для обоих случаев, качественно совпадают с результатами классических численных методов (LSODA, BDF, Radau, метод Розенброка 4 порядка точности), сохраняя структуру фазового портрета с максимальным отклонением не более 2.5%.

Кривые обучения показывают различную динамику сходимости: в первом примере наблюдается плавное уменьшение потерь, во втором — более быстрое достижение низких значений ошибки, что объясняется различиями в параметрах модели и сложности аппроксимируемой функции. Оба случая демонстрируют отсутствие переобучения и устойчивую сходимость алгоритма (рисунки 2–3).

Эксперименты проводились на вычислительном узле с процессором Intel Core i7–6850K (12 ядер, 3.60 GHz), 16 ГБ ОЗУ под управлением Devuan GNU/Linux 5. Использовался Python 3.12.7, вычисления выполнялись на CPU.

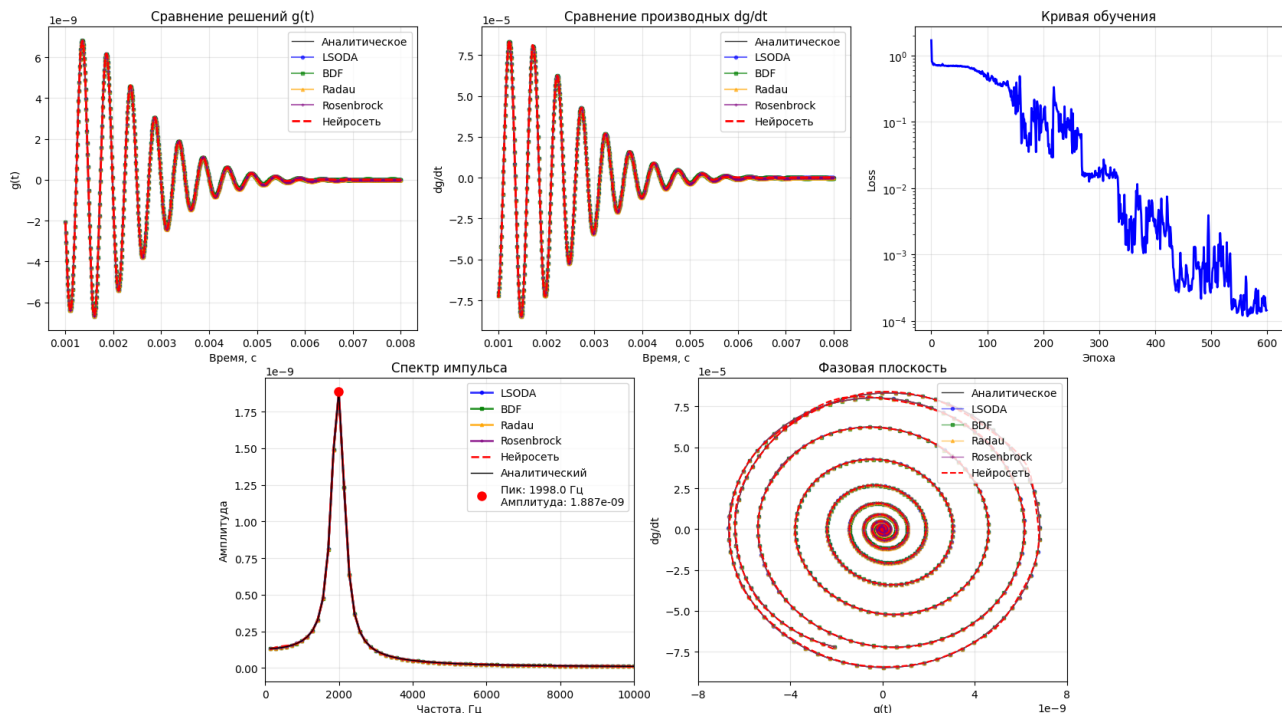


Рис. 3. Сравнение эффективности численных методов и нейросетевого подхода PINN для модели (1). Пример 2

### Заключение

Результаты сравнительного исследования демонстрируют, что нейросетевой подход PINN обеспечивает точность, сопоставимую с численными методами, при корректном воспроизведении как временной динамики сигнала, так и его спектральных характеристик. Кривая обучения PINN показывает устойчивую сходимость, а фазовая траектория полностью соответствует аналитическому решению, что

подтверждает физическую осмысленность нейросетевой модели. Несмотря на значительные вычислительные затраты на этапе обучения, PINN представляет собой перспективную альтернативу традиционным методам для решения дифференциальных уравнений. Ключевым преимуществом подхода является высокая скорость предсказания обученной модели, составляющая 0.001 секунды. После завершения процесса обучения сеть способна практически мгновенно вычислять решения для произвольных точек области, что особенно ценно в задачах, требующих многократных обращений к модели при варьируемых параметрах или начальных условиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Detkov V. A. Analysis of Elastic Waves Generated in Frozen Grounds by Means of the Electromagnetic Pulse Source “Yenisei”. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2018;193(1):12058.
2. Vershinin A., Ampilov Yu., Levin V., Petrovsky K. Full Waveform Modeling in Seismic Exploration Based on a Digital Geological Model Using Spectral Element Method on GPU. *16th World Congress on Computational Mechanics and 4th Pan American Congress on Computational Mechanics*. 2024. DOI: 10.23967/c.wccm.2024.056.
3. Lukovenkova O. O., Solodchuk A. A. Digital Signal Processing Methods for Geoacoustic Emission. *23rd International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA), Moscow, Russian Federation*. 2021:1–5. DOI: 10.1109/DSPA51283.2021.9535762.
4. Dobrynin E., Maksymov M., Boltenev V. Development of a Method for Determining the Wear of Artillery Barrels by Acoustic Fields of Shots. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020;3:6–18. DOI: 10.15587/1729-4061.2020.206114.
5. Prokopovich S. V., Uzdin A. M., Ivanova T. V. Setting Seismic Input Characteristics Required for Designing. *Magazine of Civil Engineering*. 2021;2(102):10209.
6. Lukovenkova O. O., Marapulets Y. V., Solodchuk A. A. Adaptive Approach to Time-Frequency Analysis of AE Signals of Rocks. *Sensors*. 2022;22:9798. DOI: 10.3390/s22249798.
7. Gapeev M. I., Senkevich Y. I., Lukovenkova O. O. Estimation of Probability Distributions of Geoacoustic Signal Characteristics. *Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing*. 2021;2096(1):012018.
8. Sergienko D., Parovik R. Berlage Oscillator as a Mathematical Model of High-Frequency Geoacoustic Emission with One Dislocation Source. *Acoustics*. 2025;7(4):65. DOI: 10.3390/acoustics7040065.
9. Мингазова Д. Ф., Паровик Р. И. Некоторые аспекты качественного анализа модели высокочастотной геоакустической эмиссии. *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2023;42(1):191–206. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-42-1-191-206.
10. Гапеев М. И., Солдчук А. А., Паровик Р. И. Связанные осцилляторы как модель высокочастотной геоакустической эмиссии. *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2022;40(3):88–100. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-88-100.
11. Sergienko D. F., Parovik R. Investigation of a System of Two Coupled Linear Oscillators with Non-constant Coefficients. *Journal of Mathematical Sciences*. 2025. DOI: 10.1007/s10958-025-07912-z.
12. Сергиенко Д. Ф., Паровик Р. И. Программный комплекс QAMODEL: компьютерное моделирование высокочастотной геоакустической эмиссии. *Программные продукты и системы*. 2025;38(2):261–268. DOI: 10.15827/0236-235X.150.261-268.
13. Сергиенко Д. Ф., Паровик Р. И. Исследование эффективности численных методов для решения математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии. *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2025;50(1):169–183. DOI: 10.26117/2079-6641-2025-50-1-169-183.
14. Shampine L. F., Reichelt M. W. The MATLAB ODE Suite. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1997;18(1):1–22. DOI: 10.1137/s1064827594276424.
15. Hindmarsh A. C. ODEPACK, a Systematized Collection of ODE Solvers. *Scientific Computing*. 1983;55–64.
16. Petzold L. Automatic Selection of Methods for Solving Stiff and Nonstiff Systems of Ordinary Differential Equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1983;4(1):136–148. DOI: 10.1137/0904010.
17. Hairer E., Wanner G. Stiff Differential Equations Solved by Runge-Kutta Methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1999;111(1–2):93–111. DOI: 10.1016/S03770427(99)00134-X.

18. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential – Algebraic Problems. Berlin: Springer-Verlag; 1991.
19. Ponalagusamy R., Ponnammal K. A Parallel Fourth Order Rosenbrock Method: Construction, Analysis and Numerical Comparison. *Int. J. Appl. Comput. Math.* 2015;1(1);45–68. DOI: 10.1007/s40819-014-0002-x.
20. Tristanov A., Lukovenkova O., Marapulets Yu., Kim A. Improvement of Methods for Sparse Model Identification of Pulsed Geophysical Signals. *Conf. Proc. of SPA 2019*. Poznan. 2019;256–260. DOI: 10.23919/SPA.2019.8936817.

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ****И. В. Смолехо***Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, Российская Федерация**ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9852-9310>, ✉ [i\\_smol@icm.krasn.ru](mailto:i_smol@icm.krasn.ru)*

*Аннотация:* в данной работе представлена математическая модель и алгоритм численного решения системы уравнений статики нематического жидкого кристалла, которая выведена из уравнений упрощенной динамической модели в рамках акустического приближения. Полученная система включает в себя: два уравнения для давления и касательного напряжения, описывающих поступательное движение; уравнение для угла поворота, в правую часть которого входит касательное напряжение (является аналогом закона Гука в теории упругости); уравнение теплопроводности, описывающее распределение температуры в жидком кристалле с учетом анизотропии, вызванной ориентацией молекул; систему определяющих уравнений, в которую входят перемещения, давление, касательное напряжение, температура и угол поворота. Уравнения для давления и касательного напряжения представляют собой условия Коши–Римана, которые приводят эти уравнения к задаче анализа комплексной переменной. Сведение задачи к неоднородному сингулярному интегральному уравнению позволило применить метод LU-разложения для его численного решения. Для постановки граничных условий применяется теорема Сохоцкого–Племеля. На основе предложенного алгоритма разработана программа, написанная на MATLAB, и проведена серия тестовых расчетов. Результаты демонстрируют работоспособность разработанного алгоритма и программы.

*Ключевые слова:* жидкий кристалл, статика, комплексный анализ, условия Коши–Римана, теорема Сохоцкого–Племеля.

*Благодарности:* работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2025-1606).

*Для цитирования:* Смолехо И. В. Алгоритм решения системы уравнений статики жидких кристаллов. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):114–120.

*Поступила в редакцию:* 25.09.2025.

*В окончательном варианте:* 01.11.2025.

**ALGORITHM FOR SOLVING THE SYSTEM OF EQUATIONS DESCRIBING LIQUID CRYSTAL STATICS****I. V. Smolekho***Institute of Computational Modeling, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russian Federation**ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9852-9310>, ✉ [i\\_smol@icm.krasn.ru](mailto:i_smol@icm.krasn.ru)*

*Abstract:* we present a mathematical model and algorithm for the numerical solution of the system of equations describing nematic liquid crystal statics. The model is derived from a simplified dynamic formulation within the acoustic approximation. The system includes two equations for pressure and shear stress describing translational motion; an equation for the rotation angle, whose right-hand side depends on shear stress (analogous to Hooke's law in elasticity); a heat conduction equation accounting for temperature distribution and the anisotropy caused by molecular orientation; and a system of determining equations for displacement, pressure, shear stress, temperature, and rotation angle.

The equations for pressure and shear stress satisfy the Cauchy–Riemann conditions, reducing the problem to a complex variable analysis. By further reducing it to a non-homogeneous singular integral equation, we applied the LU decomposition method for numerical solution. We used the Sokhotski–Plemelj theorem to impose boundary conditions. Based on this algorithm, we developed a MATLAB program and performed a series of test calculations. The results demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed algorithm and implementation.

*Keywords:* liquid crystal, statics, complex analysis, Cauchy–Riemann conditions, Sokhotski–Plemelj theorem.

*Acknowledgements:* this work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center, funded by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the Local Research and Education Center Development Initiative (Agreement 075-02-2025-1606).

*Cite this article:* Smolekho I. V. Algorithm for Solving the System of Equations Describing Liquid Crystal Statics. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):114–120.

*Original article submitted:* 25.09.2025.

*Revision submitted:* 01.11.2025.

## Введение

Жидкие кристаллы (ЖК) — это уникальное состояние вещества, которое сочетает в себе свойства как жидкостей, так и кристаллов [1, 2]. Молекулы в жидких кристаллах обладают упорядоченной ориентацией, но при этом могут легко перемещаться. Они обладают высокой чувствительностью к внешним воздействиям, таким как электрические поля, температура и механические напряжения. Жидкие кристаллы наиболее широко известны благодаря ЖК-дисплеям, которые повсеместно используются в экранах телевизоров, мониторов и смартфонов и других устройствах отображения, обработки и хранения информации. Под действием электрического поля молекулы меняют ориентацию, что позволяет управлять прозрачностью и цветом каждого пикселя. Помимо дисплеев, жидкие кристаллы широко используются в медицине — например, в термографических индикаторах для визуализации распределения температуры на коже.

При изучении равновесного состояния жидких кристаллов часто применяется статическая модель Озеена–Франка [3, 4], основанная на вариационном принципе минимизации потенциальной энергии. Данная модель рассматривает исключительно вращательные степени свободы молекул, не учитывая их поступательное движение и связанные с ним механические напряжения. Такой подход ограничивает область применения модели узким кругом задач. В частности, не позволяет анализировать изменение ориентации молекул в слое жидкого кристалла, вызванное температурными воздействиями.

Для описания динамики жидких кристаллов Эриксоном и Лесли [5, 6] была разработана модель, основанная на законах сохранения, учитывающая течение и вращательные степени свободы материала. Она может быть применима и при решении статических задач. Однако нелинейные уравнения этой модели чрезвычайно сложны, кроме того, модель содержит ряд параметров и функций, значения которых могут быть определены только экспериментальным путем, что создает существенные ограничения для ее использования. Эти особенности делают прямую численную реализацию модели крайне сложной, требующей разработки специализированных алгоритмов и значительных вычислительных ресурсов. Таким образом, для исследования поведения жидких кристаллов требуется применение приближенных упрощенных моделей.

В работе [7] предложена упрощенная динамическая модель, описывающая механические, температурные и электрические воздействия. Уравнения модели получены из законов сохранения энергии, импульсов и момента импульсов и включают в себя уравнения поступательного и вращательного движений, уравнение для угла поворота, уравнение теплопроводности, а также уравнения состояния для давления и напряжений. В ее основе лежит теория обобщенного континуума Коссера [8]. При этом жидкокристаллическая среда рассматривается как акустическая среда с вращающимися частицами. С помощью этой модели был исследован эффект Фредерикса [9], заключающийся в переориентации молекул под действием внешнего электрического поля. Если напряженность электрического поля превышает некоторое пороговое значение, то молекулы жидкого кристалла развернутся вдоль его действия. Также был исследован аналогичный эффект для температуры — эффект ориентационной термоупругости [10], который не удалось наблюдать с использованием предложенной модели. Вероятно, для его проявления необходимо учитывать силы поверхностного натяжения. В данной работе приведена статическая модель жидкого кристалла, с помощью которой в дальнейшем будет исследоваться эффект ориентационной термоупругости.

## Вывод уравнений статики

Из определяющих уравнений динамики [7] получим уравнения статики ЖК, для этого положим производные по времени равными нулю. Кроме того, проинтегрируем по  $t$  уравнения для моментных напряжений, а также уравнения состояния для давления и касательного напряжения. В результате получаются следующие уравнения статики:

1. Уравнения, связывающие давление и касательное напряжение, представляют собой условия Коши–Римана:

$$p_x + q_y = 0, \quad -q_x + p_y = 0.$$

Их выполнение является необходимым и достаточным условием аналитичности в рассматриваемой области комплексной функции  $F(z) = q + ip$ , где  $z = x + iy$  — комплексная переменная, и гарантируют, что функция  $f(z)$  имеет производную в каждой точке области. Таким образом давление  $p$  представляет собой действительную часть  $f(z)$ , а касательное напряжение — мнимую.

2. Продифференцируем уравнения для моментных напряжений

$$\mu_1 = \gamma (\theta - \theta_0)_x, \quad \mu_2 = \gamma (\theta - \theta_0)_y$$

по переменным  $x$  и  $y$  соответственно. Дальнейшая подстановка в

$$2q + \mu_{1,x} + \mu_{2,y} = 0$$

приводит к уравнению, которое является аналогом закона Гука в теории упругости, устанавливая связь между деформацией (углом поворота) и напряжением (касательным напряжением):

$$\Delta(\theta - \theta_0) = -\frac{2q}{\gamma}.$$

3. Уравнение теплопроводности описывает распределение температуры в жидком кристалле с учетом анизотропии, вызванной ориентацией молекул:

$$(\alpha_{11} T_x + \alpha_{12} T_y)_x + (\alpha_{12} T_x + \alpha_{22} T_y)_y = 0,$$

где

$$\alpha_{11} = \alpha_{\parallel} \cos^2 \theta + \alpha_{\perp} \sin^2 \theta, \quad \alpha_{12} = (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp}) \sin \theta \cos \theta, \quad \alpha_{22} = \alpha_{\parallel} \sin^2 \theta + \alpha_{\perp} \cos^2 \theta.$$

Сокращенная запись следующая:

$$\nabla(\alpha \nabla T) = 0, \quad \alpha = \alpha(\theta).$$

4. Система неоднородных уравнений, связывающая перемещения, давление, касательное напряжение, температуру и угол поворота:

$$p = -\kappa(u_{1,x} + u_{2,y}) + \beta(T - T_0), \quad q = \alpha(u_{2,x} - u_{1,y}) - 2\alpha(\theta - \theta_0).$$

Здесь  $u_1$  и  $u_2$  — компоненты вектора перемещений,  $\theta$  — угол поворота молекул,  $p$  — давление,  $q$  — касательное напряжение,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — моментные напряжения,  $T$  — температура,  $\kappa$  — модуль объемного сжатия,  $\alpha$  — модуль упругого сопротивления вращению,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $\gamma$  — модуль упругого сопротивления изменению кривизны,  $\alpha_{\parallel}$  и  $\alpha_{\perp}$  — коэффициенты теплопроводности в направлении ориентации молекул жидкого кристалла и в поперечном направлении различны благодаря анизотропии ЖК.

### Постановка задачи. Вычислительный алгоритм

Бесконечный слой жидкого кристалла толщиной  $h$  находится в равновесном состоянии. Уравнения движения представляют собой условия Коши–Римана аналитичности функции  $F(z) = q(x,y) + ip(x,y)$  комплексной переменной  $z = x + iy$ . Схема возмущения слоя представлена на рис. 1.

На сторонах полосы  $C^+$  и  $C^-$  ( $C = C^+ \cup C^-$ ) заданы граничные условия

$$p(x, 0) = p^-(x), \quad q(x, 0) = q^-(x),$$

$$p(x, h) = p^+(x), \quad q(x, h) = q^+(x),$$

которые должны удовлетворять условиям равновесия внешних сил на сторонах слоя с учетом направлений обхода

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p^-(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p^+(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} q^-(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} q^+(x) dx,$$

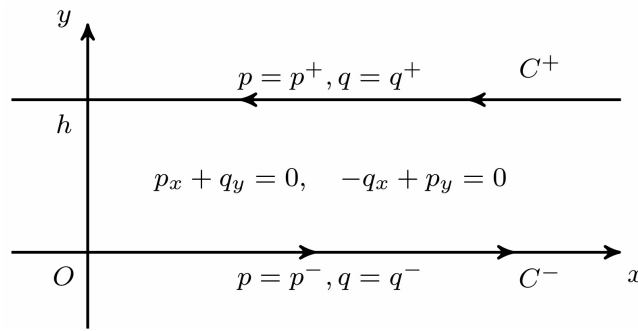


Рис. 1. Схема возмущения слоя

полученные с применением формулы Грина.

Построим поля напряжений в жидкокристаллической полосе, определив функцию  $F(z)$  интегралом типа Коши:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где  $f(\zeta)$  — некоторая функция на  $C$ , удовлетворяющая условию Гельдера. В развернутой форме

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^-(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^+(\zeta) d\zeta}{\zeta + ih - z},$$

где комплекснозначные функции  $f^\pm(\zeta)$  — это сужения  $f(\zeta)$  на  $C^+$  и  $C^-$ ,  $y \in (0, h)$ . Для аналитической в полосе функции  $F(z)$  должны выполняться граничные условия:

$$\lim_{z \rightarrow x} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = q^-(x) + ip^-(x), \quad \lim_{z \rightarrow x+ih} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = q^+(x) + ip^+(x).$$

В развернутом виде с учетом направлений обхода контура  $C$  для  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^-(\zeta) d\zeta}{\zeta - (x + i\varepsilon)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^+(\zeta) d\zeta}{\zeta + ih - (x + i\varepsilon)} \right) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^-(\zeta) d\zeta}{\zeta - x - i\varepsilon} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^+(\zeta) d\zeta}{\zeta - x + ih} = q^-(x) + ip^-(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^-(\zeta) d\zeta}{\zeta - (x + ih - i\varepsilon)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^+(\zeta) d\zeta}{\zeta + ih - (x + ih - i\varepsilon)} \right) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^-(\zeta) d\zeta}{\zeta - x - ih} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^+(\zeta) d\zeta}{\zeta - x + i\varepsilon} = q^+(x) + ip^+(x). \end{aligned}$$

В этих формулах пределы

$$I^-(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^-(\zeta) d\zeta}{\zeta - x - i\varepsilon} \quad \text{и} \quad I^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^+(\zeta) d\zeta}{\zeta - x + i\varepsilon}$$

вычисляются по формулам Сохоцкого–Племеля, связывающим граничные значения интеграла с главным значением по Коши. В задаче для полосы применяется следующий вариант теоремы:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon} = \mp i\pi f(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

При этом

$$I^-(x) = \frac{1}{2}f^-(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^-(\zeta)d\zeta}{\zeta - x}, \quad I^+(x) = -\frac{1}{2}f^+(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^+(\zeta)d\zeta}{\zeta - x}.$$

Таким образом, граничные условия задачи приводятся к двум интегральным уравнениям относительно неизвестных функций  $f^-(\zeta)$  и  $f^+(\zeta)$ :

$$\frac{1}{2}f^-(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^-(\zeta)d\zeta}{\zeta - x} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^+(\zeta)d\zeta}{\zeta - x + ih} = q^-(x) + ip^-(x),$$

$$\frac{1}{2}f^+(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^+(\zeta)d\zeta}{\zeta - x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^-(\zeta)d\zeta}{\zeta - x - ih} = q^+(x) + ip^+(x).$$

### Численное решение интегральных уравнений

Заменим пределы интегрирования на  $-A$  и  $A$ , где  $A \rightarrow \infty$ . На отрезке  $[-A, A]$  введем сдвинутые друг относительно друга сетки  $x_j = -A + j\Delta x$  (границы ячеек) и  $\zeta_{K-1/2} = -A + (K - 1/2)\Delta x$  (центры ячеек), где  $\Delta x = 2A/N$  – шаг сетки,  $N$  – количество ячеек. Интегралы по отрезку  $[-A, A]$  аппроксимируем по формуле прямоугольников с центральным узлом, например,

$$\int_{-A}^A \frac{f^\pm(\zeta)d\zeta}{\zeta - x_j} \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{k=1}^N \frac{f^\pm(x_k) + f^\pm(x_{k-1})}{\zeta_{k-1/2} - x_j}.$$

В итоге получаем систему уравнений для определения неизвестных функций  $f^\pm(x_j)$ :

$$\frac{1}{2}f^-(x) + \frac{\Delta x}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{f^-(x_k) + f^-(x_{k-1})}{\zeta_{k-1/2} - x_j} - \frac{\Delta x}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{f^+(x_k) + f^+(x_{k-1})}{\zeta_{k-1/2} - x_j + ih} = q^-(x) + ip^-(x),$$

$$\frac{1}{2}f^+(x) - \frac{\Delta x}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{f^+(x_k) + f^+(x_{k-1})}{\zeta_{k-1/2} - x_j} + \frac{\Delta x}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{f^-(x_k) + f^-(x_{k-1})}{\zeta_{k-1/2} - x_j - ih} = q^+(x) + ip^+(x).$$

При решении системы применяется метод  $LU$ -разложения. Затем вычисляется функция  $F(z)$ , действительная часть которой представляет собой касательное напряжение  $q$ , а мнимая – давление  $p$ :

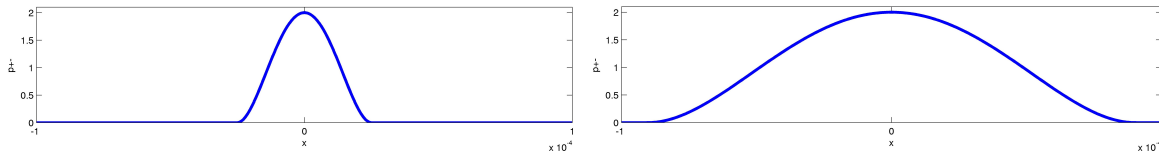
$$F_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{f^-(x_k) + f^-(x_{k-1})}{\zeta_{k-1/2} - z_j} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{f^+(x_k) + f^+(x_{k-1})}{\zeta_{k-1/2} + ih - z_j}.$$

### Результаты расчетов

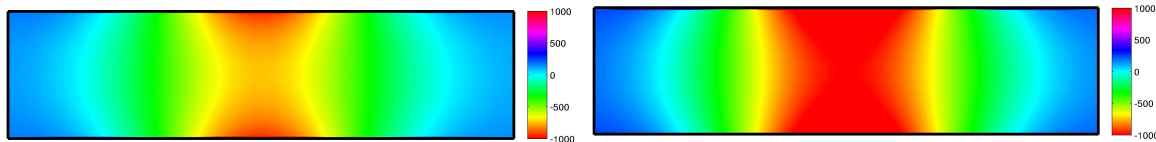
Программная реализация описанного алгоритма выполнена на MATLAB. Рассматривался прямоугольный ЖК-слой размерами  $200 \times 40$  мкм. Давление на границе задается следующим образом:

$$p^\pm = p_0 \left( \frac{\zeta}{a} + 1 \right)^2 \left( \frac{\zeta}{a} - 1 \right)^2,$$

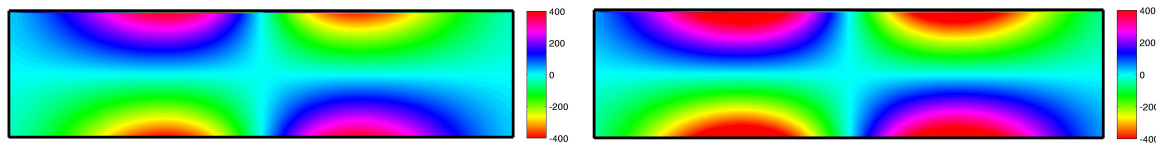
где  $p_0$  — некоторая константа, определяющая масштаб давления. Нагрузка действует в центре границы с радиусом  $a$ , который варьируется в исследовании. Функция получена с применением метода разделенных разностей Ньютона, является гладкой колоколообразной функцией с максимумом в точке  $\zeta = 0$ . Это означает, что давление плавно возрастает от крайних точек зоны нагружения  $\pm a$  до максимального значения  $p_0$  в центре. Проведены расчеты для двух задач. На рис. 2 слева радиус приложенного давления 25 мкм, справа — 90 мкм. На рис. 3 представлены линии уровня давления, на рис. 4 — линии уровня касательного напряжения. В результате среднее значение давления и касательного напряжения в объеме ЖК-слоя на рисунках справа будет значительно выше, чем слева.



**Рис. 2.** Давление  $p^\pm$  на верхней и нижней границах при  $a = 25$  мкм (слева) и при  $a = 90$  мкм (справа)



**Рис. 3.** Линии уровня давления  $p$  при  $a = 25$  мкм (слева) и при  $a = 90$  мкм (справа)



**Рис. 4.** Линии уровня касательного напряжения  $q$  при  $a = 25$  мкм (слева) и при  $a = 90$  мкм (справа)

Проведенное моделирование наглядно иллюстрирует, как размер области приложения нагрузки на границе влияет на перераспределение давления и касательного напряжения в ЖК-слое.

### Заключение

В настоящей работе представлена статическая модель жидкокристаллической среды, уравнения которой выведены из упрощенной динамической модели в акустическом приближении. Предложен алгоритм численного решения уравнений движения, основанный на комплексном анализе и численных методах. Использование уравнений Коши–Римана позволило свести систему к задаче анализа комплексных функций. Проведены расчеты, демонстрирующие работоспособность алгоритма и программы. В дальнейшем планируется решить оставшиеся уравнения и учесть силы поверхностного натяжения для исследования эффекта ориентационной термоупругости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Blinov L. M. *Structure and Properties of Liquid Crystals*. Heidelberg – New York – Dordrecht – London: Springer; 2011. 439 p. DOI: 10.1007/978-90-481-8829-1.
2. Gennes P. G. de, Prost J. *The Physics of Liquid Crystals*. New York: Oxford University Press; 1993. 597 p.
3. Frank F. C. On the Theory of Liquid Crystals. *Discuss. Faraday Soc.* 1958;25:19–28.
4. Oseen C. W. The Theory of Liquid Crystals. *Trans. Faraday Soc.* 1933;29(140):883–899.
5. Ericksen J. L. Conservation Laws for Liquid Crystals. *Trans. Soc. Rheol.* 1961;5:23–34. DOI: 10.1122/1.548883.

6. Leslie F. M. Some Constitutive Equations for Liquid Crystals. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1968;28:265–283. DOI: 10.1007/BF00251810.
7. Садовский В. М., Садовская О. В., Смолехо И. В. Моделирование динамики жидкого кристалла под действием слабых возмущений. *ПМТФ.* 2021;62(1):193–206.
8. Cosserat E. Théorie des Corps Déformables. *Chwolson's Traité Physique.* 1909:953–1173.
9. Smolekho I. V. Analysis of the Unstable State of a Nematic Liquid Crystal Based on a Simplified Dynamic Model. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.* 2024;17(2):272–281.
10. Смолехо И. В. Моделирование ориентационной термоупругости в нематических жидких кристаллах. *Успехи кибернетики.* 2024;5(4):88–94. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-12.

## РЕКОНСТРУКЦИЯ РЕОЛОГИИ ТЕКУЩЕЙ ЛАВЫ В МОДЕЛИ ТОНКОГО СЛОЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

И. А. Цепелев<sup>а</sup>, А. И. Короткий<sup>б</sup>

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

<sup>а</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8236-9834>, ✉ [tsepelev@imm.uran.ru](mailto:tsepelev@imm.uran.ru)

<sup>б</sup> ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4539-7169>, [korotkii@imm.uran.ru](mailto:korotkii@imm.uran.ru)

*Аннотация:* в работе рассматривается задача об оценке реологических характеристик течения тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости по заданной поверхности. Задача формализуется как обратная задача для данной модели. Вязкость жидкости зависит от пространственных координат. Исследование проводится в предположении некорректности этой задачи. Для численного решения некорректных задач требуется разработка специальных методов, которые гарантируют устойчивость вычисляемого решения. Предлагается воспользоваться вариационным методом и заменить исходную задачу экстремальной задачей на минимум подходящего функционала невязки между наблюдаемым параметром в модели и его модельным решением. Искомое решение задачи последовательно аппроксимируется решениями начальных задач управления, которые представляют собой нелинейные системы дифференциальных уравнений с частными производными с полностью определенными параметрами. Для минимизации функционала невязки применяется линейризованный метод сопряженных градиентов в реализации Полака–Рибьера. Градиент этого функционала и шаг спуска определяются аналитически, что позволяет существенно сократить объем вычислений. Метод конечных объемов применяется для интегрирования систем дифференциальных уравнений с частными производными с различными геометриями расчетной области. Алгоритмы численного моделирования верифицированы в пакете вычислений OpenFOAM. Компьютерные коды рассчитаны на их применение на вычислительных кластерах как с общей, так и с распределенной памятью на CPU под управлением ОС Linux.

*Ключевые слова:* вязкая жидкость, реконструкция параметров, обратная задача, вариационная задача, градиентные методы, численное моделирование, лавовые потоки.

*Благодарности:* при проведении работ был использован суперкомпьютер «Уран» Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург.

*Для цитирования:* Цепелев И. А., Короткий А. И. Реконструкция реологии текущей лавы в модели тонкого слоя движения вязкой жидкости. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):121–126.

*Поступила в редакцию:* 19.10.2025.

*В окончательном варианте:* 07.11.2025.

## RECONSTRUCTION OF LAVA RHEOLOGY IN A THIN-LAYER MODEL OF VISCOUS FLOW

I. A. Tsepelev<sup>а</sup>, A. I. Korotkii<sup>б</sup>

*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

<sup>а</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8236-9834>, ✉ [tsepelev@imm.uran.ru](mailto:tsepelev@imm.uran.ru)

<sup>б</sup> ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4539-7169>, [korotkii@imm.uran.ru](mailto:korotkii@imm.uran.ru)

*Abstract:* we consider the problem of estimating the rheological properties of a thin layer of viscous incompressible fluid flowing over a prescribed surface. The problem is formulated as an inverse problem for a model in which the fluid viscosity depends on spatial coordinates. We assume that the problem is ill-posed, requiring specialized numerical methods to ensure solution stability.

We propose a variational approach, replacing the original problem with an extremal problem that minimizes a functional representing the mismatch between observed parameters and the corresponding model solution. The solution is approximated sequentially through a series of initial control problems, formulated as nonlinear systems of partial differential equations with fully defined parameters. To minimize the mismatch functional, we apply a linearized conjugate gradient method in the Polak-Ribiere implementation. The gradient and descent step are computed analytically, significantly reducing computational cost.

We integrate the partial differential equation systems using the finite volume method for domains of various geometries. The numerical simulation algorithms are verified using the OpenFOAM computing

package. The resulting computer codes are optimized for execution on computing clusters with both shared and distributed memory on Linux-based CPUs.

*Keywords:* viscous fluid, parameter reconstruction, inverse problem, variational problem, gradient methods, numerical simulation, lava flows.

*Acknowledgements:* we used the Uran supercomputer at the N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg.

*Cite this article:* Tsepelev I. A., Korotkii A. I. Reconstruction of Lava Rheology in a Thin-Layer Model of Viscous Flow. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):121–126.

*Original article submitted:* 19.10.2025.

*Revision submitted:* 07.11.2025.

### Постановка задачи

Извержение вулкана — это процесс излияния жидкой магмы и выброса из жерла вулкана газов и пепла. Лава может распространяться по очень большим пространственным областям, для которых трехмерное моделирование гидродинамики не является эффективным. Иное дело, когда отношение вертикального размера течения к его горизонтальному размеру пренебрежимо мало. Для такого класса задач математическая модель, основанная на усредненных по глубине уравнениях Навье–Стокса несжимаемой сплошной среды, представляется более эффективной [1].

Рассмотрим процесс вытекания вязкой несжимаемой жидкости из кратера вулкана. Опишем математическую модель рассматриваемого движения жидкости. В математической модели в качестве основных уравнений состояния жидкости рассмотрим двумерную усредненную по глубине модель движения вязкой жидкости. В модельной области  $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ ,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  (см. рис. 1) движение такой вязкой жидкости на промежутке времени  $t \in [0, \vartheta]$ , где  $\vartheta$  — конечный момент времени наблюдения за процессом, представляется системой дифференциальных уравнений с частными производными (PDE) [1]:

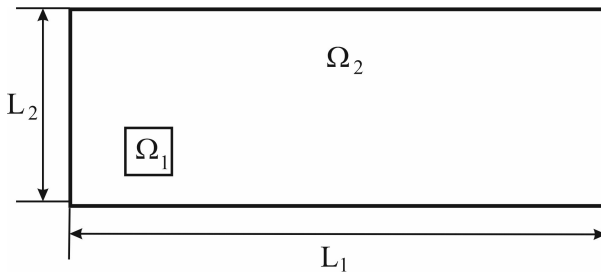


Рис. 1. Модельная область

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = w_{in}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (h\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2}\nabla (gh^2) - gh\nabla H - \gamma\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_2,$$

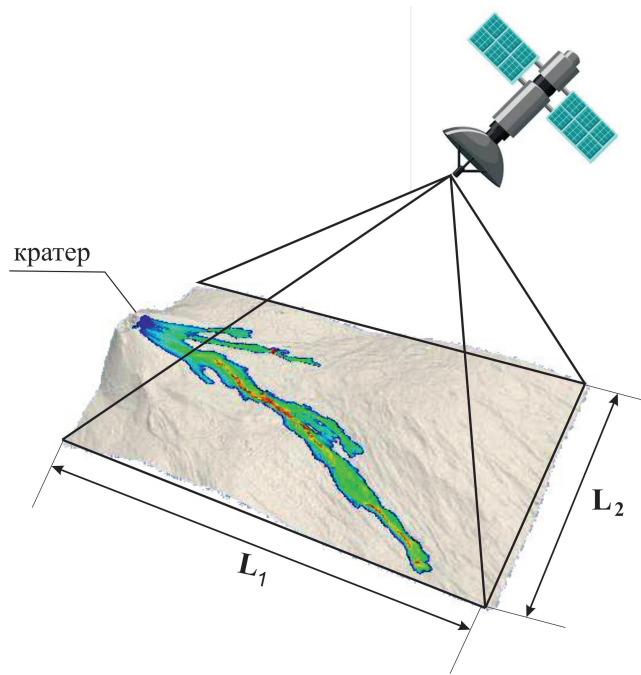
$$h(0, \mathbf{x}) = u(0, \mathbf{x}) = v(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

где  $\mathbf{x} = (x, y)$  — пространственная переменная;  $h = h(t; \mathbf{x})$  — высота столба жидкости, измеренная от уровня поверхности местности  $H = H(\mathbf{x})$  до поверхности взаимодействия жидкости с окружающей средой;  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t; \mathbf{x}) = (u(t; \mathbf{x}), v(t; \mathbf{x}))$  — усредненная скорость движения жидкости [2];  $w_{in} = w_{in}(t; \mathbf{x}) > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_1$ ,  $w_{in} = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_2$  — магнитуа скорости экструзии жидкости;  $\gamma = 3\mu\rho^{-1}h - 1$  — параметр сопротивления среды ( $ms^{-1}$ ), где  $\mu$  — эффективная вязкость жидкости [3];  $g = 9.81$  — ускорение свободного падения;  $\nabla \cdot$  — дивергенция,  $\nabla$  — градиент,  $T$  — операция транспонирования.

Ключевым аспектом, определяющим поведение геофизических потоков, является их реология — соотношение между напряжением сдвига и скоростью деформации в жидкостях. Узнать вязкость лавы в момент извержения вулкана — непростая задача. Из-за критических условий, при которых распространяются потоки лавы, в большинстве случаев вязкость лавы не поддается прямому измерению. Кроме того, вязкость зависит от многочисленных параметров жидкости (например, изменения содержания водяного пара, температурной зависимости и кристаллизации расплава), и поэтому постоянно меняется как в пространстве, так и во времени. Поскольку лава является вязкой жидкостью, ее вязкость является одним из основных параметров, который должен быть известен для хорошего компьютерного моделирования.

Обсудим содержательную сторону задачи восстановления неизвестного параметра. В процессе распространения вулканической лавы из жерла вулкана требуется найти фактическую вязкость вытекающей жидкости по измерениям толщины лавы. Данную задачу будем называть обратной задачей

по отношению к задаче нахождения решения задачи (1)–(3), которую будем называть прямой задачей. Вопрос об измерении толщины лавы в режиме реального времени изучался в [4].



**Рис. 2.** Измерение толщины лавы  $h^*$  в режиме реального времени. Цвета соответствуют измеряемым значениям

Рассмотрим функционал невязки:

$$J(\gamma) = \|h(\vartheta, \cdot; \gamma) - h^*(\cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \gamma \in \Gamma, \quad (4)$$

где  $\Gamma$  — некоторое множество допустимых искомых параметров;  $h^*(\cdot)$  — измеренная толщина лавы в момент времени  $t = \vartheta$  (см. рис. 2);  $h(\vartheta, \cdot; \gamma)$  — моделируемая толщина лавы из модели (1)–(3) на момент времени  $t = \vartheta$ , которая соответствует известному коэффициенту сопротивления  $\gamma(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Точка минимума этого функционала невязки доставит решение обратной задаче. Общий подход к решению такой задачи минимизации связан с рассмотрением задачи условной минимизации функционала невязки (4) на решениях задачи (1)–(3), в которой основные уравнения состояния учитываются в задаче безусловной минимизации введением множителей Лагранжа.

Введем в рассмотрение функционал Лагранжа [5]:

$$L(\gamma) = J(\gamma) + G(\gamma) + H(\gamma), \quad (5)$$

$$G(\gamma) = \int_0^{\vartheta} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) - f_{in} \right) z \, dx \, dt,$$

$$H(\gamma) = \int_0^{\vartheta} \int_{\Omega} \left\langle \left( \frac{\partial (h\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}\mathbf{u}^T) + gh\nabla h + gh\nabla H + \gamma\mathbf{u} \right), \mathbf{w} \right\rangle dx \, dt,$$

где  $\mathbf{w}$  и  $z$  — множители Лагранжа. Безусловный минимум функционала  $L(\gamma)$  доставляет решение задачи (4) при ограничениях (1)–(3).

Множители Лагранжа определяются из финальной задачи (задачи с данными в конечный момент времени  $t = \vartheta$ ). Ее принято называть сопряженной задачей к задаче (1)–(3):

$$-\frac{\partial z}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{u}_\gamma \right\rangle - \langle \mathbf{u}_\gamma, \nabla z \rangle - \left\langle (\mathbf{u}_\gamma \mathbf{u}_\gamma^T) : (\nabla \mathbf{w})^T \right\rangle - gh_\gamma \nabla \cdot \mathbf{w} + g \langle \nabla H, \mathbf{w} \rangle = 0, \quad (6)$$

$$-h_\gamma \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - h_\gamma \nabla z - h_\gamma \langle \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T : \mathbf{u}_\gamma \rangle + \gamma \mathbf{w} = 0, \quad (7)$$

$$z(\vartheta, \cdot) = -2(h_\gamma(\vartheta, \cdot; \gamma) - h^*(\cdot)), \quad \mathbf{w}(\vartheta, \cdot) = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение векторов,  $\langle \cdot \rangle$  — свертка матриц. Градиент функционала (4) можно записать в виде:

$$\nabla J(\gamma) = \int_0^\vartheta \langle \mathbf{u}_\gamma, \mathbf{w} \rangle dt. \quad (9)$$

Здесь  $(\mathbf{u}_\gamma, h_\gamma)$  — решение задачи (1)–(3) при заданном параметре  $\gamma$ . Обоснование вывода сопряженной системы и градиента функционала проводится аналогично [6]. При этом предполагается, что жидкость не достигает границ области  $\Omega$ .

Рассмотрим нелинейный оператор  $\mathbf{A} : (0, +\infty) \ni \gamma \rightarrow (h(\vartheta, \cdot), \mathbf{u}(\vartheta, \cdot)) \in L_2(\Omega) \times \mathbf{L}_2(\Omega)$ .

Для решения  $(h(\vartheta, \cdot; \gamma + \delta\gamma), \mathbf{u}(\vartheta, \cdot; \gamma + \delta\gamma))$  аппроксимируем  $\mathbf{A}(\gamma + \delta\gamma) \approx \mathbf{A}(\gamma) + \nabla \mathbf{A}(\gamma) \delta\gamma$ .

Разность  $\mathbf{A}(\gamma + \delta\gamma) - \mathbf{A}(\gamma) = y(\vartheta, \cdot)$  удовлетворяет следующей начальной задаче:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \nabla \cdot (h_\gamma \mathbf{v}) + \nabla \cdot (y \mathbf{u}_\gamma) = R_1; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h_\gamma \mathbf{v})}{\partial t} + \frac{\partial (y \mathbf{u}_\gamma)}{\partial t} + \nabla \cdot (y \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_\gamma^T) + \nabla \cdot (h_1 \mathbf{v} \mathbf{u}_\gamma^T) + \nabla \cdot (h_1 \mathbf{u}_\gamma \mathbf{v}^T) \\ + g(\nabla H y + \nabla h_\gamma y + h_\gamma \nabla y) + \gamma \mathbf{v} + \mathbf{u}_\gamma \delta\gamma = \mathbf{R}_2; \end{aligned} \quad (11)$$

$$y(0, \cdot) = 0;$$

где  $R_1 = \nabla \cdot (y \mathbf{v})$ ,  $\mathbf{R}_2 = -\frac{\partial (y \mathbf{v})}{\partial t} - \nabla \cdot (y \mathbf{v} \mathbf{u}_\gamma^T) - \nabla \cdot (y \mathbf{u}_\gamma \mathbf{v}^T) - \nabla \cdot (h_\gamma \mathbf{v} \mathbf{v}^T) - \nabla \cdot (y \mathbf{v} \mathbf{v}^T) - y \nabla y - \mathbf{v} \delta\gamma$ ;  
 $y = h_{\gamma+\delta\gamma} - h_\gamma$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_{\gamma+\delta\gamma} - \mathbf{u}_\gamma$ . Заметим, что  $\|R_1\|_{L_2(\Omega)} = o(\|\delta\gamma\|_{L_2(\Omega)})$ ,  $\|\mathbf{R}_2\|_{L_2(\Omega)} = o(\|\delta\gamma\|_{L_2(\Omega)})$ .

Функционал (4) минимизируем методом градиентного спуска [5]:

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n - \left( J(\gamma_n) \|\nabla J(\gamma_n)\|_{L_2(\Omega)}^{-2} \right) \nabla J(\gamma_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad \gamma_0 = 0. \quad (12)$$

Опишем схему численного решения экстремальной задачи:

0) зададим произвольное допустимое значение коэффициента  $\gamma = \gamma(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ ;

1) находим на промежутке времени  $[0, \vartheta]$  решение прямой задачи (1), (2)  $h(t, \mathbf{x}; \gamma)$ ,  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}; \gamma)$ ,  $(t, \mathbf{x}) \in [0, \vartheta] \times \Omega$ , с начальным условием (3);

2) находим на промежутке времени  $[0, \vartheta]$  решение сопряженной задачи (6), (7)  $z(t, \mathbf{x}; \gamma)$ ,  $\mathbf{w}(t, \mathbf{x}; \gamma)$ ,  $(t, \mathbf{x}) \in [0, \vartheta] \times \Omega$ , с финальным условием (8), используя решения прямой задачи (1)–(3);

3) используя результаты пп. 1, 2, определяем значение градиента функционала  $\nabla J(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$  по формуле (9);

4) определим новое значение восстанавливаемого параметра по формуле (12).

Если  $J(\gamma_n) + \|\nabla J(\gamma_n)\|_{L_2(\Omega)}^2 < \bar{\varepsilon}$ , то расчет прекращается, и  $\gamma_n$  принимается за аппроксимацию неизвестного параметра сопротивления среды, и сохраняются значения  $h(\vartheta, x, y; \gamma)$ ,  $\mathbf{u}(\vartheta, x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ ; иначе возвращаемся к п. 1 и проводим очередную итерацию. В расчетах полагается согласовывать значения параметра  $\bar{\varepsilon} > 0$  с погрешностью измерения функции  $h^*(\cdot)$  и вычислительной точностью проводимого компьютерного моделирования.

Таким образом, решение обратной задачи фактически сводится к решению серии прямых задач. Аналогичным способом будут решаться подобные задачи на любом другом отрезке времени. Учитывая то, что реология жидкости изменяется во времени, восстановление на всем отрезке времени извержения вулкана можно осуществить следующим образом. Зададим априори некоторое равномерное разбиение оси времени точками  $t_m = \vartheta m$ ,  $t_0 = 0$ ,  $m \in Z$ . Далее организуется итерационный процесс по  $m$ . На каждом промежутке времени  $[t_m, t_{m+1}]$  выполняются шаги пп. 1–4. Результаты из п. 4 будут служить начальными данными в (3) для продолжения вычислений на интервале  $[t_{m+1}, t_{m+2}]$ . Вычисление прекратится по завершении времени извержения вулкана. К этому моменту будут получены значения  $\gamma_m = \gamma(t_m, x, y)$  для каждого отрезка  $[t_m, t_{m+1}]$ , которые составят кусочно-постоянную аппроксимацию по времени коэффициента сопротивления среды.

Для решения задачи минимизации применим устойчивый итерационный метод сопряженных градиентов Полака–Рибьера [7]. Метод сопряженных градиентов является одним из наиболее эффективных градиентных методов, если рассматривать такие критерии, как точность результатов, затраты компьютерных ресурсов и реализацию его на современных ЭВМ. Последовательность аппроксимаций задачи (4) строится по правилу:

$$\begin{aligned} \gamma^{(n+1)} &= \gamma^{(n)} + \xi^{(n)} \mathbf{d}^{(n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \mathbf{d}^{(n)} &= \begin{cases} -\nabla J(\gamma^{(n)}), & n = 1, \\ -\nabla J(\gamma^{(n)}) + \beta^{(n)} \mathbf{d}^{(n-1)}, & n = 2, 3, \dots, \end{cases} \\ \beta^{(n)} &= \left\langle \nabla J(\gamma^{(n)}), \nabla J(\gamma^{(n)}) - \nabla J(\gamma^{(n-1)}) \right\rangle_{L_2(\Omega)} \left\| \nabla J(\xi^{(n-1)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^{-2}, \quad n = 2, 3, \dots, \\ \xi^{(n)} &= -\left\langle \mathbf{d}^{(n)}, \nabla J(\gamma^{(n)}) \right\rangle_{L_2(\Omega)} \left\| \nabla \mathbf{A}(\gamma^{(n)}) \mathbf{d}^{(n)} \right\|_{L_2(\Omega)}^{-2} \mathbf{d}^{(n)}, \\ \nabla \mathbf{A} \delta \gamma &= y(\vartheta, \cdot), \end{aligned} \quad (13)$$

$y$  – компонента решения  $(y, \mathbf{v})$  задачи (10), (11) при  $R_1 = 0$ ,  $\mathbf{R}_2 = 0$ .

### Оценка эффективности кода

Для организации вычислительного эксперимента использовался пакет OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation) [8], в котором реализовано численное решение дифференциальных уравнений с частными производными методом конечных объемов [9]. Для отладки программных кодов для модели (1)–(3) проведено сравнение с аналитическим решением задачи [10]. Подробно тестовые эксперименты и результаты такого компьютерного моделирования описаны в [2]. Верификация кодов решателя прямой задачи проведена в работе [12].

Для проверки кодов решения сопряженной задачи (7), (8) и формулы (9) для градиента функционала проведен тест [11]. Имеем:

$$J(\gamma + \delta\gamma) - J(\gamma) = \delta\gamma \nabla J(\gamma) + o\left(\|\delta\gamma\|_{L_2(\Omega)}\right). \quad (14)$$

Выберем параметр  $\gamma > 0$  достаточно далеко от решения обратной задачи ( $\|\nabla J(\gamma)\|_{L_2(\Omega)} > 0$ ) и для  $\varepsilon > 0$  зададим его приращение в виде:

$$\delta\gamma = \varepsilon \nabla J(\gamma) / \|\nabla J(\gamma)\|_{L_2(\Omega)}$$

Перепишем равенство (14) в следующем виде для  $\varepsilon > 0$ :

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{J(\gamma + \varepsilon \nabla J(\gamma) / \|\nabla J(\gamma)\|_{L_2(\Omega)}) - J(\gamma)}{\varepsilon \|\nabla J(\gamma)\|_{L_2(\Omega)}^2} = 1 + O(\varepsilon).$$

Для значений  $\varepsilon$ , отличных от машинного нуля, но достаточно малых, должны получить значение для  $\varphi(\varepsilon)$ , близкое к 1 (см. рис. 3). Это подтверждает качество сопряженной модели в вычислениях градиента функционала невязки.

### Заключение

В работе предложен конструктивный устойчивый метод численного решения некорректной обратной задачи об определении неизвестного коэффициента сопротивления среды для восстановления эффективной вязкости в модели растекания тонкого слоя жидкости по определенному рельефу местности под действием силы тяжести. Модели тонкого слоя являются физически обоснованным описанием процесса распространения лавы и хорошим компромиссом между полным трехмерным моделированием и необходимостью сокращения вычислительного времени для обработки данных. Представленный метод может быть использован для аппроксимации параметров, которые не могут быть измерены с помощью измерительной аппаратуры. Численные методы вычислительной гидродинамики могут дополнять лабораторные эксперименты благодаря возможности запуска виртуальных тестовых примеров. Алгоритм решения основан на сочетании аналитических методов исследования задач управления и эффективных устойчивых методов решения экстремальных задач. Построен численный метод совместного решения прямой и сопряженной задач. Реализация алгоритма в пакете OpenFOAM позволила создать программные коды для задачи, которые можно легко адаптировать для конкретных случаев.

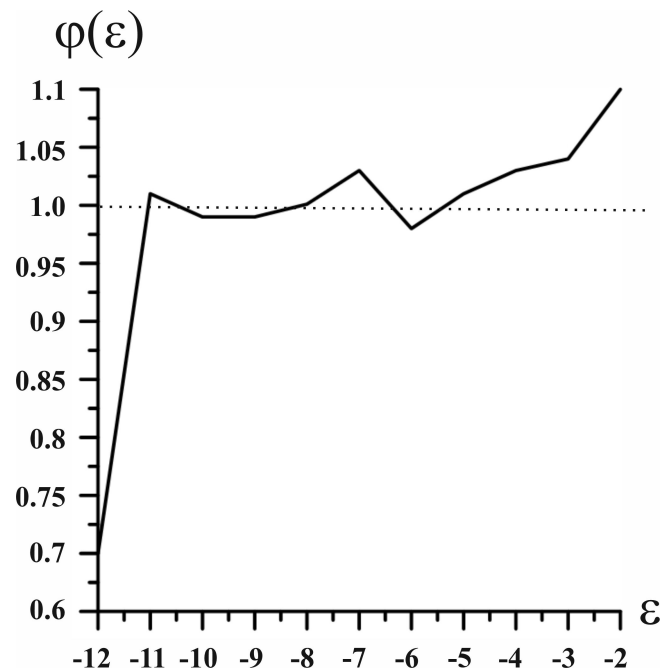


Рис. 3. Оценка качества вычисления градиента функционала  $J(\gamma)$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Costa A., Macedonio G. Numerical Simulation of Lava Flows Based on Depth-Averaged Equations. *Geophysical Research Letters*. 2005;32:L05304. DOI: doi.org/10.1029/2004GL021817.
2. Короткий И. А., Цепелев И. А. Численное моделирование извержения вулкана Этна с применением усредненной по глубине модели потока лавы. *Выч. механика сплошных сред*. 2024;17(3):362–374. DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.3.30.
3. Kelfoun K., Druitt T. H. Numerical Modeling of the Emplacement of Socompa Rock Avalanche, Chile. *Journal of Geophysical Research*. 2005;110(B12). DOI: 10.1029/2005JB003758.
4. Ganci G. et al. Satellite-Based Reconstruction of the Volcanic Deposits during the December 2015 Etna Eruption. *Data*. 2019;4(3):120. DOI: doi.org/10.3390/data4030120.
5. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации*. М.: Факториал; 2002. 824 с.
6. Короткий А. И., Стародубцева Ю. В., Цепелев И. А. Гравитационное течение двухфазной вязкой несжимаемой жидкости. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2021;27(4):61–73. DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-61-73.
7. Nocedal J., Wright S. J. *Numerical Optimization*. New York: Springer; 1999. 664 p.
8. Jasak H. OpenFOAM: Open Source CFD in Research and Industry. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering* 2009;1(2):89–94. DOI: doi.org/10.2478/IJNAOE-2013-0011.
9. LeVeque R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press; 2002. 580 с.
10. Huppert H. E. The Propagation of Two-Dimensional and Axisymmetric Viscous Gravity Currents over a Rigid Horizontal Surface. *J. of Fluid Mechanics*. 1982;121:43–58. DOI: 10.1017/S0022112082001797.
11. Navon I. M., Zou X., Derber J., Sela J. Variational Data Assimilation with an Adiabatic Version of the NMC Spectral Model. *Monthly Weather Rev.* 1992;120(7):1433–1446.
12. Цепелев И. А., Короткий А. И. Применение гибридных вычислителей для моделирования лавового потока. *Успехи кибернетики*. 2024;5(4):103–109.

## СВЯЗЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И СИСТЕМ ОДУ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ГЕННЫХ СЕТЕЙ

**О. Ф. Воропаева**

*Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий,  
г. Новосибирск, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7349-7406>, ✉ [vorop@ict.nsc.ru](mailto:vorop@ict.nsc.ru)*

*Аннотация:* в вычисленных экспериментах на примере моделей сети p53–микроРНК показана связь нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием и специального вида системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены вопросы практических приложений.

*Ключевые слова:* сеть p53–микроРНК, система ОДУ, система уравнений с запаздыванием, предельный переход.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий.

*Для цитирования:* Воропаева О. Ф. Связь нелинейных систем уравнений с запаздыванием и систем ОДУ высокой размерности в математических моделях генных сетей. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):127–133.

*Поступила в редакцию:* 15.10.2025.

*В окончательном варианте:* 12.11.2025.

## THE RELATIONSHIP BETWEEN NONLINEAR SYSTEMS OF DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND HIGH-DIMENSIONAL ODE SYSTEMS IN MATHEMATICAL MODELS OF GENE NETWORKS

**O. F. Voropaeva**

*Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk,  
Russian Federation  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7349-7406>, ✉ [vorop@ict.nsc.ru](mailto:vorop@ict.nsc.ru)*

*Abstract:* we studied the relationship between a nonlinear system of delay differential equations and a specific type of ordinary differential equation system using models of the p53–microRNA network. We also explored potential practical applications of this relationship.

*Keywords:* the p53–microRNA network, ODE system, system of delay differential equations, passage to the limit.

*Acknowledgements:* this is a part of a government contract granted by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation to the Federal Research Center for Information and Computational Technologies.

*Cite this article:* Voropaeva O. F. The Relationship between Nonlinear Systems of Delay Differential Equations and High-Dimensional ODE Systems in Mathematical Models of Gene Networks. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):127–133.

*Original article submitted:* 15.10.2025.

*Revision submitted:* 12.11.2025.

### Введение

Идея описания сложного трудноформализуемого объекта (системы), насколько это возможно, более понятной, наблюдаемой, управляемой и вычислительно эффективной, но все еще содержательной математической моделью находит отражение в классических моделях механики, а в современной биологии поддерживается теорией генных сетей. Считается, в частности, что более ясное понимание фундаментальных закономерностей развития сложных систем на макроуровне не требует полного учета механизмов функционирования системы на ее микроуровнях. Эта точка зрения математически реализуется в минимальных (малоразмерных) базовых моделях, основанных на дифференциальных уравнениях с запаздыванием (ДУЗ). В случае процессов, связанных с передачей биохимических сигналов в генных сетях, параметр запаздывания имеет смысл среднего времени, требуемого для реализации сложного процесса, который обеспечивает достижение «конечной» цели — формирование отклика

некоторого элемента системы (например, белка) на поступающий сигнал, или для перехода некоторого сегмента сети из начального состояния в финальное.

В рамках теории гипотетических генных сетей та же самая проблема может быть решена введением в модель большого числа быстропротекающих (в пределе — мгновенных) гипотетических «промежуточных» стадий, которые фактически не являются точками действия регуляторных механизмов, так что из всех этих стадий важны лишь начальная и конечная, а также характерное время выполнения всех этих стадий. И хотя этот путь приводит к необходимости решения систем ОДУ высокой размерности ( $n \gg 10$ ), модель остается содержательной в той же мере, что и минимальные модели на основе ДУЗ.

Начало активных теоретических и численных исследований в этой области было положено, в частности, в работах [1, 2]. Основополагающее значение имеют несколько «предельных» теорем, доказывающих для важных с точки зрения биологии модельных примеров существование предельного перехода от «многостадийных» систем высокой размерности к дифференциальному уравнению с запаздыванием, а также возможность аппроксимации уравнения с запаздыванием с помощью специальных классов систем ОДУ. В настоящей работе, являющейся развитием и продолжением [3, 4], представлены новые примеры и подводятся итог численного анализа подобной связи для нелинейной системы дифференциальных уравнений с несколькими запаздывающими аргументами, представляющей интерес как математическая модель гипотетической генной сети с двумя петлями обратной связи с большим потенциалом в контексте практических приложений в биомедицине.

### **Постановка задачи и методология ее решения**

#### **Вычислительная схема**

Установить явную связь моделей, основанных на ДУЗ, с соответствующими им моделями в виде систем ОДУ в тех случаях, теоретический анализ которых связан со значительными трудностями или попросту невозможен, позволяет реализация вычислительной схемы [2, 3]. Основное содержание вычислительной схемы составляет проверка условий «предельных» теорем. Алгоритм действий состоит в следующем: а) численное решение начальной задачи для системы, основанной на ДУЗ, и формирование последовательности численных решений задачи Коши для системы ОДУ, размерность которой наращивается за счет увеличения количества «промежуточных» стадий  $n$ ; б) анализ сходимости компонент вектора решения системы ОДУ, определяющих финальную стадию моделируемого процесса, к решению системы ДУЗ; в) проверка сходимости к нулю компонент решения системы ОДУ, описывающих «промежуточные» стадии в зависимости от  $n$ ; г) анализ близости систем по качественным свойствам при  $n \rightarrow \infty$ . Принципиальное значение имеет условие устойчивости вида  $n \leq C\tau/h$  ( $C \approx 1$ ), которое для сходимости требует согласованности в выборе трех ключевых параметров дифференциальных задач и их дискретного аналога — параметра запаздывания  $\tau$ , количества гипотетических стадий  $n$  и шага интегрирования  $h$ .

Для всех моделей настоящей работы принимаются нулевые начальные условия. Алгоритм численного решения начальной задачи для систем ДУЗ и ОДУ основан на применении метода шагов и методов семейства Адамса 1–2-го порядка, а также идеи блочного аналога метода Зейделя [3].

#### **Базовая минимальная модель динамики сигнального пути $P_1 - P_2 - P_3$ (модель 1)**

Пусть рассматривается система общего вида  $P_1 - P_2 - P_3$ , которая представляет собой «центральное» звено реальной сложной генной сети, организованное по схеме на рисунке 1а: элемент этой системы  $P_1$  вовлечен в петлю отрицательной обратной связи  $P_1 - P_2$ , где  $P_2$  является отрицательным регулятором  $P_1$ . При этом  $P_2$  сам находится под контролем элемента  $P_3$ , так что через  $P_2$  замыкается петля положительной обратной связи  $P_1 - P_3$ , причем реализация этих связей характеризуется наличием временных лагов. Данная схема является в достаточной мере универсальной — по такому принципу могут быть организованы самые разные группы элементов реальных генных сетей. Одним из наиболее ярких примеров служит сеть белка p53 — молекулярного биомаркера рака, деменций и других дегенеративных заболеваний, обеспечивающего стабильность генома и генетическую однородность клеток через запуск генетических программ старения, гибели клеток (апоптоза) и репарации ДНК после повреждения. Ключевое звено этой сети, согласно имеющимся данным (см. [3, 4] и библиографию к ним), образуют сам белок p53 ( $P_1$ ), его белок-ингибитор ( $P_2$ ) и подконтрольные p53 микроРНК ( $P_3$ ) (рис. 1б).

Принятая в настоящей работе математическая модель имеет следующий вид [3]:

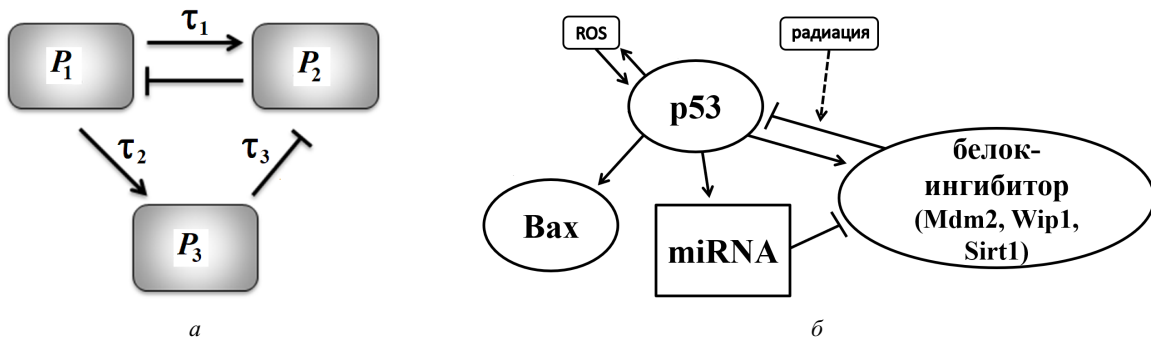
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = a_1 - a_2 f(p_1(t), p_2(t), k_1) - a_3 p_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = b_1 g(p_1(t - \tau_1), p_2(t - \tau_1), k_g, k_1) - b_2 p_2(t) - b_3 f(p_2(t - \tau_3), p_3(t - \tau_3), k_2), \quad (2)$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = c_1 + c_2 f(p_1(t - \tau_2), p_3(t - \tau_2), k_3) - c_3 p_3(t), \quad (3)$$

где  $p_q$  — уровень  $P_q$  ( $q = 1, 2, 3$ ); функции  $f$  и  $g$  — известные кинетические модели типа Гольдбетера–Кошланда и Михаэлиса–Ментен:

$$f(u, v, k) = 2uv \left( u + v + k + \sqrt{(u + v + k)^2 - 4uv} \right)^{-1}, \quad g(u, v, k_g, k) = \frac{u - f(u, v, k)}{u + k_g - f(u, v, k)}. \quad (4)$$



**Рис. 1.** Общая схема «центрального звена» (а) и его структура в моделируемой генной сети (б) Заостренные стрелки указывают на положительную прямую связь; тупые — на отрицательное (ингибирующее) воздействие; двойные стрелки обозначают обратную связь

Отметим, что в [3] модель 1 использовалась в качестве базовой минимальной модели при математическом моделировании функционирования конкретных сегментов проапоптозного сигнального пути p53, включающих p53, белки-ингибиторы Mdm2, Wip1 или Sirt1, белки-мишени p21 и Bax, одно или несколько известных семейств p53-зависимых микроРНК (далее — miR) при дегенеративных заболеваниях, терапевтических и стрессовых воздействиях. Для формального математического описания лабораторных экспериментов в [1] был разработан также уточняющий за счет мРНК p53 вариант модели 1 (далее — модель 1а), который не выявил значимых отличий в результатах моделирования (см., например, рис. 2а). Показана умеренная чувствительность параметров системы к малым изменениям параметров и к шуму в экспериментальных измерениях. Особое внимание уделялось анализу робастности модели, а также изучению биологически значимых режимов ее функционирования (стационарные, периодические и квазипериодические).

### «Многостадийная» модель динамики сигнального пути $P_1 - P_2 - P_3$ (модель 2)

Рассмотрим также систему ОДУ, которая предположительно представляет функционирование системы  $P_1 - P_2 - P_3$  в фиксированный момент времени как двухэтапный нелинейный процесс, где каждый из двух этапов разворачивается как многостадийный процесс с упрощенным линейным представлением вклада тех факторов, которые не вошли в состав параметров состояния модели 1:

$$\frac{dp'_1(t)}{dt} = a_1 - a_2 f(p'_1(t), p'_2(t), k_1) - a_3 p'_1(t), \quad (5)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = b_1 g(p'_1(t), p'_2(t), k_g, k_1) - b_3 f(p'_2(t), p'_3(t), k_2) - \frac{n-1}{\bar{\tau}} x_1(t), \quad (6)$$

$$\frac{dx_l(t)}{dt} = \frac{n-1}{\bar{\tau}} (x_{l-1}(t) - x_l(t)), \quad l = 2, \dots, n-1, \quad (7)$$

$$\frac{dp'_2(t)}{dt} = \frac{n-1}{\bar{\tau}} x_{n-1}(t) - b_2 p'_2(t), \quad (8)$$

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = c_2 f(p'_1(t), p'_3(t), k_3) - \frac{m-1}{\tau_2} z_1(t), \quad (9)$$

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = \frac{m-1}{\tau_2} (z_{k-1}(t) - z_k(t)), \quad k = 2, \dots, m-1, \quad (10)$$

$$\frac{dp'_3(t)}{dt} = c_1 + \frac{m-1}{\tau_2} z_{m-1}(t) - c_3 p'_3(t). \quad (11)$$

Здесь гипотетические «промежуточные» стадии в функционировании звеньев  $P_1 - P_2$  и  $P_1 - P_3$  определяются динамикой переменных  $x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)$  и  $z_1(t), \dots, z_{m-1}(t)$  соответственно; переменные  $p'_q(t)$  определяют динамику параметров состояния динамической системы на условной финальной стадии двухэтапного процесса;  $\bar{\tau}$  имеет смысл характерного времени преодоления «промежуточных» стадий, соответствующего условиям конкретной задачи. Согласно условиям «предельных» теорем, в численных экспериментах необходимо показать, что при нулевых начальных условиях имеет место равномерная сходимость компонент векторов решения моделей 1 и 2:  $\|p_q(t) - p'_q(t)\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $m \rightarrow \infty$ ; при этом также существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_l(t) = 0$  и  $\lim_{m \rightarrow \infty} z_k(t) = 0$  для всех  $0 < l < n$  и  $0 < k < m$  соответственно. В ходе численных экспериментов для более тщательного контроля меры отклонения и скорости сходимости «предельного» перехода по каждой компоненте вектора решения использовались дискретные аналоги векторных норм  $\varepsilon_q = \|p_q - p'_q\|_C$  и  $\delta_q = \|p_q - p'_q\|_1$ . Следует отметить, что ранее предельные свойства моделей, подобных моделям 1 и 2, были в полном объеме продемонстрированы в [3] для системы с единственной петлей обратной связи  $P_1 - P_2$  (при  $b_3 = 0$ ), там же впервые идея связи двух постановок задач рассматривалась применительно к условиям лабораторного эксперимента в контексте оптимального числа «промежуточных» стадий в модели на основе ОДУ. В [4] были представлены некоторые начальные сведения о связи решений моделей 1 и 2 в предложенных выше постановках.

### Примеры практических приложений

#### *Активация сети p53-Wip1-miR-16 в клетках остеосаркомы человека*

В лабораторных экспериментах [5] воздействие ионизирующим облучением на раковые клетки линии U2OS вызывало искусственное повреждение ДНК, что, в свою очередь, приводило к активации «центрального» сегмента p53-Wip1-miR-16 генной сети, контролирующей состояние ДНК и формирующей клеточные ответы на сигналы о повреждении ДНК. В этом процессе белок p53 выполняет роль онкосупрессора (инициатора апоптоза раковых клеток), а белок Wip1 действует как критический ингибитор сигнального пути p53 и онкоген, однако эта его функция находится под контролем miR-16. Для описания лабораторных данных [5] используются модели 1 и 2 при одних и тех же значениях параметров [3]. На рисунке 2а показано, что полученные численные решения моделей 1, 1а и 2 весьма близки к экспериментальным данным [5]. Процесс сходимости решений моделей 1 и 2 (при конечных  $M = n = m$ ) иллюстрируют данные на рисунке 2б: видно, что  $\varepsilon_q$  и  $\delta_q$  ( $q = 1, 2$ ) имеют тенденцию к выходу на асимптотику  $M^{-1}$  с ростом числа стадий (эта оценка повторяет результат [3], полученный на модельном примере), однако процесс сдерживается за счет более «капризного» поведения  $p'_3$ . Следует отметить также, что основной трудностью реализации вычислительного эксперимента стала не растущая размерность системы ОДУ в модели 2, а проблемы выполнения жестких требований по устойчивости  $n \leq C\tau/h$  на фоне существенного разброса в значениях параметров запаздывания. Реализация вычислительного эксперимента существенно облегчается посредством контроля шага сетки и «синхронизации» стадий (когда полагается  $M = n = m$ ) и шага интегрирования.

#### *Математические модели активации пути p53, ассоциированной с ранними признаками болезни Альцгеймера у трансгенных мышей с синдромом Дауна*

Снижение когнитивных функций мозга из-за массового самоуничтожения (через генетически детерминированную программу апоптоза) нейронов в гиппокампе и других отделах головного мозга проявляется у человека с синдромом Дауна и у его живых моделей (например, мышей) в раннем возрасте. В исследованиях последних лет эти ранние молекулярно-клеточные признаки болезни Альцгеймера рассматриваются как важнейший фактор патогенеза при синдроме Дауна, причем повышенная

готовность нейронов к запуску программы самоликвидации ассоциируется, прежде всего, с нарастанием оксидативного стресса (гиперпродукцией активных форм кислорода и азота). В [6] показано, что активация апоптоза в этом патологическом процессе связана именно с активацией проапоптозного сигнального пути p53–Sirt1–Bax. Для описания динамики p53–Sirt1–Bax, наблюдаемой в лабораторных экспериментах [6], привлекается модель 3, в основе которой лежит система (1)–(4), причем в ходе решения задачи структурной и параметрической идентификации этой модели [3] было установлено, что время запаздывания  $\tau_1 \leq 1$  (день), что, очевидно, весьма мало в сравнении с периодом лабораторных наблюдений (около полутора лет). Модель 3 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= k_1 + k_2 \frac{p_1}{p_1 + k_3} R - k_4 R, \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= a_1 + \frac{a_{1R} R}{R + a_{2R}} - a_2 f(p_1, p_2, k_1) - a_3 p_1, \\ \frac{dp_2}{dt} &= b_0 + b_1 g(p_1, p_2, k_g, k_1) - b_2 p_2 - b_3 f(p_2(t - \tau_3), p_3(t - \tau_3), k_2), \\ \frac{dp_3(t)}{dt} &= c_1 + c_2 f(p_1(t - \tau_2), p_3(t - \tau_2), k_3) - c_3 p_3(t), \\ \frac{dp_4}{dt} &= d_1 + d_2 g(p_1(t - \tau_4), p_4(t - \tau_4), d_4) - d_3 p_4.\end{aligned}$$

Здесь и далее  $p_1$  – уровень активной (ацетилированной) формы белка p53,  $p_2$  – уровень Sirt1,  $p_3$  – уровень miR-34a,  $p_4$  – уровень белка Bax,  $R$  – уровень оксидативного стресса. Рассмотрим также в качестве модели систему ОДУ, которая может применяться для описания функционирования той же самой геномной сети. Эта система (модель 4) составлена по тому же принципу, что и система (5)–(11), но вместо (5) в нее входят уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dR'}{dt} &= k_1 + k_2 \frac{p'_1}{p'_1 + k_3} R' - k_4 R', \\ \frac{dp'_1}{dt} &= a_1 + \frac{a_{1R} R'}{R' + a_{2R}} - a_2 f(p'_1, p'_2, k_1) - a_3 p'_1(t),\end{aligned}$$

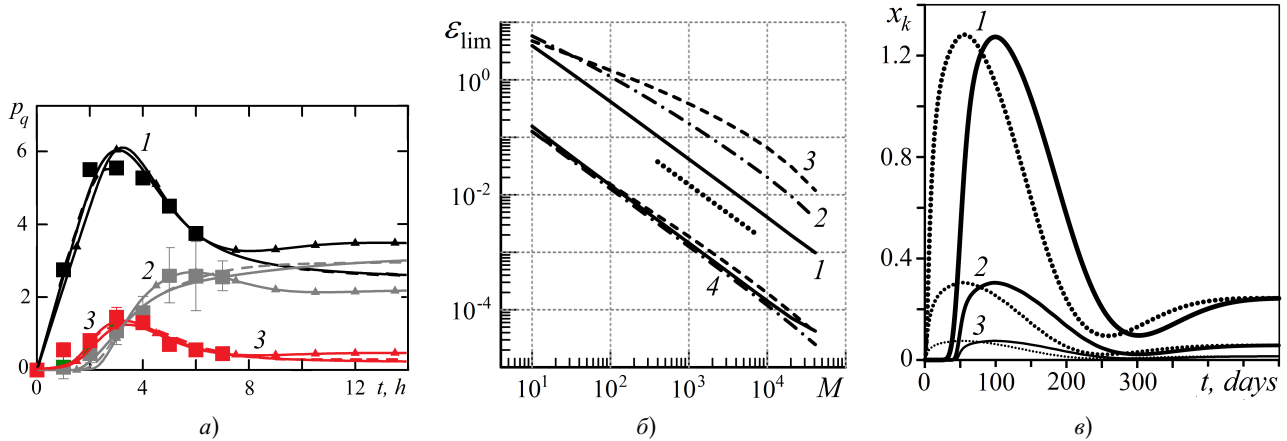
к ним присоединяются уравнения (6)–(11) (вклад  $b_0$  следует учесть только на последней стадии (8)), а также новая цепочка уравнений, воспроизводящих динамику  $p_4$  с учетом  $\kappa$  «промежуточных» стадий на этапе передачи биохимического сигнала от p53 к Bax:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= c_2 g(p'_1, p'_4, k_{y3}) - \frac{\kappa - 1}{\tau_4} y_1, \quad \frac{dy_k}{dt} = \frac{\kappa - 1}{\tau_4} (y_{k-1} - y_k), \quad k = 2, \dots, \kappa - 1, \\ \frac{dp'_4}{dt} &= d_1 + \frac{\kappa - 1}{\tau_4} y_{\kappa-1} - d_3 p'_4.\end{aligned}$$

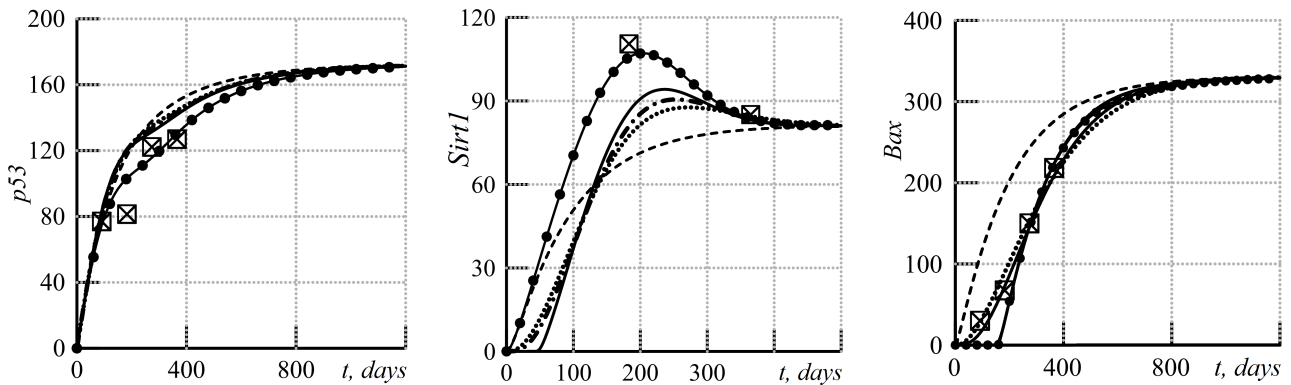
В согласии с экспериментальными данными принимаются нулевые начальные условия. Оптимальные значения параметров можно найти в [3]. На рисунке 2в показаны в динамике характеристики «промежуточных» стадий для трех наиболее показательных значений  $x_k$ , полученных при  $M = \{32, 132, 532\}$ . Можно заметить, что основная роль линейных стадий состоит в коррекции «фазового» сдвига соответствующей переменной по временной шкале на величину запаздывания. При этом введение «промежуточных» стадий можно рассматривать как попытку замены разрывной функции  $p_q(t)$  ее «достаточно гладким» аналогом  $p'_q(t)$  (см. также [3]). Эти данные указывают также на то, что, по-видимому, существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_l(t) = 0$  и  $\lim_{m \rightarrow \infty} z_k(t) = 0$  для всех  $0 < l < n$  и  $0 < k < m$  соответственно, однако процесс сходимости решений двух моделей весьма затруднен из-за комплекса вышеназванных причин.

В качестве иллюстрации на рисунке 3 приведены в сопоставлении с экспериментальными данными [6] основные компоненты векторов решений моделей 3 и 4 при достаточно большом числе стадий  $M$ . Поэтому далее представляется важным проанализировать адекватность модели на основе ОДУ в контексте ее использования для описания лабораторных данных [6] при разумном количестве стадий или (в методических целях) при их полном отсутствии. Результат эксперимента, в котором полагалось  $M = 2$  или 3, свидетельствует о том, что модель 4 может описывать условия лабораторного

эксперимента [6] с точностью около 20 %. При этом для лучшего согласия с экспериментом может потребоваться корректировка значений параметров, априори настроенных на модель 3 с запаздыванием, однако вероятен и отрицательный результат перенастройки. Наиболее проблемным оказался вариант с отсутствием стадий: погрешность по двум из трех представленных на рисунке 3 параметрам состояния системы приближается к 50 %, не отражая при этом реальную динамику уровней Sirt1 и Bax. Поэтому вопрос о работоспособности «бесстадийного» варианта модели 4 остается открытым для пользователя, требуя нового раунда решения задачи идентификации модели на основе ОДУ.



**Рис. 2.** а) динамика системы  $p53$ – $Wip1$ – $miR16$  в раковых клетках с  $p53$  дикого типа под влиянием гамма-облучения. Линии: немаркированные – модель 1, маркированные – модель 1а, штриховые – модель 2; квадраты – эксперимент [5]; б) погрешность «предельного» перехода  $\varepsilon_{lim} = \varepsilon_q$  (1–3) и  $\varepsilon_{lim} = \delta_q(4)$ , пунктир –  $\varepsilon_{lim} = M^{-1}$ . Линии: 1 –  $q = 1$  ( $p53$ ), 2 –  $q = 2$  ( $Wip1$ ), 3 –  $q = 3$  ( $miR16$ ); 4 – модель 4. Динамика характеристик «промежуточных» стадий  $x_k$ : 1 –  $M = 32$ , 2 –  $M = 132$ , 3 –  $M = 532$ ; пунктиры –  $k = 2$ , сплошные –  $k = M - 1$



**Рис. 3.** Активация пути  $p53$ , ассоциированная с ранними признаками болезни Альцгеймера при синдроме Дауна. Модель 3 – маркированные линии; квадраты – эксперимент [6]. Модель 4: немаркированные линии –  $M = 232$ , пунктиры –  $M = 2$ , штрихпунктирные –  $M = 3$ , штриховые –  $M = 0$ ;  $M = n = t$

Поведем итог. Как и ожидалось, вычислительные эксперименты показали, что с нарастанием сложности математического представления биологических процессов возрастает сложность решаемой задачи как в части поиска структуры соответствующих друг другу систем ОДУ и систем уравнений с запаздыванием, так и в численной реализации «предельного» перехода. Тем не менее на примере моделирования сети  $p53$  продемонстрирован ряд существенных признаков связи двух постановок задач в виде «предельного» перехода. Одновременно предпринята попытка предложить в качестве альтернативы модели с несколькими запаздывающими аргументами весьма близкую по свойствам модель на основе ОДУ с разумным числом гипотетических «промежуточных» стадий, обеспечивающих достаточ-

ную близость к экспериментальным временным рядам. Это открывает возможности для использования в практических расчетах обеих постановок задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления. *Сиб. журн. индустр. математики*. 2004;7(1):73–94.
2. Фадеев С. И., Лихошвай В. А., Штокало Д. Н., Королев В. К. Об исследовании математических моделей матричного синтеза нерегулярных полимеров ДНК, РНК и белков. *Сиб. электронные матем. изв.* 2010;7:467–475.
3. Воропаева О. Ф., Сенотрусова С. Д., Шокин Ю. И. Применение минимальных математических моделей динамики сигнального пути p53 — микроРНК к анализу лабораторных данных. *Вычислительные технологии*. 2020;25(6):4–49. DOI: 10.25743/ICT.2020.25.6.002.
4. Voropaeva O., Senotrusova S. On the Implementation of the System-Biological Approach in Modeling the Functioning of Degenerative Diseases Biomarkers. *2023 Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems (AMCSM)*. Voronezh, Russian Federation. 2023:1-7. DOI: 10.1109/AMCSM59829.2023.10526198.
5. Zhang X., Wan G., Mlotshwa S. et al. Oncogenic Wip1 Phosphatase is Inhibited by miR-16 in the DNA Damage Signaling Pathway. *Cancer Research*. 2010;70(18):7176–7186. DOI: 10.1158/0008-5472.CAN-10-0697.
6. Lanzillotta C., Baniowska M. R., Prestia F. et al. Shaping Down Syndrome Brain Cognitive and Molecular Changes Due to Aging Using Adult Animals from the Ts66Yah Murine Model. *Neurobiol Dis.* 2024;196:106523. DOI: 10.1016/j.nbd.2024.106523.

## РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ ЛОБОВОГО СТОЛКНОВЕНИЯ НЕЙРОЭВОЛЮЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Д. Д. Япаров<sup>1,a</sup>, С. В. Бессмертный<sup>2,b</sup>, Ю. Д. Данилова<sup>2,c</sup>

<sup>1</sup> Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт, г. Москва, Российская Федерация

<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9106-2773>, ✉ [iaparovdd@susu.ru](mailto:iaparovdd@susu.ru)

<sup>b</sup> [bessmertnyi.sv@phystech.edu](mailto:bessmertnyi.sv@phystech.edu), <sup>c</sup> [danilova.iud@phystech.edu](mailto:danilova.iud@phystech.edu)

*Аннотация:* в статье рассматривается разработка системы предотвращения фронтальных столкновений на основе искусственных нейронных сетей. Обучение нейронной сети проводилось с использованием эволюционных алгоритмов, позволяющих оптимизировать структуру сети и гиперпараметры, включая функции активации и количество скрытых слоев. Качество моделей оценивалось по функции потерь и времени обработки данных. В ходе вычислительных экспериментов были отобраны лучшие модели, которые затем прошли верификацию на реальных данных с автомобилем и различными режимами реакции водителя.

Результаты испытаний показали, что предложенная модель демонстрирует высокую точность и эффективность, что подтверждается как на обучающих выборках, так и в реальных условиях эксплуатации, что делает ее перспективным решением для повышения безопасности дорожного движения.

*Ключевые слова:* нейронные сети, обработка информации, системы предотвращения фронтальных столкновений, эволюционные алгоритмы, стратегии обучения.

*Для цитирования:* Япаров Д. Д., Бессмертный С. В., Данилова Ю. Д. Разработка модели системы предотвращения лобового столкновения нейроэволюционным методом. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):134–139.

*Поступила в редакцию:* 15.10.2025.

*В окончательном варианте:* 07.11.2025.

## DEVELOPMENT OF A FRONTAL COLLISION AVOIDANCE SYSTEM USING A NEUROEVOLUTIONARY APPROACH

D. D. Yaparov<sup>1,a</sup>, S. V. Bessmertnyi<sup>2,b</sup>, Iu. D. Danilova<sup>2,c</sup>

<sup>1</sup> South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation

<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9106-2773>, ✉ [iaparovdd@susu.ru](mailto:iaparovdd@susu.ru)

<sup>b</sup> [bessmertnyi.sv@phystech.edu](mailto:bessmertnyi.sv@phystech.edu), <sup>c</sup> [danilova.iud@phystech.edu](mailto:danilova.iud@phystech.edu)

*Abstract:* we developed a frontal collision avoidance system based on artificial neural networks. We trained the network using evolutionary algorithms, which optimized the network structure and hyperparameters, including activation functions and the number of hidden layers. We evaluated model quality using the loss function and data processing time.

During computational experiments, we selected the best-performing models and verified them on real-world data with a car under various driver response scenarios. The test results showed that the proposed model achieves high accuracy and efficiency, both on training data and in real operating conditions, making it a promising solution for enhancing road safety.

*Keywords:* neural networks, information processing, frontal collision avoidance systems, evolutionary algorithms, learning strategies.

*Cite this article:* Yaparov D. D., Bessmertnyi S. V., Danilova Iu. D. Development of a Frontal Collision Avoidance System Using a Neuroevolutionary Approach. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):134–139.

*Original article submitted:* 15.10.2025.

*Revision submitted:* 07.11.2025.

### Введение

Фронтальные столкновения считаются самыми опасными из всех аварийных ситуаций на дороге. Здесь влияет множество факторов: состояние дорожного покрытия, погодные условия, состояние

автомобиля и другие. Самый страшный фактор – человеческий. Несмотря на различные меры предотвращения столкновений на дороге (например, барьеры), водители прибегают к необдуманным действиям. Многие из них совершают обгоны на трассе, что приводит к движению по встречной полосе, а это, в свою очередь, иногда заканчивается столкновением с движущимся транспортным средством [1]. В связи с этим ставится задача разработки системы для предотвращения фронтальных столкновений на основе нейронных сетей. Перспективным направлением для решения этой задачи является разработка системы с помощью искусственных нейронных сетей. Преимущество нейронных сетей заключается в возможности самообучения, что позволяет системе подстраиваться под изменяющуюся ситуацию на дороге [2].

### **Входные данные**

В рамках данного исследования на основе имитационного моделирования был создан набор данных для обучения со следующей структурой. Входные параметры: скорость автомобиля, дистанция до препятствия, температура окружающей среды (если  $< 5^{\circ}\text{C}$ , то гололед), сработала ли антиблокировочная система (ABS), которая оценивает покрытие (если включена, то покрытие сухое, если нет – мокрое), реакция водителя (нажал ли водитель на педаль тормоза); выходной параметр: отклик системы.

Выходные данные, то есть отклик системы, формировались на основе имитационного моделирования и могут принимать значения от 0 до 3.

Значение «0» принимается, если дистанция до препятствия в 2 раза больше предположительного тормозного пути при данной скорости и погодных условиях. Запас в длину предположительного тормозного пути был взят с учетом времени на реакцию водителя, которое составляет от 0,5 до 2 секунд [1].

Значение «0» означает, что дорога свободна, никаких оповещений не происходит. Из значения «0» система может перейти в значение «1», если дистанция станет меньше двойной длины предполагаемого тормозного пути.

Значение «1» принимается, если дистанция до препятствия больше предположительного тормозного пути при данной скорости и погодных условиях, но меньше его двойной длины и при отсутствии реакции водителя, то есть значение реакции водителя равно 0.

Значение «1» означает, что есть опасность столкновения, о чем система оповещает водителя. Из значения «1» система может перейти в значение «0», если дистанция станет больше двойной длины предполагаемого тормозного пути, или в значение «2», если будет реакция водителя.

Значение «2» принимается, если дистанция до препятствия больше предположительного тормозного пути при данной скорости и погодных условиях, но меньше его двойной длины и наличии реакции водителя, то есть значение реакции водителя равно 1.

Значение «2» означает, что есть опасность столкновения, о чем система оповещает водителя. Из значения «2» система может перейти в значение «0», если дистанция станет больше двойной длины предполагаемого тормозного пути, или в значение «1», если не будет реакция водителя, или в значение «3», если дистанция станет меньше длины предполагаемого тормозного пути.

Значение «3» означает, что столкновение неизбежно, о чем система оповещает водителя.

Таким образом было сгенерировано 100 000 записей данных для обучения разрабатываемой модели. Созданный набор стал обучающей выборкой для нейросетевой модели системы, являющейся основой для разрабатываемого программного обеспечения.

### **Построение и обучение нейронной сети**

Выборка делилась на 3 компонента в следующем соотношении данных: обучающая – 70 %, тестовая – 20 % и валидационная – 10 %. Валидационная выборка используется для оценки качества работы сети.

Как правило, качество разрабатываемой нейросетевой модели оценивается значением соответствующей среднеквадратической ошибки ее выходов, что характерно также и для эволюционных моделей [3]. Однако при обучении с подкреплением данная метрика не может быть объективно оценена, т. к. точно неизвестно заранее, какое именно поведение должна проявить система для распознавания конкретного стимула, и в то же время множество различных комбинаций действий могут предшествовать итоговому верному отклику системы [4].

Таким образом, чтобы оценить ее качество, нужно определить и проанализировать следующие выходные динамические параметры модели, получаемые в результате итеративной работы эволюционного алгоритма, такие как функция потерь — для проверки правильности предсказаний, и скорость обработки данных — для уменьшения времени задержки отклика системы [5].

В качестве нейрона был рассмотрен персептрон, представленный следующими уравнениями:

$$u_k = \sum_{m=1}^n \omega_{km} x_m, \quad Y_k = \varphi(u_k + b_k),$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_m$  — входные сигналы;  $\omega_{k1}, \omega_{k2}, \dots, \omega_{kn}$  — синаптические веса нейрона  $k$ -го слоя;  $u_k$  — линейная комбинация входных воздействий;  $b_k$  — порог;  $\varphi$  — функция активации;  $Y_k$  — выходной сигнал нейрона.

В процессе формирования структуры сети рассматривались различные комбинации значений гиперпараметров, были рассмотрены 8 функций активации, такие как ReLu, Sigmoid, eLu, SeLu Linear, Softmax, exp. Также рассматривалось различное количество скрытых слоев с разным количеством нейронов. Каждый из гиперпараметров рассматривался как ген, а отдельная нейронная сеть — как совокупность генов, то есть особь [6].

Разработка структуры искусственной нейронной сети осуществлялась на основе эволюционных процессов и механизмов, имеющих место в живой природе [7]. Выражения для операторов кроссинговера и мутации представлены в формулах (1) и (2) соответственно.

$$C_{i+1} = P_i + \xi \cdot (M_i - P_i), \quad (1)$$

где  $C_{i+1}$  — потомок в поколении  $i + 1$ ,  $M_i$  и  $P_i$  — родители в поколении  $i$ ,  $\xi \in (0..1)$  — случайная величина.

$$B_j = A_j + R_t (2\xi - 1), \quad (2)$$

где  $B_j$  — мутировавшая хромосома,  $A_j$  — мутирующая хромосома,  $R_t$  — радиус мутации. Для стабилизации радиуса мутации применялся метод отжига:

$$R_t = \frac{R_b}{t}, \quad (3)$$

где  $R_b$  — базовый радиус мутации,  $t$  — время.

### Вычислительные эксперименты

Цель вычислительных экспериментов заключалась в построении нейросетевой модели с определенным набором гиперпараметров, позволяющим минимизировать значение функции потерь и времени обработки данных [8–10]. Первый этап экспериментов проводился на основе сгенерированного набора данных. Лучшие модели с минимальными значениями функции потерь и временем обработки данных для первых 5 поколений приведены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты экспериментов на основе сгенерированного набора данных

Модель	Значения функции потерь/время (с)
Individual 14 Generation 1 Hyperparameters: activation: relu num_layers: 10 units_0: 5 units_1: 25 units_2: 37 units_3: 41 units_4: 35 units_5: 53 units_6: 19 units_7: 45 units_8: 21 units_9: 45 optimizer: RMSProp	0.056238699704408646 / 0.189

Модель	Значения функции потерь/время (с)
Individual 22 Generation 2 Hyperparameters: activation: tanh num_layers: 9 units_0: 35 units_1: 9 units_2: 51 units_3: 41 units_4: 27 units_5: 37 units_6: 51 units_7: 55 units_8: 43 optimizer: RMSProp	0.034732114523649216 / 0.156
Individual 5 Generation 3 Hyperparameters: activation: relu num_layers: 7 units_0: 43 units_1: 9 units_2: 15 units_3: 51 units_4: 53 units_5: 35 units_6: 39 optimizer: Adam	0.028571775183081627 / 0.142
Individual 32 Generation 4 Hyperparameters: activation: relu num_layers: 10 units_0: 43 units_1: 35 units_2: 35 units_3: 15 units_4: 11 units_5: 23 units_6: 13 units_7: 35 units_8: 5 units_9: 11 optimizer: Adam	0.024999937042593956 / 0.152
Individual 11 Generation 5 Hyperparameters: activation: relu num_layers: 10 units_0: 35 units_1: 55 units_2: 15 units_3: 43 units_4: 35 units_5: 17 units_6: 17 units_7: 11 units_8: 47 units_9: 31 optimizer: Adam	0.020685754716396332 / 0.112

В результате экспериментальных исследований были отобраны лучшие модели из 5 поколений для участия во втором этапе экспериментов.

Второй этап экспериментальных исследований предусматривал верификацию результатов работы отобранных моделей на основе реальных данных [11, 12]. Для проверки системы предотвращения фронтального столкновения был взят автомобиль Kia Cerato со стандартной системой Kia FCA и характеристиками, приведенными в таблице 2, а также неподвижный объект – картонная коробка. Испытания проводились на скоростях: 40, 45, 50, 55, 60 км/ч; в 3 режимах реакции водителя: своевременная реакция водителя (как только подается сигнал, водитель начинает процесс торможения); реакция водителя с задержкой в 1 секунду и реакция водителя с трехсекундной задержкой.

Таблица 2

## Характеристики автомобиля

Характеристика	Значение
Двигатель	2.0 MPI
Диаметр цилиндра x ход поршня, мм	77 x 85.4
Мощность, л.с.	150
Степень сжатия	10,3
Крутящий момент, Н·м	192
Тип привода	Электроусилитель; «шестерня–рейка»
Тип топлива	Бензин, АИ 92–95
Рабочий объем, л	2.0
Рабочий объем, см <sup>3</sup>	1999,4
Экологический класс	Евро–5
Коробка передач	Автомат (6АТ)
Топливная система	MPI (распределенный впрыск топлива с электронным управлением)
Привод	Передний
Объем топливного бака, л	50

Характеристика	Значение
Время разгона 0–100 км/ч, с	9,8
Расход топлива комбинированный, л/100 км	7,4
Объем масла в трансмиссии, л	6,7
Тип кузова	Седан
Габариты (длина/ширина/высота), мм	4640 / 1800 / 1450
Колесная база, мм	2700
Дорожный просвет, мм	150
Генератор	120А
Стартер	1.2 KW
Размер передних тормозных дисков	Вентилируемые дисковые / 280 x 23
Размер задних тормозных дисков	Дисковые / 262 x 10 (284 x 10 в версиях с электромеханическим стояночным тормозом)
Передняя подвеска	Независимая, пружинная, типа Макферсон, со стабилизатором поперечной устойчивости
Задняя подвеска	Полузависимая, пружинная, с телескопическими амортизаторами
Передачное число рулевого управления	12,7
Число оборотов руля между крайними положениями	2,44
Минимальный радиус разворота, м	5,3
Максимальная скорость, км/ч	203
Ускорение (сек) 80->120 км/ч	7
ABS	Есть
EPS	Есть
Круиз-контроль	Есть

После испытаний был проведен сравнительный анализ результатов работы стандартной системой FCA с разработанным решением. Результаты проведенных испытаний приведены в таблице 3.

Таблица 3

#### Результаты проведенных испытаний

Система	Среднее расстояние до объекта при FCA, м			Среднее расстояние до объекта при разработанной системе, м		
	0 с	1 с	3 с	0 с	1 с	3 с
Задержка реакции водителя						
40 км/ч	4.5	2.2	1.2	4.5	2.4	1.5
45 км/ч	4	1.6	0.8	4	1.8	1.1
50 км/ч	3.4	1.1	0.3	3.5	1.3	0.6
55 км/ч	2.6	0.6	-0.7	2.7	0.9	0.25
60 км/ч	1.4	0.1	-1.3	1.5	0.5	0.03


По результатам сравнительного анализа было установлено, что нейросетевая модель справляется лучше, чем стандартная система FCA, в случаях, когда задержка реакции водителя выходит за регламентированные пределы в 2 с.

#### Заключение

В работе предложена нейросетевая модель для системы предотвращения фронтальных столкновений. Найдена оптимальная архитектура нейронной сети для задачи предотвращения фронтальных столкновений. Полученная модель показала высокую точность как на обучающей и тестовой выборках, так и на валидационной. Также были проведены полевые испытания, показавшие, что система предотвращения фронтальных столкновений, основанная на нейронной сети, в ряде случаев справляется лучше, чем стандартная система FCA.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кадиленко Е. С., Тимофеева О. П. Определение оптимальной траектории движения транспортного средства на определенном участке карты. *Будущее технической науки: материалы XI Международной молодежной конференции*. 2012:45–46.
2. Тимофеева О. П., Ермаков О. П., Туманова Д. Н. Модель системы «умных светофоров» на базе AnyLogic. *Будущее технической науки: материалы XV Международной молодежной конференции*. Н. Новгород; 2016:115–116.
3. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G. E. ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks. *Communications of the ACM*. 2017;606:84–90. DOI: 10.1145/3065386.
4. Russakovsky O., Deng J., Su H. et al. ImageNet Large Scale Visual Recognition Challenge. *Int. J. of Computer Vision*. 2015;1153:211–252. DOI: 10.1007/s11263-015-0816-y.
5. Круглов В. В., Борисов В. В. *Искусственные нейронные сети. Теория и практика*. М.: Горячая линия–Телеком; 2002. 382 с.
6. Каллан Р. *Основные концепции нейронных сетей* / пер. с англ. А. Г. Сивака. М.: Издательский дом «Вильямс»; 2001. 287 с.
7. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. *Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы* / пер. с польск. И. Д. Рудинского. М.: Горячая линия–Телеком, 2006. 452 с.
8. Kingma D. P., Ba J. *Adam: A Method for Stochastic Optimization*. 2014. *arXiv:1412.6980*. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980>.
9. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. *Genetic Programming and Evolvable Machines*. 2018;19:305–307. DOI: 10.1007/s10710-017-9314-z.
10. Sutton R. S., Barto A. G. *Reinforcement Learning: An Introduction*. Cambridge: The MIT Press; 2014. 338 p.
11. Silver D., Huang A., Maddison C. J. et al. Mastering the Game of Go with Deep Neural Networks and Tree Search. *Nature*. 2016;529:484–489. DOI: 10.1038/nature16961.
12. Kohavi R. A Study of Cross-Validation and Bootstrap for Accuracy Estimation and Model Selection. *Proceedings of the Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 1995:1137–1143.

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТОНКИХ ПРОСЛОЙКАХ****А. Д. Япаров<sup>1,a</sup>, Н. М. Япарова<sup>2,b</sup>**<sup>1</sup> ГК «ТехПром», г. Челябинск, Российская Федерация<sup>2</sup> Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск, Российская Федерация<sup>a</sup> rezozx@gmail.com<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1821-1159>,  natyap7@mail.ru


*Аннотация:* рассмотрена нелинейная обратная задача теплопроводности, связанная с определением внутренних температурных полей в тонких слоях, подвергающихся внешнему тепловому воздействию в быстропротекающих высокотемпературных технологических процессах. Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что при ее решении необходимо учитывать, что изменение теплофизических характеристик материала, из которого изготовлена прослойка, происходит в зависимости от ее текущего теплового состояния. Математически задача определения температур внутри прослойки представлена параболическим уравнением, коэффициенты которого зависят от искомого решения с начальными и граничными условиями, отражающими начальное тепловое состояние прослойки и характер изменения температуры вблизи внешней границы прослойки. В данной работе представлен новый подход к решению обратной задачи, основанный на аппроксимации коэффициентных функций, и вычислительная схема, реализующая этот подход. Схема создана на основе конечных разностей с применением регуляризирующих алгоритмов, обеспечивающих ее устойчивость. Верификация метода осуществлялась посредством вычислительных экспериментов, в ходе которых проводился сравнительный анализ численных решений обратной задачи с тестовыми функциями, сформированными на основе имитационного моделирования. Результаты экспериментов продемонстрировали, что погрешность полученных решений находится в допустимых пределах, что подтверждает надежность и достаточную точность используемой вычислительной схемы.

*Ключевые слова:* теплоперенос, численный метод, обратная задача, регуляризация.

*Для цитирования:* Япаров А. Д., Япарова Н. М. Численный метод решения нелинейной задачи теплопереноса в тонких прослойках. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):140–148.

*Поступила в редакцию:* 10.10.2025.

*В окончательном варианте:* 07.11.2025.

**NUMERICAL METHOD FOR SOLVING NONLINEAR HEAT TRANSFER PROBLEMS IN THIN LAYERS****A. D. Yaparov<sup>1,a</sup>, Yaparova N. M.<sup>2,b</sup>**<sup>1</sup> TechPromGroup, Chelyabinsk, Russian Federation<sup>2</sup> South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russian Federation<sup>a</sup> rezozx@gmail.com<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1821-1159>,  iaparovnm@susu.ru

*Abstract:* we consider a nonlinear inverse heat conduction problem arising in high-speed, high-temperature technological processes where real-time information about internal temperature fields in thin layers is required. A key feature of this problem is that the thermophysical properties of the interlayer material change depending on its current thermal state.

Mathematically, the problem of calculating temperatures at internal points of the layer is described by a parabolic equation whose coefficients depend on the solution, with initial and boundary conditions reflecting the interlayer's initial thermal state and the temperature variation near its outer boundary.

We present a new approach to solving the inverse problem based on approximating the coefficient functions and a computational scheme implementing this approach. The scheme uses finite differences and incorporates regularization algorithms to ensure stability. This approach and scheme form the basis of a method for calculating temperature fields in a thin interlayer.

We verified the method through computational experiments, solving the inverse problem and comparing the results with test functions. The results confirm the reliability and sufficient accuracy of the proposed computational scheme.

*Keywords:* heat transfer, numerical method, inverse problem, regularization.

*Cite this article:* Yaparov A. D., Yaparova N. M. Numerical Method for Solving Nonlinear Heat Transfer Problems in Thin Layers. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):140–148.

*Original article submitted:* 10.10.2025.

*Revision submitted:* 07.11.2025.

## Введение

В современных технологиях, связанных с применением высокотемпературных режимов внешнего воздействия на технический объект, особое внимание уделяется обеспечению тепловой устойчивости защитных покрытий объекта. Во многих случаях защитное покрытие представлено тонким слоем, нанесенным на внешнюю поверхность объекта [1, 2]. При выборе и корректировке значений параметров, влияющих на теплофизические свойства защитного слоя, ориентируются на информацию о его тепловом состоянии, когда основой для определения температур во внутренних точках покрытия служат результаты температурных измерений вблизи поверхности объекта. Это приводит к необходимости рассматривать проблему определения теплового состояния защитного слоя как обратную задачу теплопроводности. Разработка методов решения обратных задач является актуальной, динамически развивающейся областью научных исследований, активно сочетающей теорию регуляризации, математический аппарат вычислительной математики и численных методов с применением современных информационных технологий [3–16]. В последнее время для решения таких задач активно применяются нейросетевые модели и машинное обучение [17, 18]. Однако в условиях небольшого количества проведенных измерений или малого числа измеряемых параметров такой подход может оказаться малоэффективным. Наиболее развитое направление в области создания методов определения внутренних нестационарных температурных полей связано с применением математического аппарата вычислительной математики, теории некорректных задач и регуляризации.

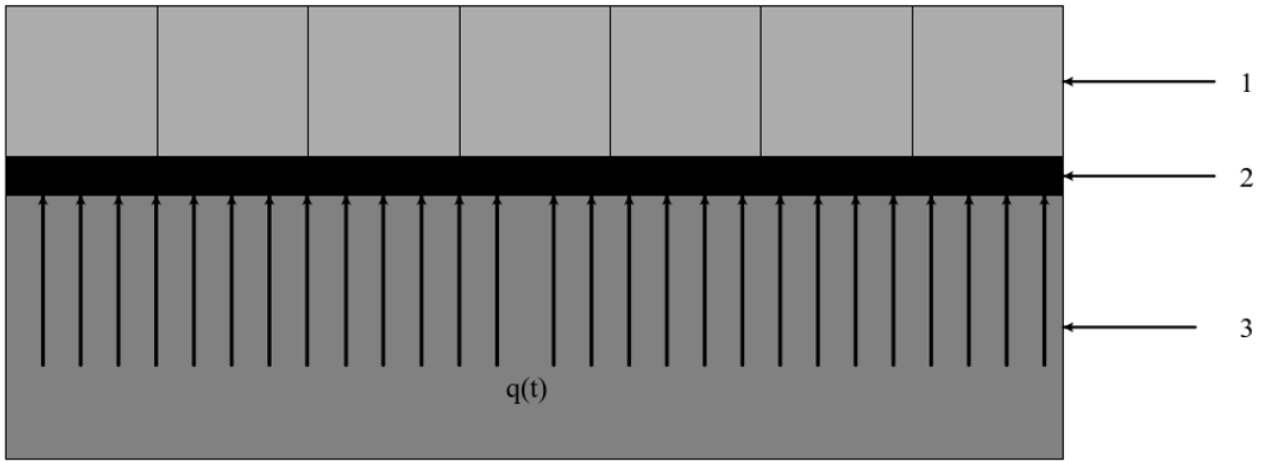
Специфика решения проблемы определения температурных полей заключается в том, что при разработке численного метода необходимо учитывать, что с изменением температуры объекта изменяются его теплофизические свойства. Математически эта связь выражается в функциональной зависимости коэффициентов уравнения от искомого решения, что относит рассматриваемую задачу к классу нелинейных обратных задач. Основная сложность численного решения таких задач обусловлена необходимостью создания подходов, позволяющих перейти от нелинейной задачи к уравнениям, в которых зависимость коэффициентов от искомой функции представлена в неявной форме. К таким подходам относится аппроксимация коэффициентов с помощью численной оптимизации либо сведением к иным уравнениям путем использования математических методов, часто опирающихся на решения вспомогательных линейных задач.

В данной работе предложен подход, включающий линейную аппроксимацию коэффициентов уравнения в зависимости от температурного диапазона и переход от исходной задачи к последовательности обратных задач, а также представлен численный метод, позволяющий находить приближенные решения для каждой из задач, согласованные на границах температурных диапазонов

## Математическая модель теплопереноса

Рассматривается проблема определения текущего теплового состояния тонкой прослойки толщиной  $L$ , подвергаемой с одной стороны внешнему тепловому воздействию. В прослойке отсутствуют включения, приводящие к изменениям внутренних температурных полей. Отсутствие внутренних тепловых источников позволяет принять допущение об однородности структуры материала прослойки. Температурное поле внутри прослойки в каждой точке  $x$ ,  $x \in [0, L]$  в текущий момент времени  $t$ ,  $t \in [0, T]$  характеризуется функцией  $u(x, t)$ . К моменту начала внешнего воздействия температура прослойки постоянна и определяется величиной  $u(x, 0) = U$ ,  $x \in [0, L]$ . Внешнее тепловое воздействие на границу прослойки одинаково в каждой граничной точке. Продолжительность внешнего воздействия ограничена величиной  $T$ . Влияние тепловых потоков, образующихся в результате внешнего теплового воздействия, представлено функцией плотности  $q(t)$ . Температурам, формируемым на внешней границе прослойки, соответствует функция  $p(t)$ . Схема теплового воздействия приведена на рис. 1.

Учитывая вышесказанное, проблема определения температурных полей однородной прослойки, подвергаемой одностороннему, изменяющемуся только по времени внешнему тепловому воздействию, сводится к задаче определения внутренних температурных полей стержня при высоких граничных



**Рис. 1.** Схема теплового воздействия на тонкую прослойку, 1 – внутреннее тело, покрытое защитной прослойкой, 2 – прослойка, 3 – внешняя среда,  $q(t)$  – тепловой поток

температурах. Основываясь на подходах, представленных в работах [19–21], получаем, что математическая модель рассматриваемого процесса теплопереноса в прослойке сводится к обратной задаче, включающей уравнение теплопроводности:

$$c(u)\rho(u)u_t = \operatorname{div}(\lambda(u)u_x), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \quad (1)$$

начальное условие:

$$u(x,0) = U, \quad x \in [0,L], \quad (2)$$

и граничные условия

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = q(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0,t) = p(t), \quad t \in [0,T]. \quad (3)$$

Для определения внутренних температурных полей прослойки требуется разработать метод, определяющий функцию  $u(x,t)$  во всех внутренних точках в текущий момент времени вплоть до значений  $u(L,t)$ . В математическом представлении требуется разработать метод, позволяющий найти численное решение  $u(x,t)$  обратной задачи (1)–(3) вплоть до граничных значений  $u(L,t) = \psi(t)$ . При построении метода численного решения обратной задачи необходимо учитывать, что источником формирования функций  $p(t)$  и  $q(t)$  служат результаты обработки измерительной информации, как следствие, в условиях (2), (3) вместо функций  $p(t)$  и  $q(t)$  заданы приближения  $p_\delta(t)$  и  $q_\delta(t)$ , уровень отклонений которых не превосходит величины  $\delta$ . Таким образом, при построении вычислительной схемы решения обратной задачи (1)–(3) требуется решить проблему нелинейности уравнения (1) и обеспечить устойчивость разрабатываемой вычислительной схемы относительно погрешности исходных данных.

### Метод аппроксимационной регуляризации

Важный аспект рассматриваемой проблемы определения внутренних температурных полей прослойки заключается в том, что изменения основных характеристик: коэффициента удельной теплоемкости  $c$ , плотности  $\rho$  и коэффициента теплопроводности  $\lambda$  – приведены в зависимости от температурного диапазона [22].

Для решения проблемы нелинейности обратной задачи (1)–(3) предлагается следующий подход. Исходную задачу (1)–(3) сводят к последовательности линейных задач, решаемых в различных температурных диапазонах, внутри каждого из которых теплофизические характеристики материала претерпевают незначительные изменения. Тогда, опираясь на данную идею, получаем, что в каждом из температурных диапазонов исходная задача сводится к обратной задаче:

$$u_t = au_{xx} + \beta u_x + \gamma u, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T) \quad (4)$$

$$u(x,0) = U, \quad x \in [0,L] \quad (5)$$

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = q(t), \quad t \in [0, T] \quad u(0, t) = p(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

где  $a, \beta, \gamma$  – приведенные коэффициенты.

Для построения вычислительной схемы метода используем сетку:

$$G = \left\{ (x_i, t_j) \mid x_i = (i-1)h, t_j = (j-1)\tau, h = \frac{L}{N}, \tau = \frac{T}{M}, i = \overline{1, N+1}, j = \overline{1, M+1} \right\}$$

и конечно-разностные представления частных производных [23]. Обозначим  $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$ . Тогда уравнение (4) в узле  $(x_i, t_j)$  принимает следующий вид:

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau} = a \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + \beta \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + \gamma u_{i,j}. \quad (7)$$

Используя начальные условия (2) и граничные условия (3), получаем:

$$u_{i,1} = U, \quad u_{1,j} = p_j, \quad u_{2,j} = p_j - \frac{h}{\lambda} q_j. \quad (8)$$

В вычислительной схеме из конечно-разностных аналогов начальных и граничных условий и уравнения (4) находят численное решение задач (4)–(6).

Обозначим  $A = \frac{1}{\tau}$ ,  $B = \frac{a}{h^2}$ ,  $C = \frac{\beta}{h}$ . Выразив  $u_{i,j}$  из соотношения (7) и учитывая (8), получаем следующую вычислительную схему определения температурных полей тонкой прослойки:

$$u_{i,j} = \frac{A * u_{i,j-1} - B * (2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}) - C * u_{i,j+1}}{(A - B - C - \gamma)}.$$

Известно [23–25], что явные схемы численного решения дифференциальных уравнений являются неустойчивыми. Для обеспечения устойчивости получаемых численных решений в вычислительную схему вводят аддитивный стабилизирующий функционал с параметром регуляризации  $\alpha$ . Такой подход применялся в работе [26] для решения нелинейных задач с неполными данными, а также для решения обратной задачи восстановления сигнала в динамике измерений [27]. Проверка разработанной вычислительной модели проводилась посредством экспериментов, включавших сопоставление расчетных результатов уравнений (4)–(6) с контрольными функциями, построенными методом компьютерного моделирования и воспроизводящими вероятные сценарии распределения температуры внутри слоя в разных температурных условиях.

### Численное моделирование

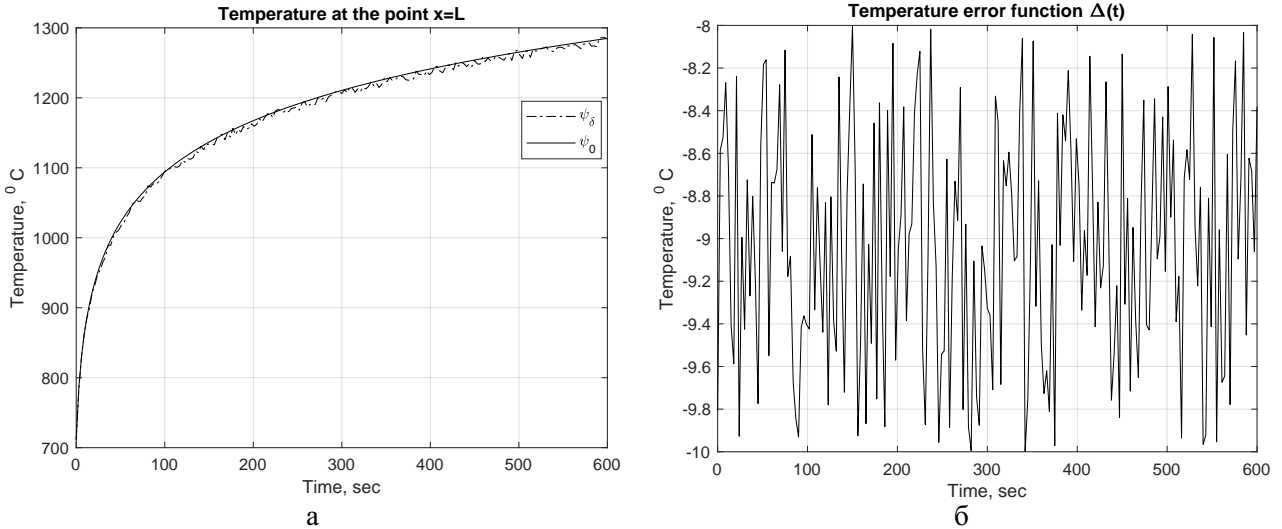
Экспериментальные исследования проводились по следующей методике. На начальном этапе эксперимента задавали тестовые значения  $u(0, t) = p(t)$  и  $u(L, t) = \psi(t)$ . Моделирование функций  $p(t)$  и  $\psi(t)$  проводили так, чтобы полученные значения отражали характер изменений температурных полей внутри прослойки. В эксперименте коэффициенты  $a, \beta, \gamma$  согласовывались с теплофизическими характеристиками жаропрочного сплава. Эксперименты проводились в различных температурных диапазонах. Выбор границ диапазонов определялся значениями скоростей изменения теплофизических характеристик, когда скорость изменения каждой из характеристик внутри диапазона отличается от скорости ее изменения в другом диапазоне. Далее по тестовым функциям  $p(t)$  и  $\psi(t)$  находили численное решение  $u_0(x, t)$  следующей прямой задачи:

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} + bu_x + \gamma u, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ u(x, 0) &= U, \quad x \in [0, L], \\ u(0, t) &= p(t), \quad u(L, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

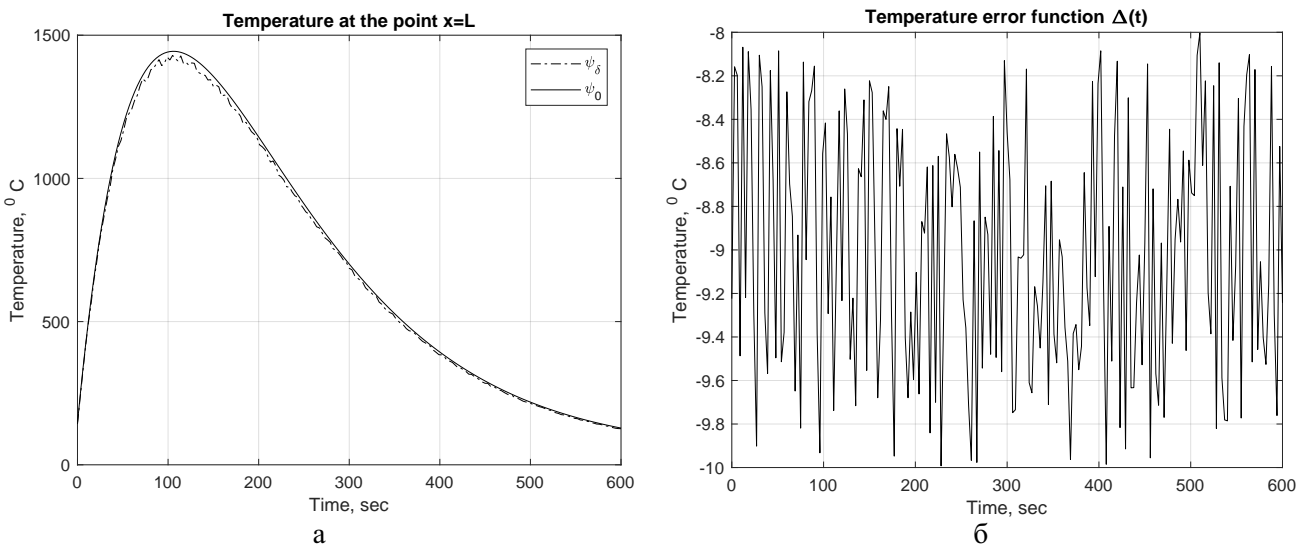
Затем формировали значения  $q(t)$ , используя конечно-разностный аналог производной первого порядка и функцию  $p(t)$ . Затем моделировали значения  $p_\delta(t)$  и  $q_\delta(t)$ , добавляя к значениям  $p(t)$  и  $q(t)$  аддитивный шум. На следующем этапе находили численное решение  $u_\delta(x, t)$  обратных задач (4)–(6). Далее оценивали величину отклонений  $u_\delta(x, t)$  от  $u_0(x, t)$  в области  $[0, L] \times [0, T]$  и отдельно исследовали динамику погрешности численных решений в точке  $x = L$ . Проведение дополнительных исследований

обусловлено тем, что величина погрешности численных решений достигает наибольшего значения в точках  $x = L$ , поскольку значения  $u_\delta(L, t) = \psi_\delta(t)$  вычисляются последними на каждом шаге итерационного процесса. Для оценки погрешности численных решений в точках  $x = L$  использовали функцию погрешности  $\Delta(t)$ , определяемую формулой  $\Delta(t) = |\psi_\delta(t) - \psi(t)|$ . В эксперименте также исследовали влияние регуляризации на точность получаемых решений.

В данной работе приведены результаты эксперимента для тестовых функций, соответствующих следующим изменениям теплового состояния прослойки: непрерывный нагрев (тест 1), нагрев и последующее охлаждение (тест 2), постепенное охлаждение (тест 3). Рис. 2–4 иллюстрируют результаты экспериментов, полученные при уровне погрешности 5%. На рисунках 2а, 3а, 4а приведены графики найденных значений  $\psi_\delta(t)$  и тестовых значений  $\psi(t)$ . Графики функции  $\Delta(t)$  представлены на рис. 2б, 3б, 4б.



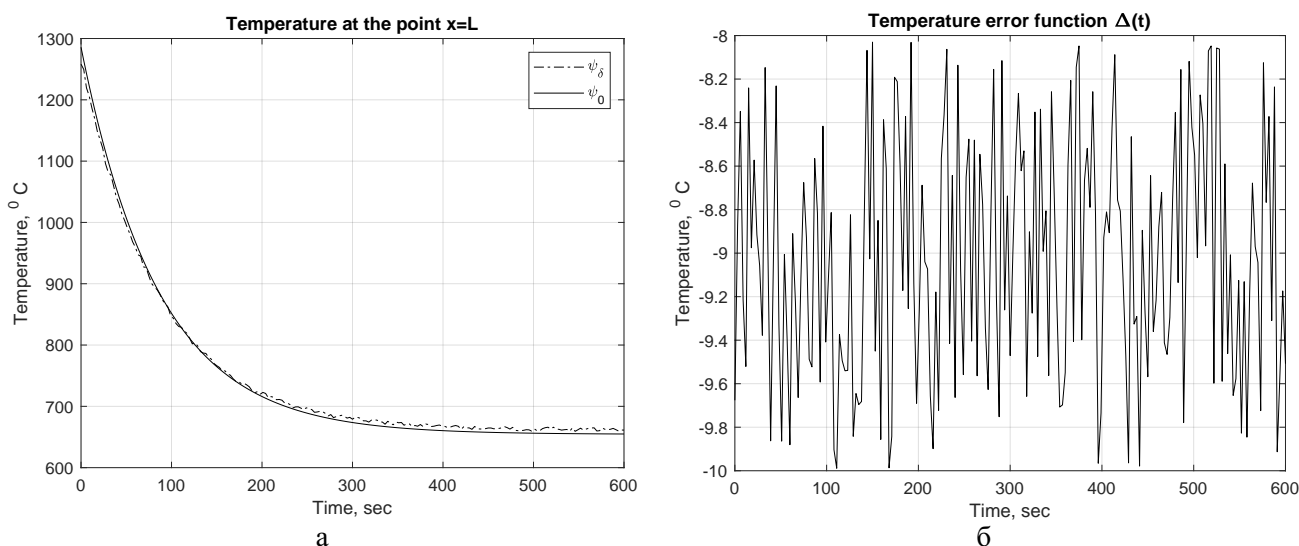
**Рис. 2.** Результаты расчета температур непрерывного нагрева: а) графики функции температуры; б) график функции  $\Delta(t)$



**Рис. 3.** Результаты расчета температур для нагрева и охлаждения: а) графики функции температуры; б) график функции  $\Delta(t)$

Поверхности, приведенные на рис. 5, иллюстрируют тепловое состояние тонкой прослойки.

Для оценки погрешностей численного решения  $u_\delta(x, t)$  обратной задачи (1)–(3) использовали



**Рис. 4.** Результаты расчета температур для охлаждения: а) графики функции температуры; б) график функции  $\Delta(t)$

величины  $\Delta_{abs}$ ,  $\Delta_\varepsilon$  и  $\Delta$ , определяемые формулами:

$$\Delta_{abs} = \max_{(x,t) \in [0,T] \times [0,L]} |u_\delta(x,t) - u_0(x,t)|, \quad \Delta_\varepsilon = \max_{(x,t) \in [0,T] \times [0,L]} \frac{|u_\delta(x,t) - u_0(x,t)|}{|u_0(x,t)|}$$

$$\Delta = \max_{t \in [0,T]} |\Delta(t)|.$$

В таблице 1 приведены значения этих величин в различных температурных диапазонах, полученные для теста 1. Для остальных тестов — оценки погрешностей.

Таблица 1

Температурные отклонения по диапазону

Температурные диапазоны, °C	$\delta$	$\Delta, ^\circ C$	$\Delta_{abs}, ^\circ C$	$\Delta_\varepsilon, ^\circ C$
20–600	0,01	4,15	4,15	0,01
	0,05	6,65	6,65	0,01
600–800	0,01	4,73	4,73	0,01
	0,05	7,77	7,77	0,01
800–1000	0,01	6,75	6,75	0,01
	0,05	8,88	8,88	0,01
1000–1200	0,01	7,92	7,92	0,01
	0,05	9,03	9,03	0,01
1200–1390	0,01	9,55	9,55	0,01
	0,05	10,46	10,46	0,01

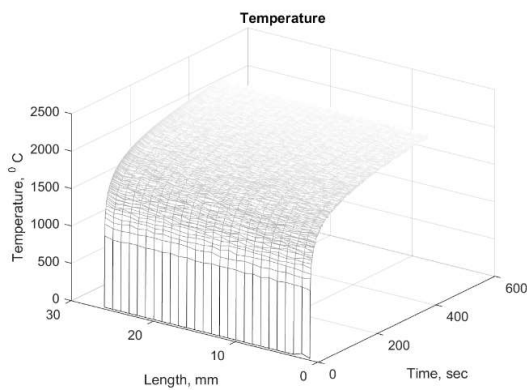
В данной работе представлены также результаты исследования влияния регуляризации на точность решений. В таблице 2 приведены значения погрешности численных решений задач (4)–(6), полученные на основе предложенной вычислительной схемы с нулевым параметром регуляризации, что соответствует исключению стабилизирующего функционала из процедуры вычислений

Результаты эксперимента свидетельствуют об эффективности предложенного метода аппроксимационной регуляризации и достаточной точности разработанной вычислительной схемы для определения температур в тонких прослойках, а также подтверждают необходимость использования регуляризирующих подходов при построении численных решений рассматриваемой задачи.

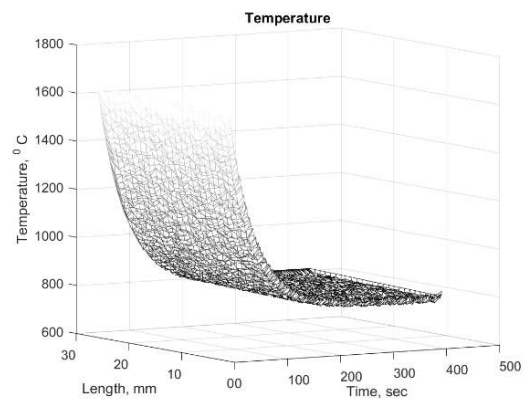
Таблица 2

## Температурные отклонения в схеме без регуляризации

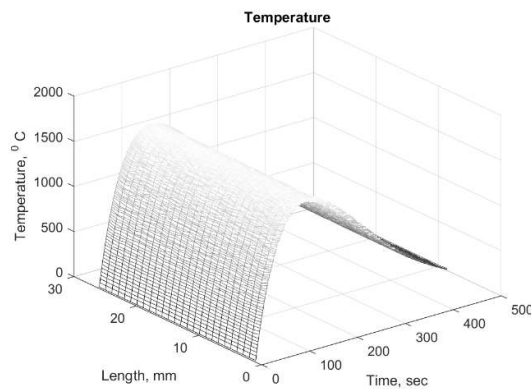
Температурные диапазоны, °C	$\delta_{ир}$	$\Delta, ^\circ\text{C}$	$\Delta_{abs}, ^\circ\text{C}$	$\Delta_\varepsilon, ^\circ\text{C}$
20–600	0,01	20,34	20,34	0,03
	0,05	23,15	23,15	0,04
600–800	0,01	21,56	21,56	0,03
	0,05	25,51	25,51	0,04
800–1000	0,01	30,64	30,64	0,03
	0,05	40,25	40,25	0,04
1000–1200	0,01	45,37	45,37	0,04
	0,05	54,22	54,22	0,05
1200–1390	0,01	55,91	55,91	0,04
	0,05	62,13	62,13	0,05



а



б



в

**Рис. 5.** Температурные поля тонкой прослойки: а) температуры прослойки, соответствующие тесту 1; б) температуры, соответствующие тесту 2; в) температуры, соответствующие тесту 3

### Заключение

В статье предложен метод, позволяющий определить внутренние температурные поля с достаточным уровнем точности в каждом из рассматриваемых диапазонов. Построена устойчивая относительно шума схема. Применение регуляризирующего подхода позволяет повысить точность определения температур. Предложенная схема может быть использована в системах температурного контроля с фиксированным временным интервалом измерений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М., Будник С. А., Ненарокомов А. В., Салосина М. О., Титов Д. М. Датчики для косвенного измерения нестационарных тепловых потоков на основе методологии обратных задач теплопроводности. *Инженерно-физический журнал*. 2023;967:1705–1716.
2. Белоусов М. Д., Шестаков А. Л., Япарова Н. М. Оценка собственного состояния термометров сопротивлений. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника*. 2012;35:105–109.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука; 1986. 288 с.
4. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*. М.: Наука; 1978. 208 с.
5. Денисов А. М. Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2021;6112:2040–2049. DOI: 10.31857/S0044466921120085.
6. Борухов В. Т., Заяц Г. М., Костюкова О. И. Обратные задачи восстановления коэффициентов и источников переноса в нелинейных уравнениях теплопроводности. *Труды Института математики НАН Беларуси*. 2023;311:33–43.
7. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. On the Problem of Recovering Boundary Conditions in the Third Boundary Value Problem for Parabolic Equation. *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*. 2021;2:3–13. DOI: 10.21685/2072-3040-2021-2-1.
8. Ваганова Н. А., Филимонов М. Ю. Моделирование температурных полей под опорой железнодорожного моста в криолитозоне. *Химическая физика и мезоскопия*. 2025;272:144–152. DOI: 10.62669/17270227.2025.2.14.
9. Япарова Н. М. Метод решения обратной задачи идентификации функции источника с использованием преобразования Лапласа. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика*. 2016;53:20–35. DOI: 10.14529/cmse160302.
10. Вабищевич П. Н. Операторно-разностные аппроксимации на нестандартных прямоугольных сетках. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2024;647:1097–1111. DOI: 10.31857/S0044466924070016.
11. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи*. Новосибирск: Сибирское научное издательство; 2009. 457 с.
12. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Berlin: Walter de Gruyter; 2007. DOI: 10.1515/9783110205794.
13. Япарова Н. М., Капелюшин Ю. Е. Идентификация внутреннего теплового источника и определение теплового состояния объекта по динамическим граничным измерениям. *Информационные и математические технологии в науке и управлении*. 2023;4:91–103. DOI: 10.25729/ESI.2023.32.4.008.
14. Vasylyev V., Vasilyeva M. An Accurate Approximation of the Two-Phase Stefan Problem with Coefficient Smoothing. *Mathematics*. 2020;811:19224. DOI: 10.3390/math8111924.
15. Lukyanenko D. V., Argun R. L., Borzunov A. A., Gorbachev A. V., Shinkarev V. D., Shishlenin M. A., Yagola A. G. On the Features of Numerical Solution of Coefficient Inverse Problems for Nonlinear Equations of the Reaction–Diffusion–Advection Type with Data of Various Types. *Differential Equations*. 2023;5912:1734–1757. DOI: 10.1134/s0012266123120133.
16. Yaparova N. M. Mathematical Modelling and Method for Solving a Parametric Identification Problem for Self-Test of Measuring Devices. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2016;241:77–91. DOI: 10.1080/17415977.2015.1017482.
17. Дилигенская А. Н., Самокиш А. В. Параметрическая идентификация в обратных задачах теплопроводности в условиях интервальной неопределенности на основе нейронных сетей. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки*. 2020;284:6–18.
18. Япаров Д. Д., Карманов Д. Е., Япарова Н. М. Метод обработки информации для прогнозирования степени восстановления металлов на основе нейросетевых технологий. *Вестник УрФО. Безопасность в информационной сфере*. 2025;1:29–36. DOI: 10.14529/secur250103.
19. Алифанов О. М. *Обратные задачи теплообмена*. М.: Машиностроение; 1988. 280 с.
20. Тихонов А. Н. Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Изд-во МГУ; 1999. 799 с.
21. Лукин С. В. Режим нагрева и термостатирования слябов в печи при горячем посаде. *Металлург*. 2018;7:54–58.

22. Зубченко А. С., Колосков М. М., Каширский Ю. В. *Марочник сталей и сплавов*. М.: Машиностроение; 2003. 784 с.
23. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Вычислительная теплопередача*. М.: Едиториал УРСС; 2009. 784 с.
24. Марчук Г. И. *Методы вычислительной математики*. СПб.: Лань; 2009. 608 с.
25. Калиткин Н. Н. *Численные методы*. М.: Наука; 1995. 512 с.
26. Япарова Н. М. Численный метод решения некоторых обратных задач теплопроводности с неизвестными начальными условиями. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника*. 2015;152:97–108. DOI: 10.14529/ctcr150211.
27. Япаров Д. Д., Шестаков А. Л. Саморегуляризирующий метод динамических измерений. *Автоматика и телемеханика*. 2024;4:112–124. DOI: 10.31857/S0005231024040073.

Сетевое издание. Полные тексты статей размещаются на официальном сайте издания [jsyb.ru](http://jsyb.ru).

Адрес учредителя и издателя:

Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный центр  
Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского  
центра «Курчатовский институт»,  
117218, г. Москва, Нахимовский просп., дом 36, корпус 1. Телефон: +7 (495) 718-21-10.

Дата выхода в свет 15.12.2025.

Формат 60 × 84/8.

Усл. печ. л. 9,8. Уч.-изд. л. 14,5.

Цена свободная.