

ISSN 2712-9942

УСПЕХИ КИБЕРНЕТИКИ

RUSSIAN JOURNAL OF CYBERNETICS



К юбилею профессора В. А. Галкина

2022
Т. 3 № 2

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ СИСТЕМНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»**

Успехи кибернетики

Russian Journal of Cybernetics

**Том 3
№ 2**

**Vol. 3
No. 2**

Москва
2022

Учредитель и издатель

Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»
(ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН)

«Успехи кибернетики» — это рецензируемый научный журнал, в котором публикуются научные статьи по следующим специальностям (физико-математические, технические науки):

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ;
- 2.2.2. Электронная компонентная база микро- и нанoeлектроники, квантовых устройств;
- 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации.

Миссия журнала — развитие научных направлений по заявленной тематике в России и за рубежом, соответствующих приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в Российской Федерации, а также перечню критических технологий РФ.

Журнал ориентирован на пропаганду передовых идей в области физики, математики, технических наук, участие в реализации задач, сформулированных Президентом РФ в Указе от 01.12.2016 № 642, по научно-технологическому развитию РФ, а также импортозамещению по приоритетным направлениям стратегического развития страны, соответствующим тематике журнала, обеспечение печатными площадями высококвалифицированных кадров, повышение качества диссертационных исследований в данных отраслях путем развития механизма профессионального и общественного обсуждения их научных результатов, воспитание молодого поколения ученых.

Журнал принимает к публикации оригинальные статьи; переводы статей, опубликованных в зарубежных журналах (при согласии правообладателя на перевод и публикацию); обзоры; эссе; комментарии; другие информационные материалы.

Издание будет полезно ученым, работающим в соответствующих областях наук, а также аспирантам и студентам.

Главный редактор

Бетелин Владимир Борисович, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва

Заместитель главного редактора

Галкин Валерий Алексеевич, д. ф.-м. н., профессор, директор, Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Сургут

Члены редакционной коллегии

Власов Сергей Евгеньевич, д. т. н., директор, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва

Панченко Владислав Яковлевич, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, председатель Совета, Российский фонд фундаментальных исследований; заведующий кафедрой медицинской физики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Савин Геннадий Иванович, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель, Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН — филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва

Сойфер Виктор Александрович, академик РАН, д. т. н., профессор, президент, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории автоматизированных систем научных исследований, Самарский национальный исследовательский университет им. ак. С. П. Королева, Институт систем обработки изображений РАН, Самара

Чубариков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа,

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Чаплыгин Юрий Александрович, академик РАН, д. т. н., профессор, президент, Московский институт электронной техники, Москва

Петров Игорь Борисович, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой информатики, Московский физико-технический институт, Москва

Смирнов Николай Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, заместитель декана механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, заместитель директора по стратегическим информационным технологиям, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва

Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, профессор кафедры вычислительных методов,

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Губайдуллин Амир Анварович, д. ф.-м. н., профессор, директор, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, Тюмень

Яковлевский Михаил Владимирович, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, заместитель директора по научной работе, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Шагалиев Рашид Мирзагалиевич, д. ф.-м. н.

Старков Сергей Олегович, д. ф.-м. н., профессор, начальник отделения интеллектуальных кибернетических систем, Обнинский институт атомной энергетики, Обнинск

Еськов Валерий Матвеевич, д. ф.-м. н., д. б. н., профессор, заведующий отделом, Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Сургут

Лаврентьев Михаил Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, заместитель директора по научной работе, Институт автоматизации и электротехники Сибирского отделения РАН, Новосибирск

Пятков Сергей Григорьевич, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

Ильин Валерий Павлович, д. ф.-м. н., профессор, профессор кафедры прикладной математики, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

Крыжановский Борис Владимирович, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., руководитель, Центр оптико-нейронных технологий ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва

Нагорнов Олег Викторович, д. ф.-м. н., профессор, первый проректор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

Савченко Владимир Васильевич, PhD (Theoretical Mechanics), Университет Хосэй, Токио, Япония

Земло Ясунари, PhD (Physics), Университет Хосэй, Токио, Япония

Пападопулос Атанас, Doctorat d'Etat (Habilitation), mathematics, Университет Страсбурга, Национальный центр научных исследований Франции, Страсбург, Франция

Ответственный секретарь

Гавриленко Тарас Владимирович, к. т. н.

Ответственный редактор

Чалова Анна Петровна, к. филол. н.

Технический редактор

Моргун Дмитрий Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент

Редактор

Камилов Эркин Махмуджанович

Переводчик

Троицкий Дмитрий Игоревич, к. т. н., доцент

Художественное оформление обложки

© Горбунов Александр Сергеевич

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77-78857 от 04.08.2020.

Издается с 2020 года. Выпускается 4 раза в год.

Адрес редакции:

ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 117218, г. Москва, Нахимовский просп., дом 36, корпус 1.

Телефон: +7 9226-54-57-88, факс: +7 (495) 719-76-81, e-mail: taras.gavrilenko@gmail.com. Сайт: jcyb.ru.

Founder and Publisher

Federal State Institution

Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences (SRISA)

Russian Journal of Cybernetics is peer-reviewed.

The journal publishes papers on physics, mathematics, and engineering. The key areas of interest are:

- simulation, numerical methods, and simulation software
- electronic components for micro- and nanoelectronics, and quantum devices
- system analysis, control, and information processing.

Our mission is advancing these research areas in Russia and globally, supporting the national priority fields of research and development, and the critical technologies.

The Journal promotes advanced concepts in physics, mathematics, engineering, and facilitates the national research and technology development under the Russian President Decree No. 642 dated 01.12.2016, and phasing out strategic imports. We offer an opportunity for professional researchers to publish. We improve the doctorate research quality through public peer review and educate the new generation of researchers.

The Journal accepts original papers; translations of papers from international journals (consent of the right holders for the translation and publication is required); reviews; essays; remarks, and event reports.

The Journal is intended for researchers, university, and doctorate students.

Chief Editor

Prof. *Vladimir B. Betelin*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS),
Doctor of Science (Phys&Math), Academic Director, SRISA, Moscow

Vice Chief Editor

Prof. *Valery A. Galkin*, Doctor of Science (Phys&Math), Director, SRISA, Surgut Branch, Surgut

Editorial Board

- Prof. *Sergey E. Vlasov*, Doctor of Science (Engineering), Director, SRISA, Moscow
- Prof. *Vladislav Ya. Panchenko*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Chairman of the Council, Russian Foundation for Basic Research, Chairperson of the Department of Medical Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow
- Prof. *Gennady I. Savin*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math),
Academic Director, Joint Supercomputer Center of the Russian Academy of Sciences, SRISA subdivision, Moscow
- Prof. *Viktor A. Soifer*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Engineering), President, Chief Researcher Lab for Automated Research Systems, Korolev Samara National Research University, Academic Director, Institute of Image Processing Systems, RAS, Samara
- Prof. *Vladimir N. Chubarikov*, Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Mathematical and Computer Analysis Methods, Lomonosov Moscow State University, Moscow
- Prof. *Yuri A. Chaplygin*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Engineering), President, National Research University of Electronic Technology, Moscow
- Prof. *Igor B. Petrov*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Informatics,
Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow
- Prof. *Nikolay N. Smirnov*, Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Dean, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Deputy Director for Strategic Information Technology, SRISA, Moscow
- Prof. *Vladimir F. Tishkin*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Professor, Department of Computational Methods, Lomonosov Moscow State University, Moscow
- Prof. *Amir A. Gubaidullin*, Doctor of Science (Phys&Math), Director, Tyumen Division, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, RAS Siberian Branch, Tyumen
- Prof. *Mikhail V. Jakobovskii*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Director for Research, Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow
- Prof. *Rashit M. Shagaliyev*, Doctor of Science (Phys&Math)
- Prof. *Sergey O. Starkov*, Doctor of Science (Phys&Math), Head, Division of Intelligent Cybernetic Systems, Obninsk Institute of Atomic Energy, Obninsk
- Prof. *Valery M. Eskov*, Doctor of Science (Phys&Math), Doctor of Science (Biology), Head of Division, SRISA, Surgut Branch, Surgut
- Prof. *Mikhail M. Lavrentiev*, Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Director for Research, Institute of Automation and Electrometry, RAS Siberian Branch, Novosibirsk
- Prof. *Sergey G. Pyatkov*, Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Further Mathematics, Yugra State University, Khanty-Mansiysk
- Prof. *Valerii P. Ilyin*, Doctor of Science (Phys&Math), Professor, Department of Applied Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk
- Prof. *Boris V. Kryzhanovskii*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Director, Opto-neural Technologies Center, Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences (SRISA), Moscow
- Prof. *Oleg V. Nagornov*, Doctor of Science (Phys&Math), First Vice-Rector, National Research Nuclear University MEPhI, Moscow
- Prof. *Vladimir V. Savchenko*, PhD (Theoretical Mechanics), Hosei University, Tokyo, Japan
- Prof. *Yasunari Zempo*, PhD (Physics), Hosei University, Tokyo, Japan
- Prof. *Athanase Papadopoulos*, Doctorat d'Etat (Habilitation), Mathematics, University of Strasbourg, French National Centre for Scientific Research, Strasbourg, France

Executive Editor

Taras V. Gavrilenko, Ph.D. (Engineering)

Managing Editor

Anna P. Chalova, Ph.D. (Linguistics)

Technical Editor

Dmitry A. Morgun, Ph.D. (Phys&Math), Assoc. Prof.

Editor

Erkin M. Kamilov

Translator

Dmitry I. Troitsky, Ph.D. (Engineering), Assoc. Prof.

Cover Design

© Alexander S. Gorbunov

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Mass media registration certificate EL No. FS 77-78857 dated on 04.08.2020.

Published since 2020. 4 issues per year.

Editorial Board Address:

SRISA, Russia 117218, Moscow, Nakhimovskiy pr., 36/1.

Tel.: +7(922)654-5788, fax: +7(495)719-76-81, e-mail: taras.gavrilenko@gmail.com. Web: jcyb.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

70 лет Галкину Валерию Алексеевичу	6
В. А. Галкин	
О неподвижных точках периодических непрерывных отображений на плоскости \mathbb{R}^2 и сфере S^2	8
А. Пападопулос	
Форма Земли: география, астрономия и геометрия	11
Н. Н. Смирнов, В. Ф. Никитин, Е. И. Скрылева, Ю. Г. Вайсман	
Многokратная пропитка пористой среды в условиях микрогравитации: экспериментальные исследования и математическое моделирование	24
Н. В. Замятин, Г. В. Смирнов, В. И. Маковкин	
Фильтр Калмана для измерения уровня веществ в резервуарах	31
В. П. Кощеев, Ю. Н. Штанов	
Индукцированное шумом подавление автоколебаний (флаттера) в модели Келдыша	36
С. Г. Пятков	
О разрешимости задачи Коши с данными на боковой поверхности прямоугольника для одномерного параболического уравнения	40
И. М. Клемышев, С. С. Лебедев, С. О. Старков	
Исследование возможностей создания нейросетевого программно-аппаратного комплекса для раннего видеонаблюдения возгорания в режиме реального времени	47
И. В. Бычин, А. В. Гореликов, А. В. Ряховский	
Схема дискретизации уравнения индукции на смещенных сетках в ортогональных криволинейных координатах	60
Г. Е. Деев, С. В. Ермаков, Н. А. Король	
Делитель $13^{-1} \cdot \bar{x} \bar{q}$	74
О. П. Бобровская, Т. В. Гавриленко	
Беспилотный автомобиль: подходы к реализации, проблемы	86

CONTENTS

70 th Birthday of Prof. Valery A. Galkin	6
V. A. Galkin	
On Fixed Points of Periodic Continuous Mappings to Plane \mathbb{R}^2 and Sphere S^2	8
A. Papadopoulos	
The Figure of the Earth: Geography, Astronomy and Geometry	11
N. N. Smirnov, V. F. Nikitin, E. I. Skryleva, Yu. G. Weisman	
Multiple Imbibition of a Porous Medium in Microgravity: Experiments and Simulation	24
N. V. Zamyatin, G. V. Smirnov, V. I. Makovkin	
The Kalman Filter for Tank Level Measurements	31
V. P. Koshcheev, Yu. N. Shtanov	
Noise Suppression of Self-Oscillation (Flutter) Using the Keldysh Model	36
S. G. Pyatkov	
Cauchy Problem Solvability with the Data Specified on the Rectangle Boundary for a One-Dimensional Parabolic Equation	40
I. M. Klemyshev, S. S. Lebedev, S. O. Starkov	
Developing a Neural Network-Based Hardware and Software System for Early Video Detection of Fires in Real Time	47
I. V. Bychin, A. V. Gorelikov, A. V. Ryakhovsky	
Discretization Scheme of the Induction Equation on a Staggered Grid in Orthogonal Curvilinear Coordinates	60
G. E. Deev, S. V. Ermakov, N. A. Korol	
$13^{-1} \cdot \bar{x} \bar{q}$ Divisor	74
O. P. Bobrovskaya, T. V. Gavrilenko	
The Autonomous Vehicle: Implementation and Issues	86



70 лет Галкину Валерию Алексеевичу

14 марта 2022 г. исполнилось 70 лет доктору физико-математических наук, директору Сургутского филиала ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, профессору кафедры прикладной математики Политехнического института Сургутского государственного университета, заместителю главного редактора журнала «Успехи кибернетики» Валерию Алексеевичу Галкину.

Родился Валерий Алексеевич 14 марта 1952 г. в г. Батуми. В 1969 г. поступил в Московский инженерно-физический институт, который окончил с отличием в 1975 г. по специальности «Прикладная математика». С 1975 г. работал на кафедре высшей математики Обнинского филиала «МИФИ» (преобразован в Обнинский институт атомной энергетики 01.11.1985 г., с 2002 г. — Обнинский государственный технический университет атомной энергетики, а в 2009 г. преобразован в Институт атомной энергетики — филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»). Работал в должности учебного мастера, затем — инженера, а с 1976 г. — в должности ассистента кафедры высшей математики. В 1978 г. защитил на физическом факультете МГУ подготовленную под руководством профессора В. А. Тупчиева кандидатскую диссертацию на тему «Математическая теория уравнения коагуляции».

В 1979 г. Валерий Алексеевич был избран на должность доцента кафедры прикладной математики Обнинского филиала МИФИ, в 1982 г. ему присвоено ученое звание доцента, а с июня 1999 г. по июнь 2012 г. являлся заведующим этой кафедрой. В 1994 г. В. А. Галкин успешно защитил в Институте математического моделирования РАН докторскую диссертацию на тему «Функциональные решения законов сохранения»; в 1995 г. избран на должность профессора кафедры прикладной математики; в

1996 г. ему присвоено ученое звание профессора. В 2010–2012 гг. В. А. Галкин являлся руководителем Обнинского института атомной энергетики — филиала НИЯУ «МИФИ».

С 2006 г. В. А. Галкин работает в Сургутском государственном университете, последовательно занимая должности заведующего кафедрой информатики и вычислительной техники, заведующего кафедрой прикладной математики, директора Политехнического института Сургутского государственного университета. В настоящее время Валерий Алексеевич — профессор кафедры прикладной математики и научный руководитель магистерской программы «Математическое и информационное обеспечение систем управления деятельностью предприятий нефтегазовой отрасли». Много сил и времени Валерий Алексеевич уделяет работе со студентами и аспирантами. Он подготовил более 120 дипломников, под его руководством получили степень кандидата наук 11 аспирантов.

Валерий Алексеевич возглавляет Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН с момента его создания в 2019 г.

В. А. Галкин — талантливый ученый и ведущий специалист в области нелинейных уравнений физической кинетики и гидродинамики, автор более 140 научных статей и 3 монографий. Основные научные результаты В. А. Галкина в области нелинейных уравнений: вычислительная устойчивость, глобальная сходимости аппроксимаций для систем законов сохранения, связанных с физической кинетикой и газовой динамикой. Эти исследования естественным образом оказались связанными с задачами нелинейных систем законов сохранения, включающих уравнения газовой динамики, гидродинамики, Кортевега — де Фриза, Кадомцева–Петвиашвили, системы Максвелла–Власова–Лиувилля и др. В. А. Галкиным получены фундаментальные результаты по выделению классов корректности, разработке и обоснованию глобальной сходимости приближенных методов для нелинейных законов сохранения во введенном им пространстве функциональных решений, снабженном топологией А. Н. Тихонова.

Широко известна научная деятельность В. А. Галкина, связанная с организацией и регулярным проведением в течение более 20 лет международных конференций, посвященных выдающимся российским математикам — академиком А. Н. Тихонову и П. Л. Чебышёву.

В 2002 г. В. А. Галкину за заслуги в области образования присвоено звание «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации», в 2016 г. он был награжден Российским национальным комитетом по теоретической и прикладной механике медалью Х. А. Рахматулина за большой вклад в развитие вычислительных методов при решении задач механики. Валерий Алексеевич является членом Российского национального комитета по индустриальной и прикладной математике, имеет сертификат эксперта Российской академии наук.

При поддержке РФФИ В. А. Галкин опубликовал две монографии: «Уравнение Смолуховского» (М.: Физматлит, 2001, 336 с.) и «Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского» (М.: БИНОМ, 2009, 408 с.).

Также при поддержке РФФИ им совместно с академиком Н. С. Бахваловым и профессором Ю. А. Дубинским было подготовлено издание «Труды С. Н. Кружкова» (М.: Физматлит, 2000, 336 с.).

В 2016 г. В. А. Галкин был выдвинут кандидатом в члены-корреспонденты РАН по Отделению математических наук РАН по специальности «Прикладная математика и информатика» Ученым советом Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук».

Свой юбилей Валерий Алексеевич встречает в полном расцвете творческих сил. Коллектив редакции журнала «Успехи кибернетики», друзья и коллеги от всей души желают ему крепкого здоровья, счастья, новых научных достижений и талантливых учеников.

**Главный редактор журнала «Успехи кибернетики»,
научный руководитель ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН
академик**



В. Б. Бетелин

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-1

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ \mathbb{R}^2 И СФЕРЕ S^2 **В. А. Галкин***Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Сургут, Российская Федерация
val-gal@yandex.ru*

Аннотация: исследованы условия появления неподвижной точки у идемпотентного непрерывного отображения на плоскости и, как следствие, существование, по крайней мере, двух неподвижных точек для отображений этого класса на двумерной сфере.

Ключевые слова: непрерывные отображения на плоскости, непрерывные отображения на сфере, периодические непрерывные отображения, неподвижные точки.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме № 0580-2021-0007 «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления».

Для цитирования: Галкин В. А. О неподвижных точках периодических непрерывных отображений на плоскости \mathbb{R}^2 и сфере S^2 . *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):8–10. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-1.

ON FIXED POINTS OF PERIODIC CONTINUOUS MAPPINGS TO PLANE \mathbb{R}^2 AND SPHERE S^2 **V. A. Galkin***Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation
val-gal@yandex.ru*

Abstract: the conditions for the emergence of a fixed point in an idempotent continuous mapping on the plane and, as a consequence, the existence of at least two fixed points for the mappings of this class on the two-dimensional sphere are studied.

Keywords: continuous mappings onto a plane, continuous mappings onto a sphere, periodic continuous mappings, fixed points.

Acknowledgements: this study is the 47 GP government order contracted to the Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences, project No. 0580-2021-0007 Advancing Distribution System Simulation and Computation Methods.

Cite this article: Galkin V. A. On Fixed Points of Periodic Continuous Mappings to Plane \mathbb{R}^2 and Sphere S^2 . *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):8–10. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-1.

Предметом настоящей статьи является вопрос о существовании неподвижных точек у непрерывного периодического отображения $f : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ и переносе этого утверждения на двумерную сферу S^2 . Ниже рассматривается случай идемпотентных непрерывных отображений на плоскости.

ТЕОРЕМА. Пусть для непрерывного отображения $f : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ выполнено тождество (условие идемпотентности) $f^2(x) \equiv x, \forall x \in \mathbb{R}_2$. Тогда существует, по крайней мере, одна неподвижная точка $\bar{x} = f(\bar{x})$.

Доказательство. Отметим, что в силу условия идемпотентности непрерывное отображение $f : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ является гомеоморфизмом. Выберем произвольную точку $a \in \mathbb{R}_2$ и её образ $f(a)$. Если выполнено равенство $a = f(a)$, то теорема доказана. Поэтому считаем, что $a \neq f(a)$. Рассмотрим отрезок $[a, f(a)]$ и его образ $f([a, f(a)])$. Обозначим интервал $(a, f(a)) = [a, f(a)] \setminus \{a, f(a)\}$ и, соответственно, его образ $- f((a, f(a)))$. Возможны два случая взаимного расположения отрезка и его образа.

В первом — $(a, f(a)) \cap f((a, f(a))) = \emptyset$, а во втором — $(a, f(a)) \cap f((a, f(a))) \neq \emptyset$. Отметим, что в последнем случае существует точка $a_1 \in (a, f(a))$, для которой $f(a_1) \in (a, f(a))$. Если для всех точек отрезка $a_1 \in [a, f(a)]$ справедливо соотношение $a_1 \neq f(a_1)$, то можно указать такую точку $\tilde{a} \in [a, f(a)]$, для которой выполнены условия: $f(\tilde{a}) \in (a, f(a))$ и $(\tilde{a}, f(\tilde{a})) \cap f((\tilde{a}, f(\tilde{a}))) = \emptyset$, т.е. для отрезка $[\tilde{a}, f(\tilde{a})]$ имеет место первый случай, который изучим ниже.

Рассмотрим область D на плоскости \mathbb{R}_2 , ограниченную отрезком $[a, f(a)]$ и его гомеоморфным образом $f([a, f(a)])$. Очевидно, что в данных условиях объединение $\gamma = [a, f(a)] \cup f([a, f(a)])$ гомеоморфно единичной окружности на плоскости. В силу теоремы Жордана (см. [1]) простая кривая γ (т.е. так называемая жорданова кривая) разбивает плоскость \mathbb{R}_2 на две связные компоненты и является их общей границей. (Теорема была сформулирована и доказана Камилем Жорданом в 1887 г. Теорема Жордана обобщается по размерности n : любое $(n - 1)$ -мерное подмногообразие в \mathbb{R}_n , гомеоморфное сфере, разбивает пространство на две связные компоненты и является их общей границей. При $n = 3$ это утверждение было доказано Лебегом, в общем случае — Брауэром, поэтому при произвольных $n > 3$ теорему Жордана иногда называют теоремой Жордана — Брауэра.)

Важнейшим усилением теоремы Жордана на плоскости \mathbb{R}_2 является теорема Шёнфлиса [2], по которой существует гомеоморфизм плоскости в себя, переводящий данную жорданову кривую в окружность. Таким образом, ограниченная компонента в вышеупомянутой теореме Жордана на \mathbb{R}_2 гомеоморфна единичному диску, а неограниченная компонента гомеоморфна внешности единичного диска. (Для размерностей $n \geq 3$ это утверждение не справедливо, примером чему является «рогатая сфера Александра», дающая патологический пример вложения сферы в пространство. Впервые она была описана Джеймсом Александером в 1924 г., см. [5, 6].)

Таким образом, в силу теоремы Шёнфлиса замыкание компактной компоненты \bar{D} плоскости, ограниченное построенной выше жордановой кривой $\gamma = [a, f(a)] \cup f([a, f(a)])$, гомеоморфно замкнутому кругу. Поскольку идемпотентное непрерывное отображение $f : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ является гомеоморфизмом на плоскости, образ $f(\bar{D})$ является компактом и в силу принципа соответствия границ при гомеоморфных отображениях и теоремы Жордана справедливо равенство $\partial f(\bar{D}) = \gamma$. Очевидно, что точки дополнения $\mathbb{R}_2 \setminus D$ не являются компактом, и, следовательно, значения $f(D) \notin \mathbb{R}_2 \setminus D$, и, значит, $f(\bar{D}) = \bar{D}$. Применяя теорему Брауэра о неподвижной точке [7] для непрерывного отображения $f : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$, устанавливаем существование неподвижной точки $\bar{x} = f(\bar{x})$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть непрерывное идемпотентное отображение двумерной сферы $f : S^2 \rightarrow S^2$ не отображает точки сферы на диаметрально им противоположные. Тогда f обладает, по крайней мере, двумя неподвижными точками.

Доказательство этого утверждения является прямым следствием известной теоремы «о еже» и доказанной выше теоремы об идемпотентном непрерывном отображении плоскости.

Вопрос о существовании неподвижных точек у непрерывных преобразований на сфере $f : S^2 \rightarrow S^2$, $\bar{x} = f(\bar{x})$ имеет богатую историю, связанную с так называемой теоремой о «причёсывании ежа», или кратко — с теоремой о «еже», восходящей к работам А. Пуанкаре [3] и Л.Э. Дж. Брауэра [4].

Теорема «о еже», или, как принято в западной литературе, “Hairy Ball Theorem” (см. [7, 8]) — «теорема о волосатом шаре» была впервые сформулирована А. Пуанкаре в 1885 г. В 1912 г. общий случай был исследован голландским математиком Л.Э. Дж. Брауэром [4], который доказал, что теорема Пуанкаре верна не только для двумерной сферы S^2 , но и для любой сферы чётной размерности. Утверждение теоремы Пуанкаре состоит в том, что на S^2 не существует непрерывного касательного векторного поля, которое нигде не обращается в ноль и, следовательно, любое непрерывное отображение $f : S^2 \rightarrow S^2$ либо имеет неподвижную точку $\bar{x} = f(\bar{x})$, либо отображает некоторую точку сферы на диаметрально ей противоположную. Таким образом, «ежа нельзя причесать»: хоть одна игла будет перпендикулярна поверхности (см. рис. 1 [9]).

Соответственно, здесь каждый вектор поля на сфере представляется как «игла ежа», растущая из каждой точки на сфере — «еже». По этой причине теорема обычно формулируется как «нельзя расчесать волосы на волосатом шаре ровно, не создавая завитка», поскольку процесс расчесывания шара эквивалентен определению векторного поля на его поверхности.

Таким образом, в силу сделанного предположения о том, что точки сферы не отображаются на диаметрально противоположные, обеспечивается наличие, по крайней мере, одной неподвижной точки, которую поместим на северный полюс сферы в точку с координатами $(0, 0, 1)$ и рассмотрим сте-



Рис. 1. Иллюстрация к теореме «о еже» [9]

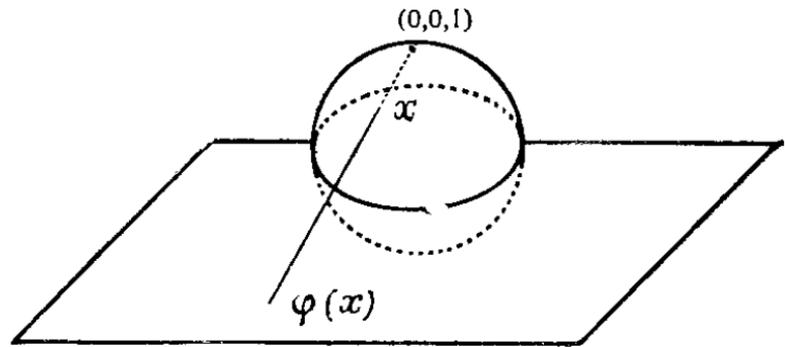


Рис. 2. Стереографическая проекция φ сферы S^2 на плоскость \mathbb{R}_2

реографическую проекцию $x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}_2, \forall x \in S^2 \setminus (0,0,1)$ сферы с «выколотым северным полюсом» на плоскость (см. рис. 2).

Отображение φ является гомеоморфизмом сферы с выколотым северным полюсом на плоскость \mathbb{R}_2 . В силу идемпотентности $f : S^2 \rightarrow S^2$ суперпозиция $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ является непрерывным идемпотентным отображением плоскости, у которого по доказанной теореме существует неподвижная точка. Тем самым устанавливается существование второй неподвижной точки у отображения $f : S^2 \rightarrow S^2$.

В связи с теоремой «о еже» можно указать метеорологическое приложение этой теоремы [10].

Важный класс задач, связанный с наличием периодических точек $\bar{x} = f^N(\bar{x})$, $N > 1$, для непрерывного гомеоморфного отображения сферы $f : S^2 \rightarrow S^2$, исследовался С. Смейлом [11].

Отметим, что из доказанного следствия вытекает, что наличие свойства периодичности чётного порядка для непрерывного отображения двумерной сферы, у которого степень, равная половине периода, не отображает точки сферы в диаметрально противоположные, приводит к существованию, по крайней мере, одной неподвижной точки и периодической точки с половинным периодом по отношению к полному периоду отображения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов И. М. Жордана теорема. *Математическая энциклопедия*. М.: Советская энциклопедия; 1977–1985.
2. Теорема Жордана. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Жордана#cite_note-autogenerated1-1.
3. Poincaré H. Sur les courbes définies par les équations différentielles. *J. Math. Pures. Appl.* 1885;4(1):167–244.
4. Brouwer L. E. J. Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 1912;71:97–115.
5. Alexander J. W. An Example of a Simply Connected Surface Bounding a Region which is not Simply Connected. *Proceedings of the National Academy of Sciences.* 1924;10(1):8–10. DOI: 10.1073/pnas.10.1.8.
6. Фукс Д. Рогатая сфера Александра. *Квант.* 1990;6:2–7.
7. Milnor J. Analytic Proofs of the «Hairy Ball Theorem» and the Brouwer Fixed Point Theorem. *The American Mathematical Monthly.* 1978;85(7):521–524.
8. Ioppolo M. The Hairy Ball Theorem. *AfterMath.* 2008;5:3–5.
9. Арнольд В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000.
10. Теорема о причёсывании ежа. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_о_причёсывании_ежа#Формулировка.
11. Смейл С. Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным количеством периодических точек. *Нелинейная динамика.* 2007;3(4):445–446.

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-2

ФОРМА ЗЕМЛИ: ГЕОГРАФИЯ, АСТРОНОМИЯ И ГЕОМЕТРИЯ**А. Пападопулос***Университет Страсбурга, Национальный центр научных исследований Франции, Страсбург,
Франция, papadop@math.unistra.fr**Посвящается моему уважаемому другу В. Галкину*

Аннотация: рассматривается, каким образом вопрос об установлении формы Земли привел к исследованиям в области дифференциальной геометрии сфероидов. Наша цель – показать, как вопросы географии приводили к появлению глубоких математических теорий.

Ключевые слова: геометрия сфероида, форма Земли, геодезия на выпуклых поверхностях, гидростатика.

Для цитирования: Пападопулос А. Форма Земли: география, астрономия и геометрия. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):11–23. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-2.

THE FIGURE OF THE EARTH: GEOGRAPHY, ASTRONOMY AND GEOMETRY**A. Papadopoulos***University of Strasbourg, The French National Centre for Scientific Research, Strasbourg, France,
papadop@math.unistra.fr**Dedicated to Valerii Galkin, with friendship and esteem*

Abstract: we explain how the question of the figure of the Earth led to the study of the differential geometry of the spheroid. More generally, our aim is to illustrate the fact that deep mathematical theories were motivated by geographical questions.

Keywords: geometry of the spheroid, figure of the Earth, geodesics on convex surfaces, hydrostatics.

Cite this article: Papadopoulos A. The Figure of the Earth: Geography, Astronomy and Geometry. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):11–23. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-2.

Introduction

In the last third of the seventeenth century, the belief that the Earth has a spherical shape, which was prevailing in the Western world since Greek Antiquity, started to be challenged, principally in France and in England. Two antagonistic theories arose at about the same time, concerning the figure of the Earth. One theory claimed that this figure is a spheroid (that is, an ellipsoid of revolution) which is oblate, that is, flattened at the Poles and elongated at the Equator, and the other one said that the Earth is a prolate spheroid, that is, elongated at the Poles and flattened at the Equator.

From the purely mathematical point of view, the belief that the Earth is a spheroid motivated to a large extent the development of the differential geometry of such a surface; this is the main point I would like to emphasize in the present paper. Before that, I start by some markers on the history of the problem of the figure of the Earth.

The plan of this paper is the following.

It begins with an overview of the problem of the figure of the Earth, as it was addressed starting in the last third of the 17th century, where two conflicting theories arose, the one saying that the Earth is an oblate spheroid and the other that it is prolate.

Then the reader is presented an overview of a paper by Leonhard Euler, addressed to the general public, in which he explains in simple words the physical ideas that were behind the various theories concerning the shape of the Earth.

We also survey some other works of Euler that are related to the figure of the Earth: First, two purely mathematical memoirs on the geometry and the trigonometry of the spheroid, then, a memoir on the impact of the spheroidal shape of the Earth on astronomical observations, and finally, a memoir on the gravitational force exerted by a planet which has the form of a spheroid.

The subsequent sections are concerned with the works of three prominent mathematicians on problems related to the spheroid, namely, Clairaut, Lagrange and Legendre. Each of them studied these questions from his own particular point of view: Clairaut as a specialist of hydrodynamics, Lagrange using analysis and the calculus of variations, and Legendre, introducing approximations techniques in geodesy.

We will also talk about Gauss whose work on the differential geometry of surfaces was motivated by his official position of geographer,

After that, we review some work of Jacobi who studied the spheroid in relation with his work on Abelian integrals.

In the end, we mention briefly the works of several other mathematicians who worked on the geometry of the spheroid, motivated by the question of the shape of the Earth.

The question of the figure of the Earth

Our chronicle starts in the year 1672, when the French astronomer Jean Richer was sent to Cayenne (a region in French Guiana, near the Equator) to observe the planet Mars and compute its parallax, with the aim of obtaining an estimate of the distance from this planet to the Earth. In doing his experiments, Richer noticed that the length of a pendulum performing one beat per second is longer in Paris than near the Equator. He concluded that the value of the gravitational force is smaller in Cayenne than in Paris. This showed that the factor representing the acceleration of gravity which appears in the formula for the period of the pendulum is not uniform all around the Earth but depends on the latitude. The theory saying that the Earth is spherical¹ started being questioned.

A few years later, Christiaan Huygens, who was certainly the most celebrated seventeenth-century mathematician living in Paris, emitted the theory that the particles constituting the Earth, in addition to the fact that they are subject to the gravitational attraction force, are submitted to a centrifugal force due to the rotation of the Earth around its axis, and he concluded that in order to reach an equilibrium under the action of these two forces, the Earth has necessarily the form of an oblate spheroid.

At about the same time, Isaac Newton, in the 1687 edition of his *Principia* (Book III, Propositions XVIII–XX), based on his theory of universal gravitation, declared that the Earth has the form of an oblate spheroid, confirming Huygen's conclusion (but not necessarily his theories). Newton's claim was based on his assumption that the Earth was originally a fluid having a spherical shape, and that it acquired gradually a spheroidal shape under the effect of the mutual attraction force exerted between its various parts combined with the effect of the Earth's rotation around its axis. In fact, Newton provided a precise estimate for the flattening of the Earth, namely, he claimed that if a and b denote respectively the major a and the minor axis of this spheroid, then $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{230}$. This estimate is different from the one that Huygens obtained. The latter, who did experiments using water pillars for the determination of the centrifugal force, and under the assumption that gravity is constant at the interior of the Earth, concluded that the Earth is more flattened at the Poles than what Newton thought.

Soon after, in France, the geographers and astronomers, led by Jean-Dominique Cassini² and based on a series of measurements that were conducted in the context of a project of land surveying, concluded that on the contrary, the Earth has the form of a prolate spheroid, that is, a spheroid elongated at the Poles and flattened at the Equator.

Each of the two points of view was defended vehemently, in England by the scientific community that was led by Newton, and in France by the astronomers of the Cassini family and other members of the Royal Academy of Sciences.

The dispute between the supporters of the two theories lasted several years, until the Royal Academy, together with the ministries of Marine and of Finances, and under the pressure of Pierre Louis de Maupertuis³,

¹ In all our discussion here, we are neglecting the differences in altitude on the surface of the Earth due to the existence of mountains, valleys, etc., these differences being very small compared to the diameter of the Earth.

² Jean-Dominique Cassini (1625–1712) was a leading astronomer of Italian origin, who settled in Paris. He was a member of the Royal Academy of Science and the director of the Paris Observatory. He was the first of an unusually long list of leading geographers and astronomers from the same family.

³ Pierre Louis de Maupertuis (1698–1759) was one of the main supporters in France of the theory saying that the Earth is oblate. More generally, he was a supporter of Newton's ideas on physics and philosophy, against the majority of the French academicians. We mention incidentally that in those times, there was a competition in France between Newton's and Descartes' ideas on subjects such as matter and attraction, and the dispute regarding the figure of the Earth was part of the debate between the supporters of the two theories, a debate that sometimes took the form of a conflict.

the famous French philosopher, mathematician, astronomer and naturalist, who was a distinguished member of this Academy, organized an expedition to Swedish Lapland whose objective was to measure the length of a degree of meridian in these regions close to the North Pole, in order to settle this question. Indeed, by the comparison between the result of these measurements with the length of a degree of a meridian at some known place far from the Pole (like Paris) would give information on whether the Earth is flattened or elongated at the North Pole.

The expedition took place in 1736–1737, under the leadership of Maupertuis, and including major scientists like the mathematician Alexis-Claude Clairaut and the Swedish mathematician, astronomer, geographer and meteorologist Anders Celsius. The results of this expedition were probably the most conclusive factors at that time regarding the question of the figure of the Earth.

Another expedition headed to Peru, the year before the one to Lapland, to make similar measures near the Equator. The Peru expedition lasted 9 years (1735 to 1744).

Euler's report on the figure of the Earth

I will start by an overview of an article by Euler on the question of the figure of the Earth, written for the general public. As a matter of fact, this question was not only discussed in scientific milieu, but also in the general cultured society of Saint Petersburg, Paris and other places, and it was not unnatural that Euler, who was a prolific writer, interested in all aspects of theoretical and applied sciences and eager to pass on his knowledge to all levels of the educated community, publishes such a review. The paper is titled *Von der Gestalt der Erden* (On the shape of the Earth) [1] and it appeared in 7 installments, between April 3 and December 25, 1738, in the *Anmerkungen über die Zeitungen* (Notes on the newspapers), a German magazine published in the imperial city. In this article, Euler explains using non-technical words, the reasons and the arguments that led to the two antagonistic theories concerning the figure of the Earth: a prolate or oblate spheroid. In his account, when he talks about the Earth having the form of an oblate spheroid, that is, a spheroid flattened at the Poles and elongated at the Equator, Euler says that it has the shape of an orange. In the contrary case, he says that the Earth has the shape of a melon.

Euler starts by recalling that in the preceding century, supporters of either point of view had strong arguments from physics, and he presents these arguments in simple words. Some of them are based on deep theories involving fluid mechanics and the general natural sciences, and other arguments are based on experimental measurements. Let us note right away that concerning this problem of the figure of the Earth, Euler's most important contribution is purely mathematical; we shall say more on it later in this paper. Euler notes in his *Anmerkungen* article that to address this question from a mathematical point of view, in particular, in order to make use of the methods of differential calculus, one must assume that the surface of the Earth is smooth. For that purpose, he supposes that the surface of the Earth is covered by still water. He notes that if the Earth were melon-shaped, then, bodies would be heavier near the Equator than near the Poles and he claims that the experiments done with pendulums are reliable in order to decide which one among the two prevailing theories is correct. In the case of a melon-shaped Earth, a pendulum beating accurately a second must be longer at the Equator than at the Poles.

Euler then reviews the geometry that lies behind the measurements of degrees of meridians that were carried out, with the help of astronomical observations, near the Poles and at the Equator. He talks about the Lapland and the Peru expeditions whose aim was not only to check whether the Earth is melon or orange-shaped, but also to provide precise measurements for the ratio of the axis of the Earth to its diameter. At the time Euler published his article, the Lapland expedition was already completed and its results indicated that the Earth is orange-shaped, that is, flattened at the Poles and elongated at the Equator. He declares that he is quite confident that the results of the Peru expedition will confirm this fact. Furthermore, the results of the latter expedition will still be important since they will give information on the length of the diameter of the Earth (which should be larger than its axis).

After presenting the problem of the figure of the Earth, Euler writes that he will explain how this question can be solved without appealing to measurements, but by pure reason. He starts by noting that if the Earth were perfectly round, the weight of an object would have the same value on all this surface, and as a vector (that is, represented by the vector of gravity, whose direction is given by a plumb line which indicates the vertical direction at each point), it would be directed towards the center. He notes that the last property is impossible to check practically, but that the fact that an object has the same weight at different locations of the Earth may be checked. In the case of a melon-shaped Earth, gravity near the Equator must

be greater than near the Poles, that is, a body is heavier near the Equator than near the Poles. Likewise, in the case of an orange-shaped Earth, the same object would be lighter near the Equator than near the Poles, that is, the force of gravity is greater at the Poles than at the Equator. Euler says that these considerations provide a practical way to check whether the Earth is round, or melon-shaped, or orange-shaped. It is interesting to note that such a gravitational argument was used by Aristotle about 2300 years before Euler, to conclude that the Earth is spherical⁴.

Euler then discusses the causes of gravity, and he recalls that this matter is still controversial. He declares that one cannot determine the variation of gravity on the surface of the Earth just by weighing the same object at different places, since the weight used in the scale will become lighter or heavier, like the body itself, and the results will not be conclusive. Therefore, one should study, rather than the weights of bodies, the gravitational force itself, and this can be deduced from the speed of falling bodies. Thus, if near the Equator and the Poles, a body falls from the same height in the same amount of time, then the Earth is spherical. If the height from which a body falls in one second is greater under the Equator than under the Poles, then the gravitational force is greater under the Equator than under the Poles, and in this case the Earth has the shape of a melon. In the contrary case, the Earth has the shape of an orange. But to make such measurements in a very precise way is not an easy matter, and Euler turns to pendulums.

The more the force of gravity is greater, the more the pendulum frequency is greater, for a fixed length. If at two places, pendulums of the same length make the same number of oscillations per unit of time, then the gravitational force is the same at the two places. If this takes place everywhere, then the figure of the Earth is spherical. But if the number of oscillations of a given pendulum is smaller (respectively greater) under the Equator than under the Poles, then the Earth is orange-shaped (respectively melon-shaped). Euler reports on experiments with pendulums that have been carried out at different places of the Earth by means of which it has been shown that the nearer one comes to the Equator, the shorter a pendulum indicating the same time is. Therefore these experiments show that the Earth is flattened at the Poles, that is, it has the form of an orange.

After having shown, with the help of pendulums, that the Earth is thicker at the Equator than near the Poles, the question became that of knowing by how much exactly, i.e., what is the ratio of the diameter of the Equator to the axis of the Earth. For this, Euler explains that one needs to calculate the length of one degree of meridian at different place of the Earth and to compare these measurements. Since the Earth is not spherical, the meridians are ellipses, and the length of degrees of meridians are not equal everywhere.

Another way of studying this question is to compare, near the Equator, the value of a degree of meridian with that of a degree of Equator. Euler recalls that finding the values of these degrees is done using astronomical observations. He explains how the degrees of meridian can be measured and he mentions the observations that were performed in France, and the expeditions to Lapland and Peru. To compute the degrees on the Equator, that is to say, degrees of longitude, it is necessary to observe the eclipses of the Moon, or of the moons of Jupiter.

Euler then talks about the figure of Jupiter, which was also shown to be orange-shaped. Furthermore, astronomical observations have concluded that the axis between the two Poles of this planet is smaller than the diameter of its Equator by a fraction of a tenth. Euler says that if the same thing could be observed for all the other planets, there would be no doubt about the figure of the Earth, and that the mere fact that this flattening of Jupiter was observed already gives us an indication of the possible figure of the Earth. He explains that all this is caused by the action of gravity, exerted on the fluid part that constitutes the Earth.

In fact, Euler was very much involved in questions on gravity. We shall mention below some of his memoirs related to this subject. Furthermore, several passages in his *Letters to a German Princess* are concerned with this subject. Moreover, Euler published in 1743 (anonymously) a memoir on gravity, *De causa gravitatis* (On the cause of gravity) [3],⁵ and he took up this subject again in his treatise *Anleitung zur Naturlehre* (Introduction to Natural Science) [4]. For a discussion of Euler's theories of gravity in relation

⁴ Aristotle gives this argument in Chapter 14 of Book II of his treatise *On the Heavens*. I discuss this in the first chapter of the volume [2].

⁵ It is probable that the reason why Euler remained anonymous is that he wished to avoid the controversies which the question of gravitation drew, between those who adhered to Newton's theories, mainly the English physicists, and those who did not, i.e., the French, German and Swiss. There were exceptions, of course. For example, Christiaan Huygens, the preeminent Dutch mathematician and physicist who lived in France, and Pierre-Louis de Maupertuis, the French astronomer and geographer, who became the president of the Prussian Academy of Sciences while Euler was working there, were supporters of Newton's ideas.

to the ideas of Newton, Descartes and others, I refer the reader to Andreas Kleinert's article [5].

On Euler's other writings in relation with the figure of the Earth

Among Euler's other writings on the figure of the Earth, I start with the geometrical memoir *Éléments de la trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et plus petits* (Elements of spheroidal trigonometry drawn from the method of the maxima and minima) [6] (1755), in which Euler presents the mathematical notions that underly the measurements of degrees of meridians conducted in Peru and Lapland, discussing the possible errors made during these measurements and their impact on the knowledge of the true figure of the Earth. In this memoir, he also studies the general trigonometry of a spheroid.

In order to develop a trigonometrical theory of a curved surface, one needs to introduce the notion of triangle on such a surface, and Euler starts his memoir by defining the notion of geodesic triangle on an arbitrary surface. We recall that spherical triangles were known since the work of Menelaus of Alexandria (1st-2nd c. AD), see [7]. It is possible that we have, in this memoir of Euler, for the first time in history, the notion of triangle on an arbitrary curved surface. After giving this general definition, Euler restricts his study to the case where the surface is a spheroid. The sides of such a triangle are geodesics on the spheroid, and these geodesics are generally, unlike the geodesics on the sphere, doubly curved lines, that is, they are not contained in a plane, a result noticed for the first time by Clairaut in his memoir [8] (1735) of which we shall say more in below.

Let us review some of the mathematical questions that Euler solves in his memoir:

- 1) Given the latitude of a point on the spheroid, to determine its distance to the centre of the Earth and the osculating radius at this point (Sections 4 and 5 of [6]);
- 2) Given two points situated on the same meridian, knowing their latitudes, to find the magnitude of the arc of meridian contained between them (Section 17 of [6]);
- 3) Given two points of which we know the latitudes and the difference between the longitudes, to find the shortest path between them (Section 19 of [6]);
- 4) To determine the ratio of the diameter of the Equator to the axis of the Earth, without using the measurements done by the expeditions near the Pole and near the Equator, but by a construction done in a small portion the Earth (Section 24 ff. of [6]).

Problem (3) is more general than Problem (2) and its solution needs the full power of the calculus of variations, or the "method of maxima and minima" as Euler used to call it, a theory that he had developed himself.

To solve Problem (4), Euler proposes a series of astronomical observations, together with the possibility of drawing a straight line (a geodesic) in the given region. Provided this can be done precisely, he gives a formula for the required ratio.

Note that the answers to the first three problems are straightforward in the case of a sphere. In the case of a spheroid, the latitude is defined as the angle made by a perpendicular to the surface of the Earth with its axis of rotation. Note that the perpendicular does not pass through the center of the spheroid, unless the point is on the Equator.

In Section 21 of the memoir, Euler provides a set of formulae which constitute the trigonometry of the spheroid announced in the title of his memoir. These formulae depend on a constant δ which is equal to $\frac{e^2 - a^2}{e^2 + a^2}$, where e is the semi-diameter and a is the semi-axis of the spheroid. For $\delta = 0$, the formulae give all the known rules of spherical trigonometry which Euler had amply covered in his previous memoirs.

From the practical point of view, Euler, in Sections 12-14 of the same memoir, based on the measurements conducted during the various expeditions, finds that the value of the ratio of the diameter of the Earth to its axis is equal to 230/229, and he notes that this value coincides with the one given by Newton in his *Principia*. He discusses in detail the other ratios that one may find by using other measurements and other methods of calculation. His methods for obtaining these results use approximation techniques. He notes that these methods are advantageous only in regions which are neither too close to the Equator nor to the Poles (§34).

Among the other memoirs of Euler that are concerned with the problems of gravity and the figure of the Earth, I mention the *Methodus viri celeberrimi Leonhardi Euleri determinandi gradus meridiani pariter ac paralleli telluris, secundum mensuram a celeb. de Maupertuis cum sociis institutam* (Method of the celebrated Leonhard Euler for the determination of a degree of a meridian, as well as of a parallel of the Earth, based on the measurement undertaken by the celebrated de Maupertuis and his colleagues) [9] (1750).

The title of this memoir is enough informative. Euler studies there several geographical problems, including the determination of the length of a degree of a meridian at a given latitude, and the determination of the latitude once we know the length of a degree of a parallel.

The subject of the next memoir we consider concerns the influence of the figure of the Earth on astronomy. It was published in 1747, and it is titled *De la parallaxe de la lune tant par rapport à sa hauteur qu'à son azimuth, dans l'hypothèse de la terre sphéroïdique* (On the parallax of the moon, both with respect to its elevation and its azimuth, under the hypothesis of a spheroidal Earth) [10]. The term "parallax" used here refers to the influence of the position of an observer on the trajectory of a celestial object, seen from his own position (the object being, here, the moon). From the mathematical viewpoint, this is a coordinate change problem, in the setting of the geometry of the spheroid. Euler starts his memoir by recalling that Maupertuis published a treatise on the parallax of the moon, in which he showed how the usual rules, that is, under the hypothesis of a spherical Earth, have to be modified, if one takes into consideration the spheroidal shape, but that the latter failed in taking into account one parameter, namely the azimuth, that is, the angle seen from the observer, in a horizontal plane, between the projection of the direction of the celestial object considered, and a given reference direction. He develops in this memoir [10] the trigonometric computations needed in this geometrical problem.

In the memoir *De attractione corporum sphaeroidico-ellipticorum* (On the attraction of spheroido-elliptical bodies) [11], published in 1738, Euler studies gravity on a planet which has a spheroidal shape, made out of a uniform material and in which the particles attract each other by a force whose magnitude is inversely proportional to the squares of the distances and rotates about the axis. Under such hypotheses, he obtains a formula for the attraction law between a particle situated at a Pole and another one at the Equator.

Clairaut

Alexis-Claude Clairaut is another eighteenth century scientist who worked on the problems of the figure of the Earth, both from the physical and mathematical viewpoints. Besides being an outstanding mathematician, Clairaut was an excellent physicist and astronomer. He had a regular correspondence with Euler, and each the two men had a lot of respect for the other's work. They regularly informed each other of their respective works. I have dwelt on the relation between Euler and Clairaut in the article [12].

Like Euler, Clairaut was thoroughly involved in hydrostatics, that is, in the theory of the equilibrium of forces acting on a fluid. His book, *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique* (Theory of the figure of the Earth, drawn from the principles of hydrostatics) [13], published in 1743, was motivated by the question of the figure of the Earth, and it constitutes an important piece of work on this subject. He develops there the idea that the Earth, originally constituted by a fluid matter, acquired gradually its spheroidal form, explaining this by the equilibrium laws of hydrostatics. His theory, which confirmed Newton's theory on the same topic, constitutes at the same time an extension of the latter's theory of universal attraction. In this book, we find the so-called Clairaut theorem which says that the Earth is a body in hydrostatic equilibrium under the sum of gravitational and centrifugal potentials satisfying a certain exact differential equation for a homogeneous field. It is also worth mentioning that in this work, Clairaut, while he confirmed Newton's conclusions on the form of the Earth, corrected some of the latter's computations, showing that the ratio of the minor axis to the major axis of the spheroid that it forms is 230/231, which is different from the value that Newton found.

The first part of Clairaut's work [13] is titled *Principes généraux pour trouver les hypothèses dans lesquelles les fluides peuvent être en équilibre, et pour déterminer la figure de la Terre et des autres planètes, lorsque la loi de la pesanteur est donnée*. (General principles for finding the hypotheses under which fluids can be in equilibrium, and for determining the figure of the Earth and of the other planets, given the law of gravity). In §1, Clairaut says that a fluid mass cannot be in equilibrium unless the forces of all parts contained in a channel of an arbitrary figure which we imagine as traversing the entire mass cancel each other. This is the first time that a principle of fluid equilibrium is stated. The methods that Clairaut uses in his work are geometrical. A few years later, with Lagrange's *Mécanique analytique* (1788), analytical methods became dominant in mechanics and hydrostatics.

The Earth as a spheroid was sometimes referred to in the eighteenth century science literature as the *Clairaut spheroid*.

Clairaut, like Euler, wrote several memoirs on the motion of the moon, for whose study he also followed Newton's ideas and in particular his law of attraction, the same law that explains the figure of

the Earth. On this subject, we mention his memoir: *De l'orbite de la lune dans le système de M. Newton*, (On the orbit of the moon in the system of Mr. Newton) (1746) [14] and *Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle* (On the system of the world in the principles of universal gravitation) (1749) [15].

More directly related to the figure of the Earth are the two memoirs *Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini avec plusieurs méthodes d'en tirer la grandeur et la figure de la terre* (Geometrical determination of the perpendicular to the meridian drawn by Mr. Cassini with several methods of extracting its length and the figure of the Earth) [8] and *Sur la nouvelle méthode de M. Cassini pour connaître la figure de la terre* (On the new method of Mr. Cassini to know the figure of the Earth) [16]. Despite the titles, these memoirs are geometrical. For instance, in [8], Clairaut shows that a geodesic which is not the Equator and which intersects perpendicularly a meridian cannot be planar unless this spheroid is a sphere. Clairaut furthermore determines the nature of that curve.

Motivated by the theory of the form of the Earth, Clairaut worked, before Euler, on the geometry and trigonometry of the ellipsoid of revolution. His two memoirs [8] and [16] contain several theorems on the geodesics on a surface of revolution which is not the sphere, in particular on the curvature of the curves obtained by the intersections of such surfaces with planes, with a special attention to the case of a spheroid.

The memoir *An inquiry concerning the figure of such planets as revolve about an axis, supposing the density continually to vary, from the centre towards the surface* [17] was presented to the Royal Academy of Paris and to the Royal Society of London in 1737–1738, and it was published in the latter's Transactions, translated into English. In this memoir, Clairaut returns to Newton's part of the *Principia* which is concerned with the figure of the Earth. He first announces that some observations he made under the Arctic circle, during the Lapland expedition, led him to believe that this figure was flatter than what Newton thought, and he expresses his surprise concerning the fact that Newton applied different physical theories, as to the causes of this ellipticity, regarding the Earth and Jupiter. But Clairaut is mostly interested in geometry, and the core of his memoir is mathematical. Among the problems that he discusses, we mention the following three:

- *Problem 1: To find the attraction which a homogeneous spheroid, differing but very little from a sphere, exerts upon a corpuscle placed at a point on the axis of revolution.*
- *Problem 2: The spheroid is no more supposed to be of a homogeneous matter, but composed of an infinite number of ellipsoidal strata which are all similar, and whose densities are represented by an arbitrary curve whose equation is known. To find the attraction that it exerts on a corpuscle placed at a Pole.*
- *Problem 3: To find the attraction which a spheroid exerts upon a corpuscle placed at an arbitrary point of its surface.*

From the point of view of fluid mechanics, we quote Lagrange, who declares in his *Mécanique analytique* that Clairaut changed the face of Hydrostatics, and made it a new science. He writes [18, t. 1, p. 179–180]:

[...] Clairaut made [Newton's principle] more general, by showing that the equilibrium of a fluid mass requires that the forces of all the components of the fluid enclosed in an arbitrary channel, ending at the surface or entering into itself, destroy each other. He was the first to deduce, from this principle, the true fundamental laws of equilibrium of a fluid mass whose parts are animated by arbitrary forces, and he found the partial difference equations by which these laws can be expressed, a discovery which changed the face of Hydrostatics, which he made a new science.

After this passage, Lagrange talks about Euler's work on hydrostatics, which, he says, is adopted in almost all the treatises on this science.

Lagrange was, among the 18th century preeminent mathematicians, Euler's young competitor who was closest to him in terms of depth of thought. We shall talk about him in the next section.

Lagrange

Motivated by the question of the figure of the Earth, Lagrange, in 1773, published a memoir titled *Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques* (On the attraction of elliptical spheroids) [19] in which he computed the attraction force exerted by an ellipsoid on a point situated either in the interior or outside this ellipsoid, but in the latter case the point is assumed to be on situated on one of its axes. In fact,

Lagrange worked out this problem for an ellipsoid with three axes of different lengths, that is, an ellipsoid which is more general than a spheroid. In the memoir we just mentioned, he recovers formulae that were established by Colin Maclaurin on the same question, recalling that the latter has already solved this question in a memoir which won a prize by the French Academy of Sciences in 1740. MacLaurin used geometric methods, and Lagrange says that from this point of view, this memoir is comparable to the most beautiful memoirs of Archimedes. But at the same time Lagrange finds it useful to have a solution that is based on analysis (differential and integral calculus), and this is the object of his own memoir.⁶ He declares in his memoir [19] that his aim, in giving a solution by analysis of the questions considered by Maclaurin, “will serve to destroy one of the main arguments that the detractors of Analysis can bring to lower it and to prove the superiority of the synthetic method of the Ancients”.

Among the problems that Lagrange considers, we mention the following three:

- *To find the general expression of the attraction that a body of a given figure exerts on a point placed wherever one wishes, assuming that each particle of the body attracts this point as an arbitrary function of distance.*
- *To determine the value of the attraction that a body whose surface is expressed by a second degree equation exerts on a point placed inside the body or on its surface, assuming the attraction is reciprocally proportional to the squares of the distances.*
- *Under the assumptions of the preceding problem, to find the attraction exerted on the a point placed outside the body.*

Legendre: geodesy and approximation

Legendre is one of the preeminent mathematicians of the 18th-19th centuries who were heavily involved in geodesy. In 1787, he collaborated with Jean-Dominique Cassini de Thury (also known as Cassini IV) for the determination of distances on the coasts of France and England using the method of triangulations. In his *Mémoire sur les opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la terre* (Memoir on the trigonometric operations whose results depend on the figure of the Earth) [20], published the same year, he gives some formulae that are necessary for geodesic calculations in triangles on the surface of a spheroid whose curvature is “infinitely small”, i.e., triangles whose sides are very small compared to the radius of the Earth. Such triangles appear in the method of triangulations used in geodesy. The formulae give what Legendre calls the angle at the horizon, the angle of depression or elevation of an observed point relative to the horizon at the place of observation, the distance to the horizon, the excess over 180° of the sum of the three angles of a reduced triangle at the horizon, the value of a degrees of meridian on the spheroid, as well as distances relative to the North Star. He talks about the use of the so-called *repeating circle*, an instrument introduced in France by Charles de Borda and Étienne Lenoir at the end of the 18th century for measuring astronomical distances for the purpose of geodesy. In the same memoir, Legendre obtains simple formulae for the shortest line which starts at a given point and making with the meridian a given angle. He writes that his work is motivated by problems in geography, in particular, those of establishing precise measurements for the coast of France.

In his memoir *Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde* (Analysis of triangles drawn on the surface of a spheroid) [21], read to the Academy of Sciences in 1806, Legendre continues the study of the geometry of the spheroid for its practical use in geodesy, and more precisely, for the purpose of showing the exactness of the measures that he conducted for the computation of distances between Dunkerque and Montjoux, near Barcelona, using a chain of geodesic triangles. From the mathematical point of view, Legendre considers the following problem: On the surface of the spheroid whose axis and diameter are known, given a triangle such that we know the following five quantities: two sides and a vertex they contain, the latitude of this vertex and the azimuth of one side, to determine the third side of the triangle (and therefore, to determine completely the triangle). He gives an approximate value of this side up to order 4, under the hypothesis that the Earth flattening is small. More precisely, he obtains a good approximation of a quantity z such that if the value of the known angle is lowered by this quantity, the third side is equal to the one of a Euclidean triangle formed by the two known sides and the angle $A - z$ they contain. At the same time, he shows that the difference in angles between this spheroidal triangle and the spherical

⁶ As a matter of fact, it is known that Lagrange, in several works (and the calculus of variations is one characteristic example), replaced Euler's geometric arguments by analytic ones.

triangle whose sides have the same lengths is of order three, and he notes that for the work in geodesy, the differences between such triangles are negligible.

It is interesting to see that Felix Klein, in vol. III of his famous treatise *Elementary mathematics from a higher standpoint* [22], comments on Legendre’s approximations in geodesy (see p. 175), and in particular on a theorem of the latter extracted from his *Géométrie* [23, p. 426] which says the following:

Suppose we are given a small triangle of angles α, β, γ on a sphere of radius one and a plane triangle of the same side lengths and angles α', β', γ' . Let us set ϵ to be the angle excess of the spherical triangle, that is, $\epsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$. Then we have $\alpha' = \alpha - \frac{\epsilon}{3}$, $\beta' = \beta - \frac{\epsilon}{3}$, $\gamma' = \gamma - \frac{\epsilon}{3}$.

Such a formula allows to conduct geodesic measurements with Euclidean triangles rather than spherical, which is much simpler for numerical calculations.

The same work by Klein contains a chapter on geodesy and on the measurements of gravity, under the hypothesis that the Earth is a spheroid.

Talking about Legendre, we finally mention his article with Delambre titled *Méthodes analytiques pour la Détermination d’un arc du Méridien* (Analytical methods for determination an arc of the meridian) [24] (1798).

Gauss, mathematician and geographer

C.-F. Gauss generalized Legendre’s considerations from the theoretical and applied point of view, again with practical surveying goals in mind, see [25, p. 115]. Dombrowski, the modern editor of Gauss’s *Disquisitiones generales circa superficies curvas* [25], quotes a letter from the latter to his friend H. W. Olbers in which he writes: “[. . .] In practice this [the difference of the correction values for the different angles of terrestrial geodesic triangles] is of course not at all important, because it is negligible for the largest triangles on Earth that can be measured; however, the dignity of science requires that we understand clearly the nature of this inequality”.

We recall that Gauss, besides being arguably the most important mathematician of his time, was also a geographer and a geodesist. Being the head of the University of Göttingen’s observatory, geography was part of his official activities. His works on the differential geometry of surfaces was motivated by questions on geography. In 1820, he was in charge of the project of measuring the extent of the Kingdom of Hanover, and for this, he realized a triangulation of these regions. His famous paper titled *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* (General solution of the problem: to represent the parts of a given surface on another so that the smallest parts of the representation shall be similar to the corresponding parts of the surface represented) [26], published in 1825, which contains his famous results on the conformal representation of simply connected surfaces, was motivated by geographical questions. Indeed, he writes in this paper that his aim is only to construct geographical maps and to study the general principles of geodesy for the task of land surveying.

Gauss’s famous geometrical paper, the *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (General investigations on curved surfaces), which contains his *Theorema Egregium* saying that curvature is the only obstruction for a surface to be faithfully represented on the plane (§12; p. 20 of the English translation), contains precise measurements of angles between Mt. Hohehagen, Brocken and Inselberg. We also mention Gauss’s 1828 paper on the spheroid, titled *Conforme Abbildung des Sphäroids in der Ebene (Projectionmethode der Hannoverschen Landesvermessung)* (Conformal mapping of the spheroid in the plane; projection method of the Hannoversche Landesvermessung) [27].

Jacobi and the relation with Abelian integrals

In the 19th century, the study of geodesics on the spheroid, and more generally, on the ellipsoid, was an important research topic, and several mathematicians worked on it. C. G. J. Jacobi studied this problem in several memoirs, see e.g. [28, 29] and the memoir published in 1841 and titled *De la ligne géodésique sur un ellipsoïde, et des différents usages d’une transformation analytique remarquable* (On the geodesic line on an ellipsoid and the various usages of a remarkable analytic transformation) [30]. In the last memoir, Jacobi declares that his motivation for the study of this problem arises from geography, and he mentions works of Lambert and Gauss on this topic, as well as works by Euler on mechanics. Jacobi was led in this study to abelian integrals, which is one of his favorite subjects. He studied similar problems of geodesy using elliptic functions.

In another memoir published in 1857 and titled *Solution nouvelle d'un problème fondamental de géodésie* (A new solution of a fundamental problem in geodesy) [31], Jacobi considers, on an ellipsoid having the shape of the Earth, a geodesic arc whose length is known, as well as the latitude and the azimuth angle at its origin, and he studies the question of finding the latitude and the azimuth angle at the extremity of this arc, as well as the difference in longitudes between the origin and the extremity. He writes that the same problem has been recently treated with particular care by Gauss, who gave different solutions of it.

Jacobi also included the study of closed geodesics on the ellipsoid in the context of dynamics, see [32]. Weierstrass continued Jacobi's work on closed geodesics on an ellipsoid and he introduced in this study theta functions, see [33].

Other works

Among the other works on the geometry of the spheroid motivated by questions of geography, let me mention Laplace's *Mécanique céleste* (Celestial mechanics, first version 1798) [34, p. 128ff], in which the latter studies the curves on a spheroid whose length is shortest among the curves joining two given points.

J. D. Gergonne wrote an article on loxodromic curves on an ellipsoid, *De la loxodromie, sur une surface de révolution, et, en particulier, sur un sphéroïde elliptique* (On loxodromy, on a surface of revolution, and in particular, on an elliptic spheroid) [35] (1817–1818). Here, the word *loxodromy* denotes a line on a surface of revolution which makes a constant angle with meridians. The author establishes a differential equation satisfied by such a curve and he solves it in the case of a spheroid.

Among the other mathematicians of the same period who were also geographers, we mention F. W. Bessel, who, in his paper *Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen* (The calculation of longitude and latitude from geodesic measurements) [36], gave a solution to the problem of the geodesics on the spheroid for its use in geography. An English translation of this paper by Ch. F. F. Karney and R. E. Deakin, is available. The same author, in 1837, wrote a paper titled *Bestimmung der Axen des elliptischen Rotations sphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht* (Determination of the axes of the elliptical rotational spheroid that is most consistent with existing measurements of Earth meridian arcs).

At the turn of the twentieth century, Poincaré studied geodesics on spheroids in the context of the theory of differential equations, more precisely, using a method of Lagrange that the latter introduced in his work on the motion of a planet under the action of perturbations due to other planets, and which he calls the “theory of variation of the constants”. In Poincaré's terminology, a *spheroid* is a convex surface which is sufficiently close to a sphere. In some sense, this study is a generalization of a study that Poincaré made earlier of geodesics on the sphere. In his paper *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes* (On the geodesic lines of convex surfaces) [37], published in 1905, Poincaré is interested in the number of stable closed geodesics on such a surface, that is, closed geodesics that remain so under small deformations. He shows that in the case of the spheroid, this number is odd. After treating this question on a spheroid, he addresses the same question in the case of a general convex surface. Poincaré's interest in this kind of questions is motivated by their relation with the 3-body problem.

Many other works on the geometry of the spheroid, or the ellipsoid, were done in the 19th century by various authors. We mention works of Cayley [38], Gundermann [39], Forsyth [40, 41] Helmert [42], Ivory [43], Kummell [44], Krüger [45], Liouville [46–48], Monge [49], Oriani [50, 51] Puissant [52, 53] and Stein [54].

We end our list with a more recent article. L. E. Ward, in a paper titled *Geodesics and plane arcs on an oblate spheroid* published in 1943 [55], studies the following question:

Given two points P_1 and P_2 on a spheroid that are not on the same meridian, let s_{12} be the length of the geodesic connecting them, and σ_{12} be the length of arc which is the intersection of the spheroid with the plane containing P_1 and P_2 and which passes by the center of the spheroid. By how much does σ_{12} exceed s_{12} ?

The author declares that this question is motivated by the current interest in navigation.

Later in the 20th century, J. Moser studied the geodesics on the spheroid in the context of isospectral deformations of surfaces, see [56, 57].

Conclusion

The geometry of the spheroid was already studied by Archimedes, back in the 3rd century BC (see the *Method treating of mechanical problems*, a work that Archimedes dedicated to Eratosthenes, who was, among other attributes, a major geographer [58]). Of course, neither Archimedes nor Eratosthenes talked about the Earth being a spheroid. It was after the geographical discoveries of the eighteenth century concerning the true figure of the Earth that the study of the spheroid was carried out in the setting of differential geometry and the calculus of variations.

It is interesting to see how questions in geography contributed to the development of geometry.

REFERENCES

1. Euler L. Von der Gestalt der Erden, Anmerckungen über die Zeitungen, St. Petersburg 3 April 1738 – 25 December 1738. *Opera Omnia*. Ser. III, vol. 2, p. 325–346.
2. Caddeo R., Papadopoulos A. *Geography in the Eighteenth century: Euler, Lagrange and Lambert*. Springer Nature, 2022.
3. Euler L. De causa gravitatis. *Miscellanea Berolinensia. Euler*. 1743;7(31):360–370.
4. Euler L. Anleitung zur Naturlehre. *Opera Postuma*. 1862;2:449–560. *Opera Omnia*. Series 3, Volume 1, p. 16–180.
5. Kleinert A. Euler, Lesage et Newton: Trois approches différentes pour résoudre le problème de la pesanteur, In: X. Hascher et A. Papadopoulos (ed.). *Leonhard Euler, mathématicien, physicien et théoricien de la musique*. CNRS Éditions, Paris, 2015.
6. Euler L. Éléments de la trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et plus petits, *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*. 1755;9:258–293. *Opera Omnia*. Series 1, Volume 27, p. 309–339. English translation in the present volume.
7. Rashed R., Papadopoulos A. *Menelaus' Spherics: Early Translation and al-Māhānī/al-Harawī's Version*. De Gruyter, Series: Scientia Graeco-Arabica, 21, 2017. 890 p.
8. Clairaut A.-C. Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini avec plusieurs méthodes d'en tirer la grandeur et la figure de la terre. *Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris*. 1735, p. 404–416.
9. Euler L. Methodus viri celeberrimi Leonhardi Euleri determinandi gradus meridiani pariter ac paralleli telluris, secundum mensuram a celeb. de Maupertuis cum sociis institutam. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*. 1750;12:224–231. *Opera Omnia*. Series 2, Volume 30, p. 73–88.
10. Euler L. De la parallaxe de la lune tant par rapport à sa hauteur qu'à son azimuth, dans l'hypothèse de la terre sphéroïdique. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*. 1751;5:326–338. *Opera Omnia*. Series 2, Volume 30, p. 140–150.
11. Euler L. De attractione corporum sphaeroidico-ellipticorum. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*. Volume 10, p. 102–115. *Opera Omnia*. Series 2, Volume 6, pp. 175–188.
12. Papadopoulos A. Clairaut, Euler and the figure of the Earth. *Ganita-Bharati: Bulletin of the Indian Society for History of Mathematics*. 2022.
13. Clairaut A. *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique*. Paris, David Fils, 1743.
14. Clairaut A.-C. De l'orbite de la lune dans le système de M. Newton. *Mém. Acad. Roy. Sc.* 1746, p. 17–32.
15. Clairaut A.-C. Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle. *Mém. Acad. Roy. Sc.* 1749, p. 329–364.
16. Clairaut A.-C. Sur la nouvelle méthode de M. Cassini pour connaître la figure de la terre. *Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris*. 1738, p. 117–122.
17. Clairaut A.-C. An Inquiry concerning the Figure of Such Planets as Revolve about an Axis, Supposing the Density Continually to Vary, from the Centre towards the Surface, Translated from the French by the Rev. John Colson Lucas. *Philosophical Transactions*. 1737–1738;40:277–306.
18. Lagrange J.-L. *Mécanique analytique*. Paris: Nouvelle édition, Courcier; 1811.
19. Lagrange J.-L. Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*. 1773. Œuvres, vol. 3, p. 619–658.
20. Legendre A.-M. Mémoire sur les opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la terre. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*. 1787, p. 252–283.

21. Legendre A.-M. Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde, Lu à la séance de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut, le 3 mars 1806. *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut national de France*. Ier sem., p. 130–161.
22. Klein F. *Elementary mathematics from a higher standpoint, Volume III: Precision mathematics and approximation mathematics*. Transl. by M. Menghini and A. Baccaglini-Frank, 2016, Springer.
23. Legendre A.-M. *Géométrie*. 12e édition, Paris, 1823.
24. Delambre J.-B.-J. *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, Précédées d'un mémoire sur le même sujet par A.-M. Legendre*. Paris, Duprat, 1798.
25. Dombrowski P. 150 years after Gauss' "disquisitiones generales circa superficies curvas". *Astérisque*. 1979;62.
26. Gauss C. F. Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. *Astronom. Abh.* (Schumacher ed.) 1825;3:1–30 (Also in *Gauss's Werke*. 4:189–216).
27. Gauss C. F. Conforme Abbildung des Sphäroids in der Ebene (Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung), König. Ges. Wiss., Göttingen (1828). *Carl Friedrich Gauss Werke*. (Ges. Wiss., Göttingen) 1903;9:142–194.
28. Jacobi C. G. J. Lettre de M. Jacobi à M. Arago concernant les lignes géodésiques tracées sur un ellipsoïde à trois axes. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*. Paris. 1839;8:284.
29. Jacobi C. G. J. Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschinden Anwendungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1939;19:309–313.
30. Jacobi C. G. J. De la ligne géodésique sur un ellipsoïde, et des différents usages d'une transformation analytique remarquable. *Journal de mathématiques pures et appliquées Ire série*. 1841;6:267–272.
31. Jacobi C. G. J. Solution nouvelle d'un problème fondamental de géodésie. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 53:335–341. *Gesammelte Werke*. 1857;2:417–424.
32. Jacobi C. G. J. *Vorlesungen über Dynamic*. *Gesammelte Werke*. Supplement band, Berlin, 1884.
33. Weierstrass K. Über die geodätischen Linien dem dreiachsigen Ellipsoid. *Monatsber. Königl. Akad. Wiss.* 1861, p. 257–273.
34. De Laplace P. S. *Mécanique céleste*. Vol. 2. Œuvres. Vol. 2, Paris: Imprimerie Royale; 1843.
35. Gergonne J. D. De la loxodromie, sur une surface de révolution, et, en particulier, sur un sphéroïde elliptique. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*. 1817–1818;8:125–136.
36. Bessel F. W. Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen (The calculation of longitude and latitude from geodesic measurements). *Astronomische Nachrichten*. 1825;4(86):241–254.
37. Poincaré H. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1905;6(3):237–274.
38. Cayley A. On the geodesic lines on an ellipsoid. *Mem. Roy. Astron. Soc.* 1872;39:31–53 & plate 2. *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. 1894;7 (Cambridge Univ. Press), paper 478, pp. 493–510.
39. Gudermann C. Fundamenta trigonometriae sphaeroidicae exacta; imprimis de lineis brevissimis, vulgo dictis geodaeticis, in superficie sphaeroidica. *Jour. Crelle*. 1852;43:294–339.
40. Forsyth A. R. Geodesics on an oblate spheroid. *Mess. Math.* 1896;25:81–124.
41. Forsyth A. R. Conjugate points of geodesics on an oblate spheroid. *Mess. Math.* 1896;25:161–169.
42. Helmert F. R. Entwicklung der ersten Glieder für die Reduction eines sphäroidischen Dreiecks auf ein sphärisches mit denselben Seiten. *Z. f. Vermess.* 1889;18(9):257–268.
43. Ivory J. On the properties of a line of shortest distance traced on the surface of an oblate spheroid. *Phil. Mag.* 1826;67(336):241–249. 1826;67(337):340–352.
44. Kummell C. H. On the determination of the shortest distance between two points on a spheroid. *Astron. Nachr.* 1885;112:97–108.
45. Krüger J. H. L. *Die geodätische Linie des Sphäroids und Untersuchung darüber, wann dieselbe aufhört, kürzeste Linie zu sein*. Inaugural-Dissertation, Univ. Tübingen, Schade, Berlin, 1883.
46. Liouville J. Démonstration géométrique relative à l'équation des lignes géodésiques sur un ellipsoïde quelconque. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*. Paris, 22. 1846, p. 111–113.
47. Liouville J. Théorèmes concernant les lignes géodésiques et les lignes de courbure de l'ellipsoïde.

- Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*. Paris, 22. 1846, p. 893.
48. Liouville J. De la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Paris, 9. 1844, p. 401–408.
 49. Monge G. Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde (1796). *Application de l'Analyse à la Géométrie*. 5th edition, Bachelier, Paris, 1850, p. 139–160.
 50. Oriani B. *Elementi di trigonometria sferoidica*, Part 1: Mem. dell'Ist. Naz. Ital. Part 1: 1(1), 118–198 (Bologna, 1806); Part 2: 2(1), 1–58 (Bologna, 1808); Part 3: 2(2), 1–58 (Bologna, 1810); Addendum: Mem. dell'Imp. Reg. Ist. del Regno Lombardo-Veneto 4, 325–331 (Milan, 1833).
 51. Oriani B. Esempi di calcolo nella soluzione di alcuni problemi di trigonometria sferoidica. *Effemeridi astronomiche di Milano*. 1827, 3–24 (1826); 1828, 3–32 (1827); 1829, 3–24 (Milano 1828).
 52. Puissant L. Note sur la trigonométrie sphéroïde, dans laquelle on détermine généralement la plus courte distance de deux point donnés sur la terre par leur latitude et leur longitude Conn. des Tems, 1832, 34–48 (Bachelier, Paris, 1829).
 53. Puissant L. Nouvel essai de trigonométrie sphéroïdique. *Mém. l'Acad. Roy. des Sciences de l'Inst. de France*. 1831;10:457–529.
 54. Stein J. P. W. *Geographische Trigonometrie oder die Auflösung der geradlinigen, sphärischen und sphäroidischen Dreiecke*. Mainz, 1825. Part 2, Chap. 2.
 55. Ward L. E. Geodesics and plane arcs on an oblate spheroid. *American Math. Monthly*. 1943;50(7):423–429.
 56. Moser J. Various aspects of integrable Hamiltonian systems. *Dynamical Systems*. 1980. *Progress in Mathematics*, 8, Birkhäuser, p. 233–287.
 57. Moser J. Geometry of quadrics and spectral theory. *The Chern Symposium*. 1979, Springer Verlag, 1980, p. 147–188.
 58. Heath T. L. *The works of Archimedes*. Cambridge: at the University Press, 1897, reprint, Dover, 2002.
 59. Caddeo R., Hascher X., Jedrzejewski F., Papadopoulos A. *Christiaan Huygens: Écrits sur la musique et le son, critical edition, with mathematical, musical and historical commentaries*. Paris: Hermann (coll. Théorie de la musique); 2021, 496 p.
 60. Gauss C. F. Conforme Abbildung des Sphäroids in der Ebene (Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung). König. Ges. Wiss., Göttingen (1828). *Carl Friedrich Gauss Werke*. (Ges. Wiss., Göttingen) 1903;9:142–194.
 61. Gauss C. F. *Disquisitiones generales circa superficies curvas, English translation: General investigations of curved surfaces of 1825 and 1827*. Translated with notes and a bibliography by J.C. Morehead and A.M. Hiltnerbeitel. Princeton, 1902.
 62. De Laplace P. S. Mémoire sur la figure de la terre. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*. 1786, p. 17–47. *Œuvres complètes*. Vol. 11.

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-3

**МНОГОКРАТНАЯ ПРОПИТКА ПОРИСТОЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ:
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ****Н. Н. Смирнов^{1,2}, В. Ф. Никитин^{1,2}, Е. И. Скрылева^{1,2}, Ю. Г. Вайсман¹**¹ *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*² *Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация
jennynne@yandex.ru*

Аннотация: в работе рассматривается процесс многократной пропитки пористой среды за счет капиллярных сил в условиях микрогравитации. Подобные исследования имеют большое значение как для космических технологий, так и для земных приложений. Например, на космической станции течение жидкости за счет капиллярных эффектов можно наблюдать в тепловых трубках, очистных системах, в гидропонных системах для выращивания растений. В условиях земной гравитации капиллярные эффекты могут также оказывать существенное влияние на фильтрационные течения, например при добыче углеводородов, когда происходит одновременное течение нескольких флюидов сквозь пористую среду.

Наблюдение капиллярных эффектов при обычной гравитации затруднено, так как действие силы тяжести преобладает над капиллярными силами, маскируя некоторые важные аспекты. В данной работе рассматриваются эксперименты по течению жидкости сквозь высокопроницаемую пористую среду во время параболических полетов. Результаты экспериментов показали, что с каждой последующей параболой жидкость поднимается выше, т.е. наблюдается более интенсивная пропитка в уже смоченной среде. Для моделирования таких процессов требуются специальные математические модели, учитывающие гистерезис. В статье описаны такие модели и представлены результаты численного моделирования на их основе. Приведено сравнение экспериментальных данных и результатов численного моделирования фильтрационных потоков жидкости, показана возможность определения неизвестных эмпирических констант на экспериментальной базе.

Ключевые слова: капиллярные эффекты, микрогравитация, фильтрация, гистерезис.

Благодарности: работа выполнена за счет субсидии, выделенной МГУ им. М.В. Ломоносова на выполнение государственного задания по теме «Динамика взаимодействия жидких, твердых и газообразных сред».

Для цитирования: Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф., Скрылева Е. И., Вайсман Ю. Г. Многократная пропитка пористой среды в условиях микрогравитации: экспериментальные исследования и математическое моделирование. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):24–30. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-3.

**MULTIPLE IMBIBITION OF A POROUS MEDIUM IN MICROGRAVITY: EXPERIMENTS
AND SIMULATION****N. N. Smirnov^{1,2}, V. F. Nikitin^{1,2}, E. I. Skryleva^{1,2}, Yu. G. Weisman¹**¹ *Moscow State University, Moscow, Russian Federation*² *Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russian Federation
jennynne@yandex.ru*

Abstract: the paper considers multiple successive imbibitions of a porous medium due to capillary forces in microgravity. Such studies are of great importance both for space and Earth technologies. For example, on space stations liquid flows due to capillary effects can be observed in heat pipes, purification systems, and hydroponic plant growing systems growing plants. Under the Earth’s gravity, capillary phenomena significantly affect seepage flows (e.g., in hydrocarbon production) when several fluids flow simultaneously through a porous medium.

Observing capillary effects under normal gravity is difficult because gravity dominates over capillary forces, masking some key aspects. This paper discusses experimental studies of liquid flows through a highly

permeable porous medium during parabolic flights. The results show that with each subsequent parabola arc, the liquid rises higher, i.e. there is more intensive imbibition in the already wetted medium. To simulate such processes, special models are required to consider hysteresis. The paper covers such models and presents the simulation results. The experimental data and simulation of seepage fluid flows are compared. Unknown empirical constants can be estimated experimentally.

Keywords: capillary effects, microgravity, seepage, hysteresis.

Acknowledgements: this work is supported by Moscow State University subsidy for the Dynamics of Interaction between Liquid, Solid, And Gaseous Media government contract.

Cite this article: Smirnov N. N., Nikitin V. F., Skryleva E. I., Weisman Yu. G. Multiple Imbibition of a Porous Medium in Microgravity: Experiments and Simulation. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):24–30. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-3.

Введение

Исследование процесса фильтрации под действием капиллярных сил в условиях микрогравитации представляет большой интерес для земных и космических технологий. Например, на космических аппаратах капиллярное движение жидкостей наблюдается в различных устройствах и процессах, таких как системы очистки, тепловые трубки (рис. 1) или подкачка топлива в условиях невесомости.

Капиллярные силы играют главную роль при выращивании растений гидропонным способом (рис. 2), то есть в искусственных средах без почвы. Движение жидкостей, происходящее внутри живых организмов в условиях малой гравитации, отличается от того, что происходит в земных условиях. Знания об этих процессах могут найти применение в космической биомедицине.

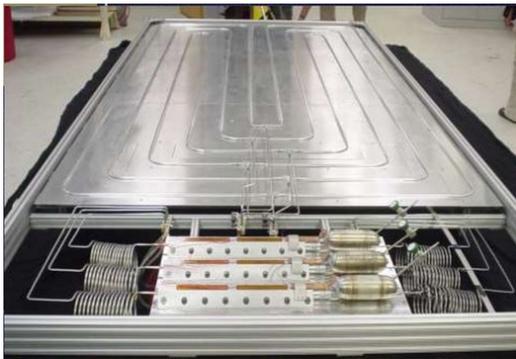


Рис. 1. Терморегуляция на космическом корабле: движение жидкости в тепловых трубках под действием капиллярных сил



Рис. 2. Выращивание растений в условиях микрогравитации: распределение воды или питательного раствора в корневой зоне

Изучение капиллярных эффектов в земных условиях [1–4] затруднено: в стандартных пористых средах течения трудно визуализировать, а в средах с крупными порами капиллярная пропитка невозможна из-за преобладающего влияния силы тяжести. В данной работе рассматриваются течения в высокопроницаемых пористых средах в условиях микрогравитации, которые достигаются посредством параболических полетов (рис. 3).

Также в работе описывается новый способ обработки экспериментальных данных, приводятся результаты такой обработки. Представлены результаты вычислительного моделирования многократной пропитки пористой среды в условиях микрогравитации. Моделирование процесса происходит с использованием некоторых эмпирических констант, значения которых подбираются на основе экспериментальных данных.

Рассматривается течение двух несжимаемых жидкостей в неподвижном пористом скелете, фазовые переходы отсутствуют. Тепловые и инерционные эффекты не учитываются. Значение и направление гравитации меняется с течением времени. Учитывается гистерезис относительных проницаемостей и капиллярного давления. Задача представляет собой вытеснение одной жидкости другой за счет капиллярных эффектов.

Математическая модель

Подробно вопросы математического и численного моделирования процесса многократной пропитки пористой среды в условиях микрогравитации описаны в [6, 7].

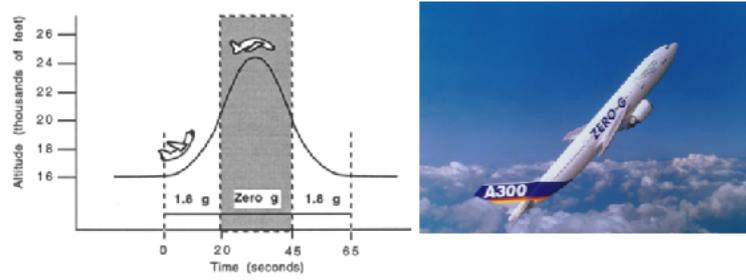


Рис. 3. Параболические полеты

Уравнения баланса массы фаз запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho_k s_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_k u_{k,j}) = 0. \quad (1)$$

Средняя по объему скорость фильтрации определяется как

$$u_j = \sum_k u_{k,j}.$$

Считаем, что пористость среды не зависит от времени. Плотности жидкостей полагаем постоянными, тогда после суммирования уравнений (1) получим:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Запишем уравнения баланса импульса в форме закона Дарси:

$$v_{kj} = -K_A \frac{K_k^R(s_1, s_2)}{\mu_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_j} + \rho_k g_j \right),$$

где $v_{kj} = u_{k,i} / \varphi s_k$.

Давление между фазами определяется капиллярным давлением, зависящим только от насыщенности:

$$p_1^c(s_1) = p_2 - p_1.$$

Будем моделировать капиллярное давление по модели Леверетта:

$$p_c = \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{K_A / \phi}} J(S), \quad J(S) = C_0 + C_W S^{-n_1} - C_N (1-S)^{-n_2}.$$

Относительные проницаемости моделируются согласно модели Кори, которая в общем случае выглядит так:

$$K_1^R = a_1 S^{n_1}, \quad K_2^R = a_2 (1-S)^{n_2}, \quad S = \frac{s - s_1^R}{1 - (s_1^R + s_2^R)}.$$

Без гистерезиса дренажа и пропитки здесь везде константы, с гистерезисом переменными являются остаточные насыщенности и значения a_k .

Пусть изначально образец сухой, заполнен несмачивающей второй фазой. Тогда начальное состояние $s_1^R = 0$. При этом:

$$s_2^R = \frac{1}{1 + C_2} = \text{const.}$$

При этом $a_1 = k_1^R$, $a_2 = 1$. Эти постоянные сохраняются до тех пор, пока идет пропитка, то есть пока выполняется условие $\partial s / \partial t \geq 0$.

Пусть в некоторый момент знак производной насыщенности сменился: $\partial s/\partial t < 0$. Значение s_1^R , которое сохраняется за все время дренажа, будет равно

$$s_1^R = \frac{s_1^{\max}}{1 + C_1 s_1^{\max}}.$$

Здесь s_1^{\max} — максимальное значение насыщенности первой фазы, достигнутое во время пропитки. Постоянные C_1, C_2 задаются изначально, они называются постоянными Лэнда, а эта модель гистерезиса — моделью Лэнда. Также изменятся постоянные $a_1 = 1, a_2 = k_2^R$, эта смена отражает характер относительных проницаемостей при дренаже и пропитке.

Если знак производной насыщенности опять сменится и снова начнется пропитка, величина s_1^R останется прежней, поменяются только a_1 и a_2 .

Задача одномерная, все переменные заданы на отрезке $x \in [0, L]$. В начальном состоянии столб пористой среды пропитан до высоты x_{ini} :

$$s_1 = \begin{cases} 0, & x \geq x_{ini}, \\ 1, & x < x_{ini}. \end{cases}$$

Граничные условия таковы:

$x = 0$: $p = p_\infty$ — начальное гидростатическое давление,

$x = L$: $p = p_0$ — атмосферное давление.

Экспериментальные исследования

Экспериментальная ячейка [8] представляет собой полый алюминиевый параллелепипед. Две противоположные стороны ячейки оборудованы стеклянными окошками, предназначенными для наблюдения за капиллярной пропиткой (рис. 4). Пористая среда моделируется насыпкой стеклянных шариков.



Рис. 4. Экспериментальная ячейка

Такая среда обладает рядом преимуществ. Правильная форма шариков позволяет пренебречь возможной анизотропностью среды, упрощая исследование течения жидкости, а прозрачность среды предоставляет возможность легко визуализировать инерционное течение. Снизу к ячейке с помощью небольшого канала подсоединен резервуар, из которого жидкость поступает в ячейку. В течение всего эксперимента ведется видеозапись капиллярной пропитки пористой среды. Впоследствии она разбивается на последовательность изображений. Изначально течение жидкости изучалось по исходным изображениям, но было затруднено из-за недостаточной контрастности фотографий. Опишем метод обработки снимков для облегчения исследования движения фронта жидкости. Каждому изображению соответствует гистограмма, она показывает количество пикселей того или иного оттенка серого. Условно снимок можно разбить на две зоны: более светлую, которая соответствует еще не пропитанной пористой среде, и более темную, показывающую движение жидкости. На гистограмме это отражено в виде двух пиков (рис. 5).

Гистограмма обычно сильно «зубчатая», чтобы ее сгладить, накладывался размывающий фильтр.

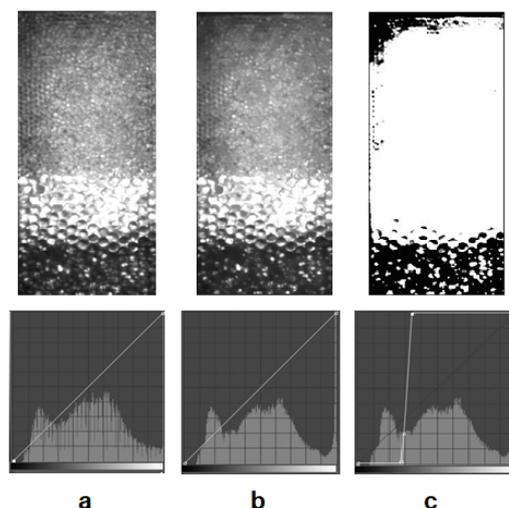


Рис. 5. *Обработка экспериментальных данных*

Далее изменялась кривая уровней так, чтобы она проходила через локальный минимум между этими двумя пиками. Более крутые части кривой представляют собой области высокого контраста, а плоские части кривой — области низкого контраста. Существует некоторая погрешность, поэтому на изображении могут оставаться пиксели темно-серых или почти белых оттенков, но их наличие несущественно. Такой способ обработки значительно упрощает исследование движения фронта жидкости. На основе обработанных изображений были построены графики движения фронта жидкости.

На первом графике (рис. 6) изображены пять последовательных парабол, в течение которых жидкость то поднималась, то опускалась. Фильтрация происходила в однородной среде, диаметр шариков — 2 мм. Можно заметить, что при повторной пропитке жидкость с каждым разом поднималась все выше и выше, то есть по уже смоченной пористой среде жидкость поднимается интенсивнее.

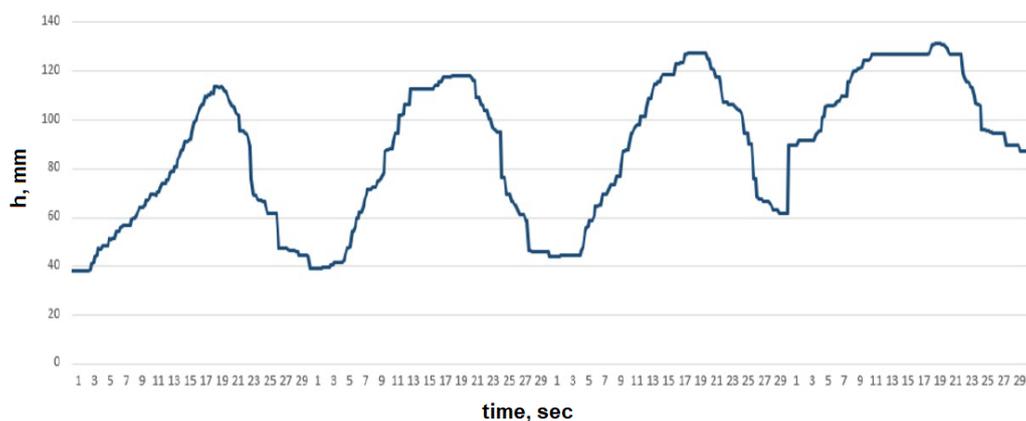


Рис. 6. *Многokrатная пропитка однородной пористой среды*

Второй график (рис. 7) соответствует капиллярной пропитке неоднородной среды, представленной на рисунке 5. Диаметр крупных шариков — 6 мм, мелких — 2 мм. Видно, что в менее проницаемой среде капиллярные эффекты сильнее, но больше сопротивление, поэтому на небольшом участке графика наблюдается резкое ускорение фронта, но затем он резко замедляется.

На рис. 8 представлено сравнение численного расчета, основанного на математической модели, описанной выше, и экспериментальных данных. Расчет согласуется с экспериментом: как в эксперименте, так и в расчетах жидкость при повторной пропитке поднимается выше.

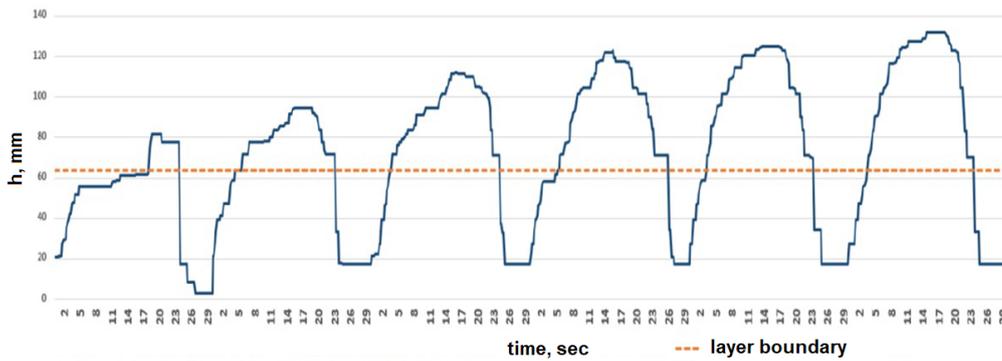


Рис. 7. Многократная пропитка неоднородной пористой среды

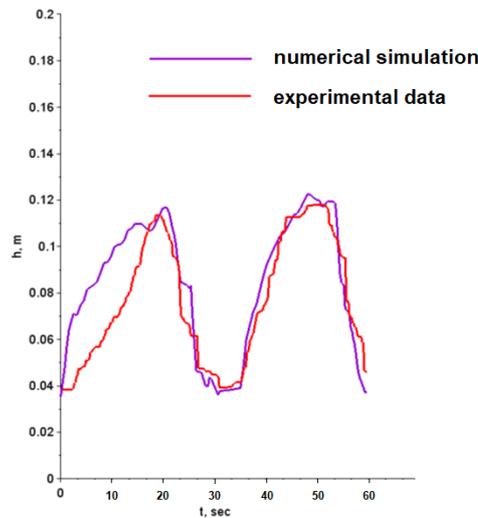


Рис. 8. Сравнение результата численного моделирования и экспериментальных данных

В расчете использовались следующие константы:

$$C_1 = 25, \quad C_2 = 9.3, \quad k_1^R = k_2^R = 0.015, \\ a_W = a_N = 0.5, \quad C_0 = 0.02, \quad C_W = 0.015, \quad C_N = 0.009.$$

Заключение

В случае многократной пропитки пористой среды просачивание происходит интенсивнее сквозь уже смоченную среду. Рассмотрена математическая модель с учетом гистерезиса, когда режим пропитки несколько раз сменяется режимом дренажа. На основе предложенной модели проводится численное моделирование процесса многократной пропитки пористой среды. На экспериментальном базисе были выбраны эмпирические константы в математической модели. Показано, что результаты численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными результатами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. M. *Theory of Fluids Flows through Natural Rocks*. Springer Netherlands; 1990.
2. Bear J., Bachmat Y. *Introduction to Modelling of Transport Phenomena in Porous Media*. Kluwer Academic Publishers-Dordrecht, Boston, London, 1990.
3. Kaviany M. *Principles of Heat Transfer in Porous Media*. Second Ed. Springer-Verlag, New York, 1995.
4. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, 1992.

5. Smirnov N. N., Dushin V. R., Nikitin V. F., Phylippov Yu. G., Nerchenko V. A. Three-Dimensional Convection and Unstable Displacement of Viscous Fluids from Strongly Encumbered Space. *Acta Astronautica*. 2010;66:844–863.
6. Dushin V. R., Smirnov N. N., Nikitin V. F., Skryleva E. I., Weisman Y. G. Multiple Capillary-Driven Imbibition of a Porous Medium under Microgravity Conditions: Experimental Investigation and Mathematical Modeling. *Acta Astronautica*. 2022;193:572–578. DOI: 10.1016/j.actaastro.2021.06.054.
7. Kolenkina E. I., Nikitin V. F., Dushin V. R., Smirnov N. N., Shamina A. A., Weisman Yu. G. Microgravity Investigation of Capillary-Driven Imbibition into an Inhomogeneous Porous Medium. *Proceedings of 71st International Astronautical Congress (IAC) – The CyberSpace Edition, 12–14 October 2020*. IAC-20,A2,2,3,x57771.
8. Istasse E. Determination of Capillary Characteristics in Porous Media. Université Libre de Bruxelles, Faculté des Sciences Appliquées, Mémoire présenté par Eric Istasse en vue de l'obtention du Diplôme d'Etudes Approfondies en Sciences Appliquées, Directeur: Prof. J.C. Legros., Année Académique 2000-2001, Brussels 2001.

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-4

ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ УРОВНЯ ВЕЩЕСТВ В РЕЗЕРВУАРАХ**Н. В. Замятин, Г. В. Смирнов, В. И. Маковкин***Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Российская Федерация**ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9624-7697>, zamnv@gmail.com.1947
smirnov@main.tusur.ru, assorti2030@yandex.ru*

Аннотация: рассматривается лазерный метод, с помощью которого определяется объем вещества в резервуаре. Лазерный метод не может дать точных измерений в условиях помех, создаваемых запыленностью, задымлением, парами в резервуарах. Одним из способов снижения ошибок измерения данным методом является применение фильтра Калмана.

Ключевые слова: резервуар, резервуарный парк, уровень веществ, измерение уровня, лазер, фильтр Калмана.

Для цитирования: Замятин Н. В., Смирнов Г. В., Маковкин В. И. Фильтр Калмана для измерения уровня веществ в резервуарах. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):31–35. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-4.

THE KALMAN FILTER FOR TANK LEVEL MEASUREMENTS**N. V. Zamyatin, G. V. Smirnov, V. I. Makovkin***Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation**ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9624-7697>, zamnv@gmail.com.1947
smirnov@main.tusur.ru, assorti2030@yandex.ru*

Abstract: the study considers a laser-based method to measure the volume of the substance in a tank. The laser method cannot give accurate measurements when dust, smoke, vapors present in tanks. The Kalman filter can be used to reduce the measurement errors.

Keywords: tank, tank farm, substance level, level measurement, laser, Kalman filter.

Cite this article: Zamyatin N. V., Smirnov G. V., Makovkin V. I. The Kalman Filter for Tank Level Measurements. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):31–35. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-4.

На промышленных предприятиях, которые занимаются добычей и производством, требуются комплексы устройств, предназначенные для хранения сырья и продуктов переработки. Такие комплексы, включающие взаимосвязанные группы резервуаров, оснащенные системами сокращения потерь продуктов, безопасности, пожаротушения и средствами автоматизации, называют резервуарными парками [1].

Развитие предприятий приводит к увеличению масштабов производства, и в связи с этим встает вопрос о быстром получении точной информации об имеющихся на предприятиях объемах веществ и динамике их применения. Это порождает задачу точного измерения данных показателей.

В данной работе будет рассматриваться лазерный метод, с помощью которого можно определить уровень и объем вещества в резервуаре. Однако лазерный метод (как и другие методы измерения) не может дать точных измерений в условиях помех, создаваемых внешними факторами, такими как запыленность, задымленность, пары в резервуарах. Одним из способов повышения точности при измерении уровня веществ является применение фильтра Калмана [7, 8, 9].

Целью работы является изучение фильтра Калмана применительно к лазерному методу измерения уровня в резервуарных парках. Для достижения цели нужно выполнить следующие задачи:

- представление принципов функционирования резервуарных парков;
- обзор лазерных уровнемеров, а также исследование альтернативных измерителей уровня;
- выполнение экспериментов с использованием лазерного уровнемера;
- сбор, обработка и анализ полученных данных;
- возможности применения фильтра Калмана;

- программная реализация фильтра Калмана на выборке данных, полученных в экспериментах.

Конечным результатов данной работы будет являться описание применения фильтра Калмана для обработки данных, полученных в экспериментах с использованием лазерного уровнемера, а также программная реализация данного метода.

Методы контроля и управления параметрами веществ в резервуарном парке

Система управления резервуарным парком содержит измерительное оборудование, средства сопряжения и связи, рабочие станции и программное обеспечение [10]. Для обеспечения оперативного управления резервуарным парком требуется знать ряд параметров, к которым относятся уровень и объем вещества в резервуарах, температура этого вещества, давление в резервуаре, расход вещества и ряд других величин. Для измерения уровня вещества в резервуарах и его объема наиболее перспективным из всех известных способов контроля этих параметров является лазерный метод [11].

Схематически процесс измерения уровня вещества лазерным методом представлен на рис. 1.

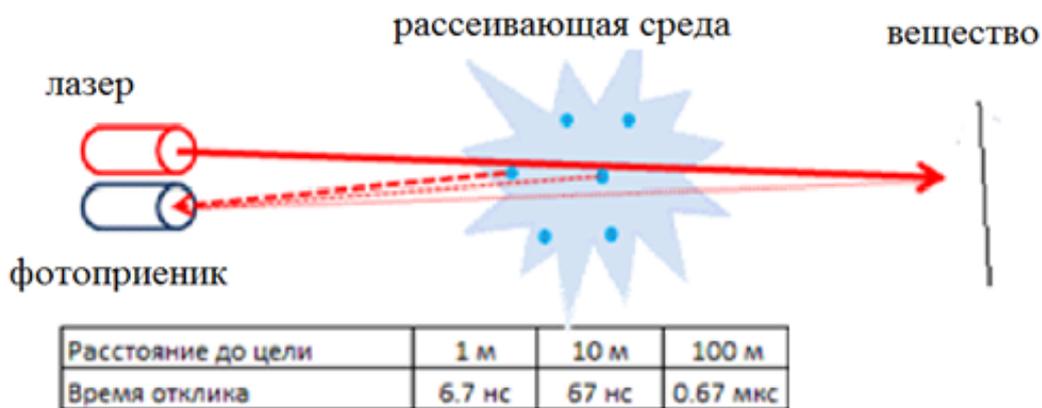


Рис. 1. Схема измерения уровня вещества в резервуаре лазерным методом

Для повышения точности и достоверности тех или иных измерений во многих процессах используется фильтр Калмана [3–6].

Схема функционирования фильтра Калмана приведена на рис. 2.

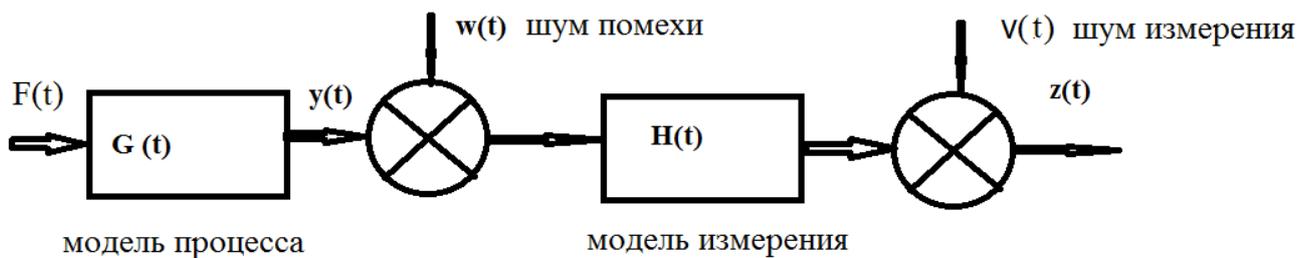


Рис. 2. Схема функционирования фильтра Калмана

Применение фильтра Калмана представляет собой итерационный процесс, который включает в себя прогноз (экстраполяцию) и корректировку.

Прогноз:

$$\hat{x}_{t-1|t-1} = F_t \hat{x}_{t-1|t-1} + B_t u_t,$$

$$P_{t|t-1} = F_t P_{t-1|t-1} F_t^T + Q_t.$$

Корректировка:

$$y_t = \hat{x}_{t|t} - H_t \hat{x}_{t|t-1},$$

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t \tilde{y}_t,$$

$$K_t = P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1},$$

$$P_{t|t} = (I - K_t H_t) P_{t|t-1}, \quad \text{где}$$

\hat{x}_1 — априорная оценка состояния на текущий шаг по оценке с предыдущего шага;

P — апостериорная ковариационная матрица ошибок состояния системы;

F — матрица перехода между состояниями;

B_t — матрица управляющих воздействий;

u_t — управляющее воздействие;

P — предсказание ошибки;

y — отклонение полученного на шаге k наблюдения;

H_t — матрица измерений;

R_t — матрица ковариаций шума измерений;

K_t — коэффициент усиления Калмана;

I — единичная матрица.

Индексы следующие: текущий период времени — $t|t$, предыдущий период времени — $t-1|t-1$ и $t|t-1$ являются промежуточными шагами.

Применение и практическое использование фильтра Калмана

Реализация фильтра Калмана апробирована в эксперименте по измерению уровня при прохождении лазерного луча уровнемера через запыленную среду, создаваемую песком, цементом и влагой.

Прогноз:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t-1|t-1} &= \hat{x}_{t-1|t-1}, \\ P_{t|t-1} &= P_{t-1|t-1} + Q_t.\end{aligned}\quad (1)$$

Корректировка:

$$\begin{aligned}y_t &= \hat{x}_{t|t} - \hat{x}_{t|t-1}, \\ \hat{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t y_t, \\ K_t &= P_{t|t-1} (P_{t|t-1} + R_t)^{-1}, \\ P_{t|t} &= (I - K_t) P_{t|t-1}.\end{aligned}\quad (2)$$

Матрицы F_t и H_t для решаемой задачи принимаются единичными, так как измерение уровня представляет линейное объединение вектора состояния и случайных погрешностей, зависящих от помехи. Поскольку управление при измерении уровня отсутствует, управляющее воздействие $B_t u_t$ равно нулю. Для ковариационной матрицы погрешности измерений R используются данные о точности измерения, взятые из паспорта дальномера. Для получения ковариационной матрицы Q_t выполнялось моделирование методом Монте-Карло [2]. Процедура измерений уровня была реализована экспериментально в лабораторных условиях. Эксперимент проводился в лабораторных условиях, максимально приближенных к ситуациям на производстве, и для измерения уровня подходит любой цилиндрический объект.

Для эксперимента используются следующие материалы и оборудование:

- лазерный дальномер (далее устройство) на основе компонентов системы Овен МСД-200;
- персональный компьютер с операционной системой Microsoft (далее — ПК);
- пластиковый цилиндр объемом 12 л;
- подставка;
- цемент;
- песок;
- распылитель с водой.

Всего было проведено три эксперимента с песком, цементом и парами воды:

1. Устройство было помещено на подставку высотой 45 сантиметров.
2. Рядом с подставкой было установлен пластиковый цилиндр, в основание которого был направлен луч лазера.
3. Связь устройства и ПК осуществлялась при помощи специального программного обеспечения — конфигулятора МСД-200.
4. Запускался процесс сбора данных на устройстве, в это время в цилиндр на небольшом расстоянии от луча лазера вдувался песок, или цемент, или распылялась вода, создавая помехи на пути распространения лазерного луча.

5. Длительность описанных выше процессов составляла 50–70 секунд, по окончании которых устройство отключалось и эксперимент заканчивался.

Результатом всех экспериментов являются таблицы в формате .csv со значениями изменения уровня, ниже на рисунке 4 приведены результаты экспериментов в графическом виде. Далее к ним применялся алгоритм фильтрации Калмана. Наибольшие помехи создает пыль от цемента, а наименьшее воздействие имеют капли воды из распылителя.

При использовании фильтра Калмана по формулам (1) и (2) находилось приближенное значение уровня.

Рассматриваемая реализация фильтра Калмана апробирована в эксперименте по измерению прохождения лазерного луча уровнемера через запыленную среду, создаваемую песком, цементом и влагой [2].

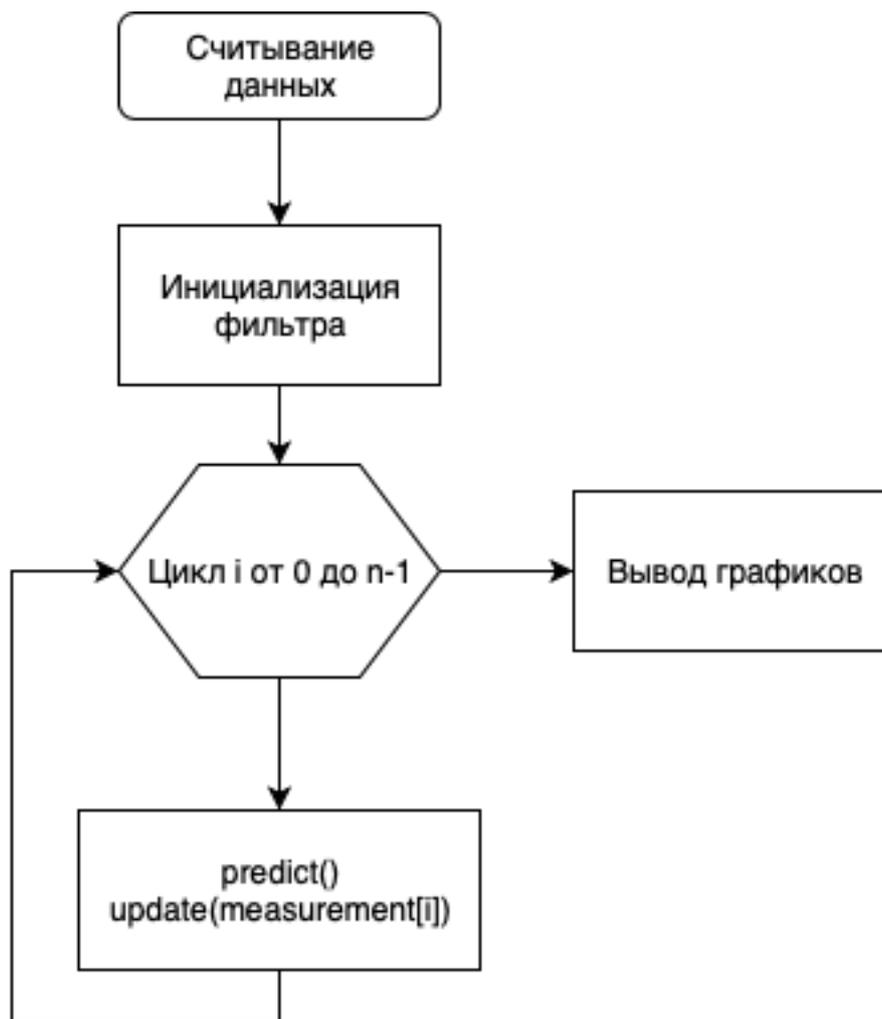


Рис. 3. Структурная схема алгоритма

Программная реализация фильтра Калмана

Для программной реализации выбран язык программирования Python, который имеет множество библиотек для анализа и обработки данных.

В представленной реализации были использованы следующие библиотеки: Numpy, Pandas и Matplotlib.

Структурная схема алгоритма программной реализации фильтра Калмана приведена на рисунке 3.

После выполнения программы были получены результаты фильтрации данных, которые представлены в графическом виде на рисунке 4. На этом рисунке по оси абсцисс показано время в секундах, по оси ординат указаны значения уровня в миллиметрах.

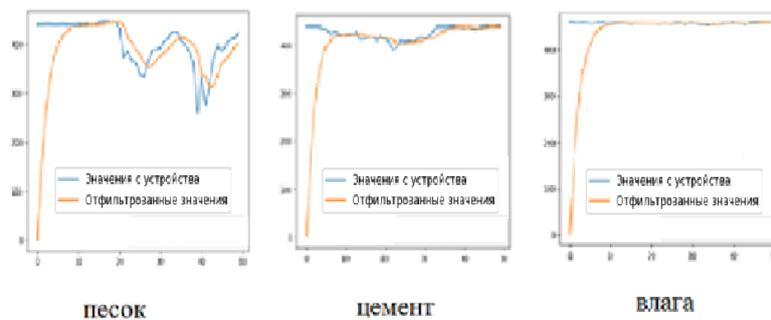


Рис. 4. Результат работы фильтра Калмана на выборке эксперимента с песком, цементом, влагой

В результате работы фильтра были получены уточненные значения исходных данных.

Заключение

В процессе выполнения работы были получены следующие результаты:

- описано функционирование резервуарного парка;
- проведены эксперименты с использованием лазерного уровнемера, собраны и проанализированы полученные данные;
- кратко охарактеризован фильтр Калмана применительно к задаче измерения уровня в условиях помех;
- выполнена программная реализация фильтра Калмана и проведено применение реализации к выборке данных, полученных в экспериментах.

Фильтр Калмана является эффективным алгоритмом для отсеечения шумов и лишних данных, повышения точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Graaff R., Toelint M. H., de Mul F. F. M., Zijlstra W. G., Dassel A. C. M., Aarnoudse J. G. Condensed Monte Carlo Simulations for the Description of Light Transport. *Applied Optics*. 1993;32:426–434.
2. Маковкин В. И., Замятин Н. В. Модель прохождения лазерного излучения через запыленные и мутные среды в резервуарах. *Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники*. 2019;22(3):18–22. DOI: 10.21293/1818-0442-2019-22-3-18-22.
3. Замятин Н. В., Маковкин В. И. Автоматизированная система мониторинга резервуарного парка. *Электронные средства и системы управления: материалы докладов Международной научно-практической конференции*. 2015;1–2:93–97.
4. Smirnov G. V., Zamyatin N. V. *Method of Control of Bulk Substances in Tanks [The Method of Controlling the Parameters of Bulging Substances in Reservoirs]*. Patent RF, no. 2017117123, 2017.
5. Makovkin V. I., Zamyatin N. V., Smirnov G. V. Disinfection and Usage of Anthropogenic Waste in Resource-Saving Construction Technologies. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, Geo assets Engineering*. 2018;329:164–174.
6. Mashutov I. Th., Shapovalov V. A., Adzhieva A. A. Algorithms of Electric Field Strength Data Processing Using Kalman Filter. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018;23(3):131–139. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-131-139.
7. Степанов О. А. Фильтр Калмана: история и современность. *Гироскопия и навигация*. 2010;69(2):107–121.
8. Greg Welch, Gary Bishop. *An Introduction to the Kalman Filter*. Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill. April 5, 2004. UNC-Chapel Hill, TR 95–041. 2004. 16 p.
9. Резервуарные парки. Режим доступа: <https://www.neftegaz-expo.ru/ru/articles/2016/rezervuarnye-parki/>.
10. Измерение уровня. Методы, способы измерения уровня. Выбор уровнемера. Режим доступа: https://eti.su/articles/izmeritelnaya-tehnika/izmeritelnaya-tehnika_1520.html.

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-5

**ИНДУЦИРОВАННОЕ ШУМОМ ПОДАВЛЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ (ФЛАТТЕРА) В
МОДЕЛИ КЕЛДЫША****В. П. Кошчев¹, Ю. Н. Штанов²**¹ *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), филиал «Стрела», г. Жуковский, Российская Федерация, koshcheev1@yandex.ru*² *Тюменский индустриальный университет, филиал в г. Сургуте, г. Сургут, Российская Федерация, yuran1987@mail.ru*

Аннотация: построено уравнение эволюции энергии динамической системы (модель Келдыша с одной степенью свободы), которая содержит источник белого шума. Показано, что автоколебания (флаттер) подавляются, если интенсивность белого шума превышает критическое значение.

Ключевые слова: модель Келдыша, предельный цикл, флаттер, вызванное шумом подавление автоколебаний.

Благодарности: исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-07-00236 а.

Для цитирования: Кошчев В. П., Штанов Ю. Н. Индукцированное шумом подавление автоколебаний (флаттера) в модели Келдыша. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):36–39. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-5.

NOISE SUPPRESSION OF SELF-OSCILLATION (FLUTTER) USING THE KELDYSH MODEL**V. P. Koshcheev¹, Yu. N. Shtanov²**¹ *Moscow Aviation Institute (National Research University), Strela Branch, Moscow oblast, Zhukovsky, Russian Federation, koshcheev1@yandex.ru*² *Tyumen Industrial University, Surgut Branch, Surgut, Russian Federation, yuran1987@mail.ru*

Abstract: an equation for the evolution of the dynamic system energy (a single DOF Keldysh model), containing a white noise source is constructed. It is shown that self-oscillations (flutter) are suppressed if the white noise intensity exceeds a threshold value.

Keywords: Keldysh model, limit cycle, flutter, suppression of noise-induced oscillations.

Acknowledgements: this study is supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 20-07-00236 а.

Cite this article: Koshcheev V. P., Shtanov Yu. N. Noise Suppression of Self-Oscillation (Flutter) Using the Keldysh Model. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):36–39. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-5.

Введение

Более семидесяти лет тому назад были построены нелинейные дифференциальные уравнения (модель Келдыша с одной и двумя степенями свободы [1]), автоколебательные решения которых позволили объяснить природу флаттера. Модель Келдыша [1] продолжает привлекать к себе внимание исследователей [2]. Открытым все эти годы оставался вопрос о влиянии шума на модель Келдыша. Подобная задача о влиянии шума на осциллятор Ван дер Поля была решена впервые в [3], на что было обращено внимание в [4]. В [3] было показано, что если интенсивность шума превышает некоторое критическое значение, то автоколебания исчезают. Аналогичный результат был получен в [5] с помощью стохастического уравнения эволюции энергии динамической системы с одной степенью свободы [6]. В настоящей работе стохастическое уравнение эволюции энергии динамической системы с одной степенью свободы [6] применено к модели Келдыша с одной степенью свободы, в которую включен аддитивный источник белого шума.

Решение нелинейного дифференциального уравнения в модели Келдыша

Нелинейное дифференциальное уравнение (см., например, модель Келдыша с одной степенью свободы [2]) имеет вид

$$J\ddot{x} + kx = -\mu\dot{x} - (\Phi + \kappa\dot{x}^2) \operatorname{sign} \dot{x}, \quad (1)$$

где константы $J = k = \kappa = 1$, $\mu < 0$, $\Phi > 0$ определены в [2].

Если энергия невозмущенной динамической системы имеет вид

$$E = \frac{J\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad (2)$$

то точки поворота траектории имеют вид

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}}. \quad (3)$$

Стохастическое уравнение эволюции энергии динамической системы с одной степенью свободы [6] имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{T} \int_{x_1}^{x_2} (\bar{f} + \delta f) dx, \quad (4)$$

где $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}$ – период колебаний невозмущенной системы; $\bar{f} = -\mu\dot{x} - (\Phi + \kappa\dot{x}^2) \text{sign } \dot{x}$; $\delta f = \sqrt{2D}\xi(t)$; D – интенсивность шума случайного источника; $\xi = \xi(t)$ – случайная величина с единичной дисперсией.

Скорость динамической переменной найдем с помощью (2)

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2E - kx^2}{J}}. \quad (5)$$

С помощью (5) перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{dE}{dt} = \mp (a_0 E^{\frac{1}{2}} + a_1 E + a_2 E^{\frac{3}{2}}) + a_3 E^{\frac{1}{2}} \delta f, \quad (6)$$

где $a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\Phi}{\sqrt{J}}$, $a_1 = \frac{\mu}{J} < 0$, $a_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{\kappa}{J^{\frac{3}{2}}}$, $a_3 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{J}}$.

Знак минус в правой части уравнения (6) соответствует знаку плюс в формуле (5). Уравнение (6), в котором отсутствует флуктуирующий источник,

$$\frac{dE}{dt} = \mp (a_0 E^{\frac{1}{2}} + a_1 E + a_2 E^{\frac{3}{2}}) \quad (7)$$

имеет три стационарные точки $E = 0$ и

$$\sqrt{E_{1,2}} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}, \quad (8)$$

где дискриминант $a_1^2 - 4a_0 a_2 = \frac{(\mu^2 - \delta_K^2)}{J^2}$; $\delta_K^2 = \frac{128\Phi\kappa}{3\pi^2}$.

Покажем, что при $\delta_K^2 < \mu^2$ динамическая система (модель Келдыша) релаксирует либо к внешнему $\sqrt{E_1}$, либо к внутреннему $\sqrt{E_2}$ предельному циклу в зависимости от знака минус или плюс в уравнении (7).

Решение уравнения (7), в правой части которого стоит знак минус, имеет вид

$$\sqrt{E} = \frac{\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2} A \cdot \exp(-t/\tau)}{1 - A \cdot \exp(-t/\tau)}, \quad (9)$$

где $A = \frac{\sqrt{E_0 - \sqrt{E_1}}}{\sqrt{E_0 - \sqrt{E_2}}}$; $E_0 = E(t_0 = 0)$ – начальное значение энергии динамической системы (модели Келдыша с одной степенью свободы) в момент времени $t_0 = 0$; время релаксации к стационарному состоянию имеет вид

$$\tau = \frac{2J}{\sqrt{\mu^2 - \delta_K^2}}. \quad (10)$$

Видно, что при $t \gg \tau$ динамическая система (модель Келдыша) релаксирует к внешнему $\sqrt{E_1}$ предельному циклу. Решение для уравнения (7), в правой части которого стоит знак плюс, совпадает формулой (9) при замене $t \rightarrow -t$. Видно, что в этом случае динамическая система (модель Келдыша) релаксирует к внутреннему $\sqrt{E_2}$ предельному циклу.

Результаты расчетов

Стационарное решение уравнения (6), в правой части которого стоит знак минус, построим с помощью (см., например, [7])

$$g(E) = \frac{1}{N\sqrt{E}} \exp \left[- \left(\frac{2a_0 E^{\frac{1}{2}} + a_1 E + \frac{2}{3} a_2 E^{\frac{3}{2}}}{Da_3^2} \right) \right], \quad (11)$$

где N — нормировочный множитель.

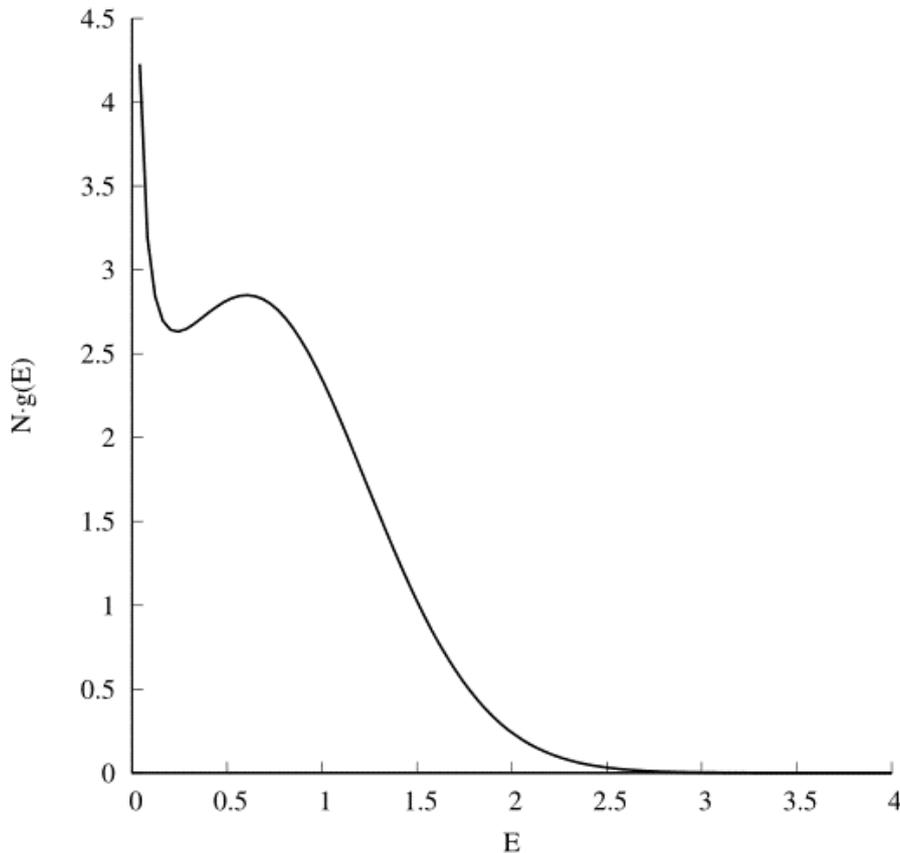


Рис. 1. График плотности вероятности обнаружения динамической системы (модели Келдыша) в зависимости от энергии динамической системы построен для значения интенсивности случайного источника $D = 0.2$

График функции (11) плотности вероятности обнаружения динамической системы (модели Келдыша) в зависимости от энергии динамической системы построен для двух значений интенсивности случайного источника $D = 0.2$ на рис. 1 и $D = 0.4$ на рис. 2. Константы $J = k = \kappa = 1$; $\mu = -1.2987$; $\Phi = 0.2$ определены в [2].

С помощью формулы (8) можно вычислить $E_1 \approx 0.845$ и $E_2 \approx 0.027$. Радиусы внешнего и внутреннего предельного цикла на рис. 1а в работе [2] близки к значениям $\sqrt{2E_1} \approx 1.303$ и $\sqrt{2E_2} \approx 0.23$, соответственно. Видно, что график функции (11) на рис. 1 достигает максимального значения при энергии динамической системы $E = 0$ и при энергии, которая немного меньше, чем $E_1 \approx 0.845$. Аналогичный результат был получен в [5] при исследовании влияния интенсивности шума на положение максимума плотности вероятности обнаружения динамической системы, которая описывается уравнением Ван дер Поля.

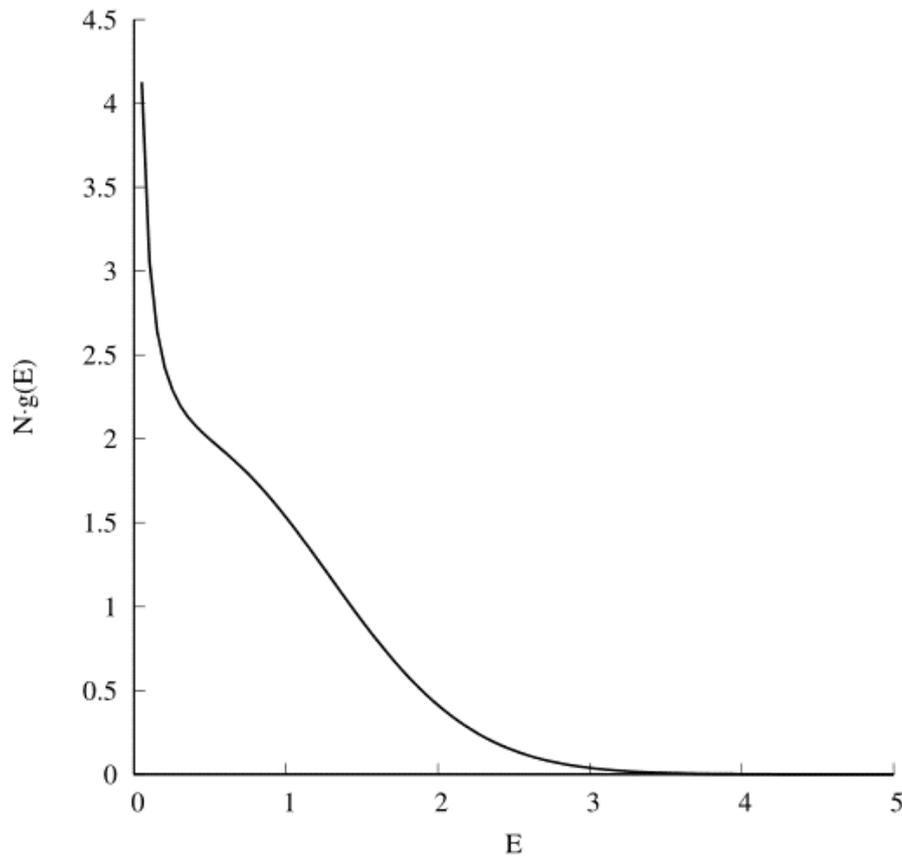


Рис. 2. График плотности вероятности обнаружения динамической системы (модели Келдыша) в зависимости от энергии динамической системы построен для значения интенсивности случайного источника $D = 0.4$

Заключение

Видно, что при $D \geq D_{crit.} \approx 0.4$ автоколебания подавлены, так как исчез максимум функции (11), который описывает плотность вероятности обнаружения динамической системы в окрестности предельного цикла. Динамическая система переходит в квазистационарное состояние покоя, так как автоколебания вновь появятся при уменьшении интенсивности случайного источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. О демпферах с нелинейной характеристикой. *Тр. ЦАГИ*. 1944;557:26–37.
2. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В. О подавлении флаттера в модели Келдыша. *ДАН*. 2018;482(1):33–37. DOI: 10.31857/S086956520003130-6.
3. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Воздействие электронных флуктуаций на ламповый генератор. *ЖЭТФ*. 1955;28:509–523.
4. Хорстхемке В., Лефевр Р. *Индукцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии*. М.: Мир; 1987. 400 с.
5. Кощев В. П. Стохастическое уравнение эволюции каналированных частиц. *Письма в ЖТФ*. 2001;27(18):61–64. Режим доступа: <https://journals.ioffe.ru/articles/39235>.
6. Кощев В. П. Индуцированный шумом переход между стационарными состояниями осциллятора Ван дер Поля. *Письма в ЖТФ*. 2014;40(3):64–69. Режим доступа: <https://journals.ioffe.ru/articles/27307>.
7. Гардинер К. В. *Стохастические методы в естественных науках*. М.: Мир; 1986. 538 с.

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-6

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ С ДАННЫМИ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**С. Г. Пятков***Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, Российская Федерация**ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7238-9559>, s_pyatkov@ugrasu.ru*

Аннотация: рассматривается одномерное параболическое уравнение в прямоугольнике $(0, T) \times (a, b)$, на одной из боковых сторон которого заданы данные Коши, а также задано условие Коши в начальный момент времени. Решение этой задачи ищется в пространстве Соболева. Построен класс данных, для которого решение задачи Коши с данными Коши на боковой поверхности прямоугольника существует и единственно. Класс является минимальным, т. е. условия гладкости на данные нельзя ослабить, они необходимы и достаточны для существования решений в данном классе Соболева. Решение является регулярным, это означает, что все производные, входящие в уравнение, принадлежат пространству L_2 . Задача сама по себе некорректна по Адамару. Математические модели такого типа возникают при описании процессов тепломассопереноса. Имеется большое количество работ, посвященных задачам такого типа, как в одномерном, так и в многомерном случае. В литературе основное внимание уделено численному решению задачи, поскольку она возникает во многих приложениях. Кроме того, известны теоремы единственности решений, оценки устойчивости решений и теоремы существования решений в классах Хольгрена. Мы немного уточняем последние результаты и получаем теорему существования решений в классах конечной гладкости.

Ключевые слова: обратная задача, данные Коши, начально-краевая задача, существование, тепломассоперенос.

Для цитирования: Пятков С. Г. О разрешимости задачи Коши с данными на боковой поверхности прямоугольника для одномерного параболического уравнения. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):40–46. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-6.

CAUCHY PROBLEM SOLVABILITY WITH THE DATA SPECIFIED ON THE RECTANGLE BOUNDARY FOR A ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION**S. G. Pyatkov***Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation**ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7238-9559>, s_pyatkov@ugrasu.ru*

Abstract: we consider a one-dimensional parabolic equation in the $(0, T) \times (a, b)$ rectangle. The Cauchy data are specified on one of its lateral sides. The Cauchy condition is also specified at the initial moment. The solution to this problem is sought in the Sobolev space. A data class was constructed for which there is a unique solution to the Cauchy problem with the Cauchy data specified on the lateral side of the rectangle. The class is minimal, i. e., the smoothness conditions applied to the data cannot be weakened. They are necessary and sufficient for the existence of solutions in a given Sobolev class. The solution is regular which means that all derivatives in the equation belong to L_2 space. The problem is ill-posed in the Hadamard sense. Mathematical models of this type arise when describing heat and mass transfer. There are many papers on such problems for both one-dimensional and multidimensional cases. The available sources mostly focus on numerical solutions, since the problem is found in many applications. Besides, there are uniqueness theorems and stability estimates, and existence theorems for solutions in Holmgren's classes. We slightly refined the recent results and obtained an existence theorem for solutions in finite smoothness classes.

Keywords: inverse problem, Cauchy data, initial boundary problem, existence, heat and mass transfer.

Cite this article: Pyatkov S. G. Cauchy Problem Solvability with the Data Specified on the Rectangle Boundary for a One-Dimensional Parabolic Equation. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):40–46. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-6.

Введение

Мы рассматриваем вопрос об определении граничных данных вместе с решением в параболическом уравнении:

$$Lu = u_t - L_0u = f(x,t), \quad (x,t) \in G \times (0,T), \quad G = (a,b), \tag{1}$$

где $L_0u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u$. Уравнение дополняется граничными данными вида:

$$u(0,x) = u_0, \quad u(t,a) = \psi_1(t), \quad u_x(t,a) = \psi_2(t). \tag{2}$$

Определению подлежат функции u и $u(t,b)$ или $u_x(t,b)$. Математические модели такого типа возникают при описании процессов тепломассопереноса. Имеется большое количество работ, посвященных задачам такого типа, как в одномерном, так и многомерном случае (см. [1, гл. 1, 2; 3, § 8.3]). В литературе основное внимание уделено численному решению задачи, поскольку она некорректна в смысле Адамара ([4, §1.4; 5-8, 10, 11]). Известны также оценки устойчивости и теоремы единственности решений (библиографию и результаты можно найти в [2]). В работе [9] имеется теорема существования решений задачи (1)-(2), где в качестве исходных данных берутся только значения решения и нормальной производной в точке $x = 0$ (т.е. нет начального условия), а также показано, что если коэффициенты уравнения, правая часть и данные принадлежат классу Хольмгрена, то решение такой задачи существует и единственно. Показано также, что если дополнительно задано начальное условие в точке $t = 0$, то возможно определение не только решения, но и одного из коэффициентов уравнения (1). Класс Хольмгрена состоит из функций $u(t,x) \in L_\infty(Q)$ таких, что найдутся постоянные C, M такие, что существуют производные $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ для всех k и $\|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\|_{L_\infty(Q)} \leq C(2n)!/M^{2k}$. Возникает вопрос о таком же точном результате, в случае когда коэффициенты и правая часть не являются бесконечно дифференцируемыми. По-видимому, такой результат неизвестен. В работе мы приводим оптимальные условия на данные в этом простом случае.

Определения и вспомогательные утверждения

В работе мы используем пространства Соболева и Гельдера $W_p^s(G), C^\alpha(\bar{G})$ (см. определения в [12, 13]). Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Пусть $(u,v) = \int_G u(x)\bar{v}(x)dx$. Обозначим через $B_\delta(x_0)$ – шар радиуса δ с центром в точке x_0 . Мы также используем анизотропные пространства Соболева $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J;L_p(\Gamma)) \cap L_p(J;W_p^r(\Gamma))$ и Гельдера $C^{\alpha/2,\alpha}(\bar{Q}), C^{\alpha/2,\alpha}(\bar{S})$ (см. определения в [12]).

Напомним некоторые свойства преобразования Лапласа $\mathcal{L}(u)(p) = \int_0^\infty e^{-pt}u(t) dt$. Пусть E – гильбертово пространство. Преобразование Лапласа изоморфно отображает пространство Соболева $\tilde{W}_2^s(\mathbb{R}_+; E)$ функций, определенных на $(0,\infty)$, допускающих продолжение нулем при $t < 0$ с сохранением класса, с нормой

$$\|e^{-\gamma_0 t} \tilde{u}(t)\|_{W_2^s(\mathbb{R};E)} = \|u(t)\|_{s,\gamma_0},$$

где $\tilde{u}(t)$ – продолжение функции u , определенной при $t \geq 0$, нулем на всю вещественную ось, на пространство E_{s,γ_0} аналитических в области $\text{Re } p > \gamma_0 > 0$ функций с конечной нормой

$$\|U(p)\|_{s,\gamma_0}^2 = \sup_{\gamma > \gamma_0} \int_{-\infty}^\infty \|U(\gamma + i\tau)\|_E^2 |\gamma + i\tau|^{2s} d\tau. \tag{3}$$

В частности, при $s = 0$ имеем, что норма $\|e^{-\gamma t} u\|_{L_2(0,\infty;E)}$ совпадает с нормой

$$\int_{-\infty}^\infty \|U(\gamma + i\tau)\|_E^2 d\tau. \tag{4}$$

В случае если $E = \mathbb{C}$, или $E = L_2(G)$, или $E = W_2^s(G)$, приведенные выше свойства преобразования Лапласа имеются, например, в [14] (см. теорему 7.1 в случае $E = \mathbb{C}$ и §8 – в остальных случаях). Если $s \neq 1/2$, то нормы $\|e^{-\gamma_0 t} \tilde{u}(t)\|_{W_2^s(\mathbb{R};E)}$ и $\|e^{-\gamma_0 t} u(t)\|_{W_2^s(\mathbb{R}_+;E)}$ эквивалентны (см. [14]).

Предположим, что

$$a \in C^1([a,b]) \cap W_1^2(a,b), \quad b \in C([a,b]) \cap W_1^1(a,b), \quad c \in L_\infty(a,b). \tag{5}$$

Естественным образом также считаем, что найдутся постоянные $M_1, M_2 > 0$ такие, что $M_1 \leq a(\xi) \leq M_2$ для всех ξ . Далее считаем эти условия на коэффициенты оператора L_0 выполненными, не оговаривая это дополнительно в формулировках утверждений.

Рассмотрим уравнение

$$L_0 u - \lambda u = f(x), \quad |\arg \lambda| \leq \pi - \delta_0, \quad \delta_0 \in (0, \pi). \quad (7)$$

Положим $r(\xi) = 1/\sqrt{a(\xi)}$. Далее знак \approx в выражении $a(\lambda) \approx b(\lambda)$ означает, что выполнено равенство $a(\lambda) = b(\lambda)(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$ при соответствующих параметрах λ .

Лемма 1 ([15, лемма 1]). *Существуют два линейно независимых решения однородного уравнения (7), удовлетворяющие асимптотике*

$$\begin{aligned} y_1(x) &\approx \exp\left(\int_a^x r_1(\xi) d\xi - \sqrt{\lambda} \int_a^x r(\xi) d\xi\right), \\ y_1'(x) &\approx -\sqrt{\lambda} r(x) \exp\left(\int_a^x r_1(\xi) d\xi - \sqrt{\lambda} \int_a^x r(\xi) d\xi\right), \\ y_2(x) &\approx \exp\left(\int_a^x r_1(\xi) d\xi + \sqrt{\lambda} \int_a^x r(\xi) d\xi\right), \\ y_2'(x) &\approx \sqrt{\lambda} r(x) \exp\left(\int_a^x r_1(\xi) d\xi + \sqrt{\lambda} \int_a^x r(\xi) d\xi\right), \end{aligned}$$

где $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha \arg \lambda}$, $-\pi < \arg \lambda < \pi$, $\lambda = \sigma + i\gamma$, $r_1(\xi) = \frac{-1}{2}(ar'r - br^2)(\xi)$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (7). Запишем данные Коши

$$v(a) = v_0, \quad v_x(a) = v_1. \quad (8)$$

Лемма 2. *Пусть v — решение задачи Коши (7), (8), где $f = 0$. Тогда имеет место представление*

$$\begin{aligned} v(b) &= \frac{v_0}{2} \exp\left(\sqrt{\lambda} \int_a^b r(\xi) d\xi + \int_a^b r_1(\xi) d\xi\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) + \\ &+ \frac{v_1}{2\sqrt{\lambda}r(a)} \exp\left(\sqrt{\lambda} \int_a^b r(\xi) d\xi + \int_a^b r_1(\xi) d\xi\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right). \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'(b) &= \frac{\sqrt{\lambda}r(a)v_0}{2} \exp\left(\sqrt{\lambda} \int_a^b r(\xi) d\xi + \int_a^b r_1(\xi) d\xi\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) + \\ &+ \frac{v_1}{2} \exp\left(\sqrt{\lambda} \int_a^b r(\xi) d\xi + \int_a^b r_1(\xi) d\xi\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right). \quad (10) \end{aligned}$$

Функция v допускает оценку

$$\sum_{i=0}^2 \|v^{(i)}\|_{L_2(G)} + |\lambda| \|v\|_{L_2(G)} \leq c_0 (|\sqrt{\lambda}r(a)v_0| + |v_1|) \exp\left(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} \int_a^b r(\xi) d\xi\right) |\lambda|^{1/4},$$

где c_0 — некоторая постоянная, не зависящая от λ . Если $v_1 = 0$ или $v_0 = 0$, то найдутся постоянные c_i , не зависящие от λ , такие, что

$$c_1 \left(\sum_{i=0}^2 \|v^{(i)}\|_{L_2(G)} + |\lambda| \|v\|_{L_2(G)} \right) \leq |\lambda|^{3/4} |v_0| e^{\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} \int_a^b r(\xi) d\xi} \leq c_2 \left(\sum_{i=0}^2 \|v^{(i)}\|_{L_2(G)} + |\lambda| \|v\|_{L_2(G)} \right), \quad (11)$$

или

$$c_1 \left(\sum_{i=0}^2 \|v^{(i)}\|_{L_2(G)} + |\lambda| \|v\|_{L_2(G)} \right) \leq |\lambda|^{1/4} |v_1| e^{\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} \int_a^b r(\xi) d\xi} \leq c_2 \left(\sum_{i=0}^2 \|v^{(i)}\|_{L_2(G)} + |\lambda| \|v\|_{L_2(G)} \right). \quad (12)$$

Доказательство. Запишем Вронскиан $W(\xi) = y_1'(\xi)y_2(\xi) - y_1(\xi)y_2'(\xi)$. Используя асимптотику из леммы 1, получим

$$W(x_1) \approx -2\sqrt{\lambda}r(x_1) \exp\left(2 \int_a^{x_1} r_1 d\xi\right). \tag{13}$$

Выпишем представление решения задачи Коши. Решение уравнения (7) представимо в виде

$$v(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

где y_i – решения, определенные в лемме 1. Удовлетворяя данным, получим систему

$$c_1y_1(a) + c_2y_2(a) = v_0, \quad c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a) = v_1,$$

решение которой записывается в виде $c_1 = (-y_2'(a)v_0 + y_2(a)v_1)/\Delta$, $c_2 = (y_1'(a)v_0 - y_1(a)v_1)/\Delta$, где $\Delta = W(a)$. Используя асимптотику, получим

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{v_0}{2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) - \frac{v_1}{2\sqrt{\lambda}r(a)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right), \\ c_2 &= \frac{v_0}{2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) + \frac{v_1}{2\sqrt{\lambda}r(a)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Тогда решение записывается в виде

$$\begin{aligned} v(x) &= \left(v_0 \left(\operatorname{ch} \left(\sqrt{\lambda} \int_a^x r(\xi) d\xi \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda}r(a)} v_1 \operatorname{sh} \left(\sqrt{\lambda} \int_a^x r(\xi) d\xi \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \right) \right) \right) e^{\int_a^b r_1(\xi) d\xi}. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя здесь $x = b$, мы получим представление (9). Дифференцируя представление решения и используя (14), а также взяв $x = b$, мы приходим к (10). Чтобы получить оценку (11), достаточно оценить интегралы $J_1 = \|\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda} \int_a^x r(\xi) d\xi)\|_{L_2(G)}$, $J_2 = \|\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda} \int_a^x r(\xi) d\xi)\|_{L_2(G)}$. Они оцениваются одинаково. Например, для первого из них имеем

$$J_1^2 \leq \int_a^b e^{2Re \sqrt{\lambda} \int_a^x r(\xi) d\xi} dx \leq \delta_0 \int_a^b e^{2Re \sqrt{\lambda} \int_a^x r(\xi) d\xi} r(x) dx \leq \frac{\delta_0}{2Re\sqrt{\lambda}} e^{2Re \sqrt{\lambda} \int_a^b r(\xi) d\xi},$$

где $\delta_0 = \max_{x \in [a,b]} (1/r(x))$. Аналогично,

$$J_2^2 \leq \frac{\delta_0}{2Re\sqrt{\lambda}} e^{2Re \sqrt{\lambda} \int_a^b r(\xi) d\xi}.$$

Из этих неравенств вытекает оценка

$$|\lambda| \|v\|_{L_2(G)} \leq c_0 (|\sqrt{\lambda}r(a)v_0| + |v_1|) \exp\left(Re \sqrt{\lambda} \int_a^b r(\xi) d\xi\right) |\lambda|^{1/4}.$$

Оценка для функций v'' , v' вытекает непосредственно из уравнения (7). Таким образом, оценка (11) получена. Оценки (12), (13) также элементарно вытекают из представления (15).

Далее приведем теоремы разрешимости прямой задачи. Предположим, что

$$u_0(x) \in W_2^1(G), \quad u_0(a)|_\Gamma = \psi_1(0), \tag{16}$$

$$e^{-\lambda t} \psi_2 \in W_2^{1/4}(0,T), \quad e^{-\lambda t} \psi_1 \in W_2^{3/4}(0,T), \quad f(t,x)e^{-\lambda t} \in L_2(Q). \tag{17}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$u_t - L_0u = f(t,x), \quad u(0,x) = u_0, \quad u(t,a) = \psi_1, \quad u(t,b) = 0. \tag{18}$$

Следующая теорема имеется в [14] (см. также теорему 8.2 в [17]).

Теорема 1. Пусть $T = \infty$. Предположим, что выполнено условие (16). Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что если $\lambda \geq \lambda_0$ и выполнено условие (17), то существует единственное решение задачи (18) со свойством $e^{-\lambda t} u \in W_2^{1,2}(Q)$.

Если $T < \infty$, тогда можем взять $\lambda_0 = 0$ и теорема может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема 2. Пусть $T < \infty$ и выполнены условия (16), (17) при $\lambda = 0$. Тогда существует единственное решение задачи (18) такое, что $u \in W_2^{1,2}(Q)$.

Основные результаты

Считаем, что условия (16), (17) выполнены, для некоторого λ такого, что $Re \lambda \geq \lambda_0$, где параметр $\lambda_0 \geq 0$ построен в теореме 1. Построим решение ω_0 вспомогательной задачи (18) такое, что $e^{-\lambda t} \omega_0 \in W_2^{1,2}(Q)$. После замены переменных $\omega = u - \omega_0$ мы придем к более простой задаче

$$\omega_t - L_0 \omega = 0, \omega(t, a) = 0, \omega_x(t, a) = \psi_2 - \omega_{0x}(t, a) = \tilde{\psi}_2, \omega|_{t=0} = 0. \quad (19)$$

Мы предполагаем, что справедливо представление

$$\tilde{\psi}_2(t) = \int_0^t V_\gamma(t - \tau) \psi_{02}(\tau) d\tau, e^{-\lambda t} \psi_{02} \in W_2^{1/4}(0, T), \gamma = \int_a^b r(\xi) d\xi, \quad (20)$$

где $V_\gamma = \frac{\gamma e^{-\gamma^2/4t}}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}}$. Имеем, что $\mathcal{L}\hat{V}_\gamma(\lambda) = e^{-\sqrt{\lambda}\gamma}$ (см. лемму 1.6.7 в [18]).

Теорема 3. Пусть $T = \infty$. Предположим, что выполнено условие (16). Тогда найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что если $\lambda \geq \lambda_0$ и выполнены условия (17), (20), то существует единственное решение задачи (1), (2) такое, что $e^{-\lambda t} u \in W_2^{1,2}(Q)$. Справедливы оценки

$$\|e^{-\lambda t} \omega\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq C \|e^{-\lambda t} \psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0, \infty)} < \infty.$$

$$\|e^{-\lambda t} \omega(t, b)\|_{W_2^{3/4}(0, \infty)} + \|e^{-\lambda t} \omega_x(t, b)\|_{W_2^{1/4}(0, \infty)} \leq C \|e^{-\lambda t} \psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0, \infty)} < \infty,$$

где ω — решение вспомогательной задачи (19). Если существует решение задачи (1), (2) такое, что $e^{-\lambda t} u \in W_2^{1,2}(Q)$ для некоторого $\lambda \geq \lambda_0$ (где параметр λ_0 определен в теореме 1), то выполнены условия (16), (17), (20). Решение u удовлетворяет оценке

$$\|e^{-\lambda t} u\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq c (\|e^{-\lambda t} f\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^1(G)} + \|e^{-\lambda t} \psi_1\|_{W_2^{3/4}(0, \infty)} + \|e^{-\lambda t} \psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0, \infty)}).$$

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно рассмотреть вспомогательную задачу (19). Применяя преобразование Лапласа к уравнению (19), придем к задаче

$$-L_0 \hat{\omega} + p \hat{\omega} = 0, Re p \geq \lambda_0. \quad (21)$$

$$\hat{\omega}|_{x=0} = 0, \hat{\omega}_x|_{x=0} = \mathcal{L}(\tilde{\psi}_2)(p) = \hat{\psi}_2, \quad (22)$$

где постоянная λ_0 взята из теоремы 1. Возьмем $\lambda \geq \lambda_0$. Решение этой задачи существует и единственно, как мы выяснили в лемме 2. Увеличивая λ_0 , если необходимо, можем считать, что при $Re p \geq \lambda \geq \lambda_0 > 0$ справедливы представления из леммы 1. Получим оценки.

Запишем решение этой задачи

$$v(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

где постоянные представлены формулой (14).

Используя лемму 2, а также свойства преобразования Лапласа, имеем

$$\sup_{\sigma > \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{\omega}(\sigma + i\xi)\|_{W_2^2(G)}^2 + |p| \|\hat{\omega}(\sigma + i\xi)\|_{L_2(G)}^2 d\xi \leq C \sup_{\sigma > \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{\psi}_2(\sigma + i\xi)\|^2 |e^{2Re \sqrt{p}\gamma}| |p|^{1/2} d\xi, p = \sigma + i\xi.$$

Однако имеем, что

$$\mathcal{L}(\tilde{\psi}_2)(p) = V_\gamma(p) \hat{\psi}_{02} = e^{-\sqrt{p}\gamma} \hat{\psi}_{02}.$$

Тогда из предыдущего неравенства получим

$$\sup_{\sigma > \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{w}(\sigma + i\xi)\|_{W_2^2(G)}^2 + |p| \|\hat{w}(\sigma + i\xi)\|_{L_2(G)}^2 d\xi \leq C_1 \sup_{\sigma > \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{\psi}_{02}(\sigma + i\xi)\|^2 |p|^{1/2} d\xi.$$

Последнее влечет, что для вектор-функции \hat{w} определено обратное преобразование Лапласа и справедлива оценка

$$\|e^{-\lambda t} w\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq C \|e^{-\lambda t} \psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,\infty)} < \infty.$$

Получим оценки для следов $w(t, b)$, $w_x(t, b)$. Воспользуемся леммой 2. Как и ранее, имеем

$$\sup_{\sigma > \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{w}(t, b)(\sigma + i\xi)|^2 |p|^{3/2} + |\hat{w}_x(t, b)(\sigma + i\xi)|^2 |p|^{1/2} d\xi \leq C \sup_{\sigma > \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{\psi}_{02}(\sigma + i\xi)\|^2 |p|^{1/2} d\xi.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\|e^{-\lambda t} w(t, b)\|_{W_2^{3/4}(0,\infty)} + \|e^{-\lambda t} w_x(t, b)\|_{W_2^{1/4}(0,\infty)} \leq C \|e^{-\lambda t} \psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,\infty)} < \infty.$$

Получим утверждение в обратную сторону. Пусть существует решение задачи (1), (2) такое, что $e^{-\lambda t} u \in W_2^{1,2}(Q)$ для некоторого $\lambda \geq \lambda_0$. Условия (16), (17) вытекают из стандартных теорем вложения (см. §8 в [14]). Построим решение w_0 , $e^{-\lambda t} w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$. Покажем, что функция $\tilde{\psi}_2$ допускает представление (20). Рассмотрим вспомогательную задачу (19). В соответствии с теоремой 1 функция w_0 обладает свойством $e^{-\lambda t} w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$. Тогда и $e^{-\lambda t} w \in W_2^{1,2}(Q)$. Применяя преобразование Лапласа, приходим к задаче (21), (22). Но тогда в силу леммы 2 имеем оценку

$$\sup_{\sigma > \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{\psi}_2(\sigma + i\xi)\|^2 e^{2Re \sqrt{p}\gamma} |p|^{1/2} d\xi \leq c \sup_{\sigma > \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{w}(\sigma + i\xi)\|_{W_2^2(G)}^2 + |p| \|\hat{w}(\sigma + i\xi)\|_{L_2(G)}^2 d\xi < \infty.$$

Таким образом, определено обратное преобразование Лапласа от функции $\hat{\psi}_{02} = \hat{\psi}_2(\sigma + i\xi)e^{\sqrt{p}\gamma}$, причем сама функция ψ_{02} обладает свойством $e^{-\lambda t} \psi_{02} \in W_2^{1/4}(0,\infty)$. Тогда имеем равенство $\hat{\psi}_2 = e^{-\sqrt{p}\gamma} \hat{\psi}_{02}$. Откуда и вытекает представление (20).

В случае конечного промежутка $(0, T)$ теорема 3 переформулируется в следующем виде.

Теорема 4. Пусть $T < \infty$. Предположим, что выполнено условие (16), (17), (20), где $\lambda_0 = 0$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) такое, что $u \in W_2^{1,2}(Q)$. Справедливы оценки

$$\|w\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq C \|\psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,T)} < \infty.$$

$$\|w(t, b)\|_{W_2^{3/4}(0,T)} + \|e^{-\lambda t} w_x(t, b)\|_{W_2^{1/4}(0,T)} \leq C \|e^{-\lambda t} \psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,T)} < \infty.$$

Если существует решение задачи (1), (2) такое, что $e^{-\lambda t} u \in W_2^{1,2}(Q)$ для некоторого $\lambda \geq \lambda_0$ (где параметр λ_0 определен в теореме 1), то выполнены условия (16), (17), (20). Решение u удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq c(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^1(G)} + \|\psi_1\|_{W_2^{3/4}(0,T)} + \|\psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,T)}).$$

Доказательство. Рассмотрим представление (20). Продолжим функцию ψ_{02} на весь интервал $(0, \infty)$ с сохранением класса как функцию с компактным носителем (например, нулем) и определим соответствующую функцию ψ_2 . Как и ранее, решаем вспомогательную задачу (19). Все условия теоремы 3 выполнены. Применяя теорему 3, получим, что решение существует. Мы тем самым построим решение вспомогательной задачи на $(0, \infty)$, его сужение на промежуток $[0, T]$ даст нам искомое решение вспомогательной задачи. Единственность решений вытекает из стандартных теорем, например, мы можем сослаться на [19] (теорема 2).

Замечание 1. В качестве вспомогательной задачи при построении функции w_0 мы можем рассматривать любую корректную краевую задачу. Естественным образом при этом изменится условие (20). Например, мы можем взять в качестве функции w_0 решение задачи

$$u_t - L_0 u = f(t, x), \quad u(0, x) = u_0, \quad u_x(t, a) = \psi_2, \quad u(t, b) = 0. \tag{23}$$

Тогда вместо функции ψ_2 возникнет дополнительное условие на функцию ψ_1 , поскольку задача (19) перейдет в задачу

$$w_t - L_0 w = 0, \quad w(t, a) = 0, \quad w(t, a) = \psi_1 - w_0(t, a) = \tilde{\psi}_1, \quad w_x|_{t=0} = 0. \tag{24}$$

Оно будет иметь аналогичный характер, т. е. должно иметь место представление (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М. *Обратные задачи теплообмена*. М.: Машиностроение; 1988.
2. Klibanov M. V., Li J. *Inverse Problems and Carleman Estimates*. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH; 2021.
3. Kabanikhin S. I. *Inverse and Ill-Posed Problems*. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH; 2012.
4. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения обратных задач математической физики*. Изд. 3-е. М.: Издательство ЛКИ; 2009.
5. Tabarintseva E. V. Estimating the Accuracy of a Method of Auxiliary Boundary Conditions in Solving an Inverse Boundary Value Problem for a Nonlinear Equation. *Numerical Analysis and Applications*. 2018;11:236–255.
6. Табаринцева Е. В., Менихес Л. Д., Дрозин А. Д. О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения методом квазиобращения. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. 2012;11:8–13.
7. Табаринцева Е. В. Об оценке точности метода вспомогательных граничных условий при решении граничной обратной задачи для нелинейного уравнения. *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2018;21(3):293–303.
8. Hao D. N., Schneiders A., Reinhardt H.-J. Regularization of a Non-Characteristic Cauchy Problem for a Parabolic Equation. *Inverse Problems*. 1999;11(6):1247.
9. Hao D. N., Reinhardt H. J. Recent Contributions to Linear Inverse Heat Conduction Problems. *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 1996;4:23–32.
10. Jonas P., Louis A. K. Approximate Inverse for a One-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems*. 2000;16:175–185.
11. Chapko R., Johansson B. T. A Boundary Integral Equation Method for Numerical Solution of Parabolic and Hyperbolic Cauchy Problems. *Applied Numerical Mathematics*. 2018;129:104–119.
12. Ладьженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М.: Наука; 1967.
13. Triebel H. *Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; 1978.
14. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. *УМН*. 1964;19:53–161.
15. Неустроева Л. В., Пятков С. Г. О некоторых классах обратных задач об определении функции источников. *Математические заметки СВФУ*. 2020;27(1):21–40.
16. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*. М.: Наука; 1969.
17. Denk R., Hieber M., Prüss J. R-Boundedness, Fourier Multipliers and Problems of Elliptic and Parabolic Type. *Mem. Amer. Math. Soc.*; 2003;166.
18. Arendt W., Batty C. J. K., Neubrander F., Hieber M. *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Berlin: Springer Basel AG; 2011.
19. Fernandez F. J. Unique Continuation for Parabolic Operators. II, *Communications in Partial Differential Equations*. 2003;28(9-10):1597–1604.

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-7

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СОЗДАНИЯ НЕЙРОСЕТЕВОГО ПРОГРАММНО-АППАРАТНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РАННЕГО ВИДЕООБНАРУЖЕНИЯ ВОЗГОРАНИЯ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

И. М. Клемышев^{1,a}, С. С. Лебедев^{1,b}, С. О. Старков^{2,c}

¹ ООО «КомпВи», г. Обнинск, Российская Федерация

² Обнинский институт атомной энергетики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Обнинск, Российская Федерация

^a ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7831-9474>

^b ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9626-0223>, compvi19@mail.ru

^c ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0420-7856>, sergeystarkov56@mail.ru

Аннотация: в данной статье представлен метод, направленный на решение проблемы раннего обнаружения возгорания на видеоизображениях с камер наблюдения, основанный на временном анализе подозрительной области. Представленный метод позволяет проводить сжатие рассматриваемой области видеоизображения до временного ряда, который классифицируется рекуррентной нейросетью. Временной ряд собирается из метрик, снимаемых с самой области и окружения, которые отражают ее «мерцание». Анализ «мерцания» позволяет определить, содержит ли область огонь. Предложенный алгоритм позволяет значительно снизить количество ложных срабатываний при обнаружении огня благодаря анализу видеоизображения по времени. Способ сжатия исходных данных до временного ряда из набора характеристик области и окружения позволяет использовать небольшую рекуррентную нейросеть для классификации подозрительной области вне зависимости от ее размера. Эти особенности позволяют применить данную модель при создании автономного детектора для раннего обнаружения возгорания на основе одноплатного компьютера и видеокамеры. В статье приводится описание предложенной модели и обучения нейросети, оценки качества обучения и результаты экспериментов, а также примеры работы, выполненные на одноплатном компьютере Jetson Nano от NVIDIA.

Ключевые слова: нейросетевой программно-аппаратный комплекс, видеообнаружение, возгорание, пожар.

Для цитирования: Клемышев И. М., Лебедев С. С., Старков С. О. Исследование возможностей создания нейросетевого программно-аппаратного комплекса для раннего видеообнаружения возгорания в режиме реального времени. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):47–59. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-7.

DEVELOPING A NEURAL NETWORK-BASED HARDWARE AND SOFTWARE SYSTEM FOR EARLY VIDEO DETECTION OF FIRES IN REAL TIME

I. M. Klemyshev^{1,a}, S. S. Lebedev^{1,b}, S. O. Starkov^{2,c}

¹ CompV, OOO, Obninsk, Russian Federation

² Obninsk Institute For Nuclear Power Engineering, Obninsk, Russian Federation

^a ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7831-9474>

^b ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9626-0223>, compvi19@mail.ru

^c ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0420-7856>, sergeystarkov56@mail.ru

Abstract: this article presents a method for early fire detection using video images from surveillance cameras, based on a temporal analysis of the suspicious area. The method makes it possible to compress the area of the video image to a time series, which is classified by a recurrent neural network. The time series contains metrics measured in the area and its surroundings to consider for its flicker. The flicker analysis determines whether the area is on fire. The proposed algorithm significantly reduces the number of false fire alarms as the video image are analyzed over time. The source data compression to a time series containing the area and surrounding characteristics allows using a small recurrent neural network to classify a suspicious area regardless of its size. These features make this model applicable for building an autonomous fire detector based on a single-board computer and a video camera. The paper describes the

proposed model and the neural network training, training quality evaluation and the results of experiments, as well the results generated with the Jetson Nano single-board computer from NVIDIA.

Keywords: neural network-based software and hardware system, video detection, ignition, fire.

Cite this article: Klemyshev I. M., Lebedev S. S., Starkov S. O. Developing a Neural Network-Based Hardware and Software System for Early Video Detection of Fires in Real Time. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):47–59. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-7.

Введение

Пожары до сих пор являются угрозой для жизни и имущества. В современном мире, кроме традиционных способов обнаружения возгораний с помощью различных датчиков, реагирующих на изменение температуры или химического состава воздуха, предлагаются решения на основе компьютерного зрения и нейросетевых алгоритмов. Очевидное теоретическое преимущество решений на базе компьютерного зрения перед классическими датчиками — это возможность раннего обнаружения возгорания, когда до датчиков дыма или температуры просто не доходит воздействие источника горения. А возможность раннего обнаружения возгорания — это возможность спасти жизни и имущество от пожара.

Одновременно с развитием компьютерного зрения и машинного обучения на основе нейросетей активное развитие получили технологии граничных вычислений, и на рынок вышли целые семейства одноплатных компьютеров от различных технологических гигантов. Мощности одноплатных компьютеров растут благодаря использованию графических ускорителей (GPU), а в последнее время — и специальных тензорных процессоров (TPU) для работы с многомерными матрицами.

В данной работе внимание сосредоточено на задаче создания автономного детектора на основе одноплатного компьютера, который сможет произвести раннее обнаружение возгорания внутри и снаружи помещений по видеоизображению с камер наблюдения. Один из таких компьютеров — Jetson Nano от компании NVIDIA показан на рисунке 1.

Наблюдая возможности и успехи развития сферы машинного обучения, компьютерного зрения, а также расцвет интернета вещей (IoT) и граничных вычислительных устройств (edge computing), можно было бы предположить, что задача раннего обнаружения возгорания по видеоизображению давно уже под силу разработчикам охранных систем. Однако практика применения существующих на рынке решений для обнаружения огня с помощью интеллектуального анализа видео, а также обзор предлагаемых в нашей стране и за рубежом новых методов, дает понимание о том, что универсального решения нет, задача сложнее, чем кажется на первый взгляд и решить ее для наибольшего количества сценариев пока не удается.

Существующие решения для определения огня на видеоизображении, полученном без использования специального оборудования (например, тепловизоров), а с помощью обычной цветной видеокамеры, часто ограничиваются применением сверточных нейросетей с некоторой предобработкой видеопотока. Точность таких детекторов, то есть способность находить в кадре вещи, похожие на огонь, на сегодняшний день достаточно высока и в некоторых случаях достигает близких к 100% значений. Одновременно с этим большой проблемой всех решений по огню является высокая ошибка первого рода, то есть неспособность детектора различать огонь и похожие на него объекты. Большая величина этой ошибки означает, что детектор будет давать много ложных срабатываний, замечая огонь там, где его нет. Максимальное снижение ошибки первого рода — это один из основных моментов, позволяющий перейти от просто модели, распознающей огонь на видеоизображении, к устройству, готовому к применению на практике.

Работы по теме

За последние годы глубокое обучение сделало огромный шаг вперед, во многом — в сфере компьютерного зрения и ориентирования в пространстве, благодаря новым подходам и архитектурам сверточных сетей. В ряде работ эти методы и подходы были применены к задаче раннего обнаружения возгораний на видеоизображениях. Несмотря на высокие показатели точности в нахождении огня на изображениях, эти модели не могут верифицировать подозрительную область во времени, что приводит к частым ошибкам первого рода, то есть ложным срабатываниям.

Одновременно с этим активно развивается и аппаратная часть вычислительных машин, что позволяет разрабатывать автономные устройства для построения умной и безопасной окружающей

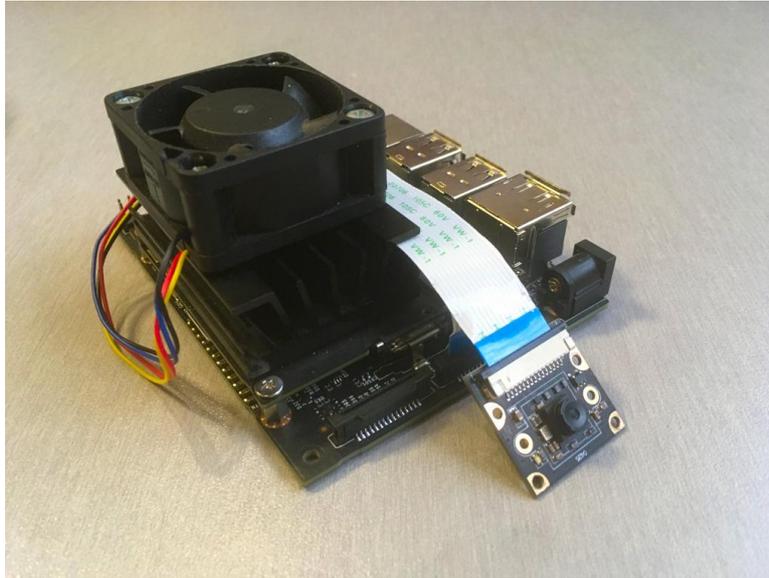


Рис. 1. Одноплатный компьютер Jetson Nano и RaspberryPI-камера (сенсор Sony IMX477)

среды. В работах [1, 2, 3] команды исследователей из разных стран демонстрируют возможности создания автономных детекторов для раннего обнаружения возгораний по видеоизображениям на базе одноплатных компьютеров. Детекторы в работах [1, 2] построены на базе одноплатного компьютера Jetson Nano, в работе [3] — на базе Banana Pi. В основе метода работы детекторов в работах [1, 2, 3, 4] — поиск источников возгорания с помощью сверточных нейросетей без анализа по времени. Однако, как было сказано выше, отсутствие верификации по времени не позволяет избежать ложных срабатываний, даже несмотря на высокие показатели точности распознавания этих моделей.

Одна из успешных работ, показывающих пространственно-временное обнаружение возгорания и задымления на видеопоследовательности, — работа китайской исследовательской команды [5]. В процессе обработки видеоизображения идет накопление кадров подозрительной области в течение некоторого времени, в результате которой данные этой области образуют трехмерный массив цветных изображений. Далее этот массив проходит классификацию с помощью нейросети на содержание дыма/огня. Такая проверка позволяет существенно уменьшить количество ложных срабатываний, но набирается большой объем данных для классификации каждой подозрительной области изображения. Это делает невозможным создание детектора на компьютерах вроде Jetson Nano, который вел бы мониторинг территории в режиме реального времени.

В 2010 году еще одна исследовательская команда [6] также прорабатывала вопрос раннего обнаружения возгорания по видео, отталкиваясь от поведения огня во времени. Их подход базируется на анализе мерцания, которое создает огонь в процессе горения. Они не анализируют область целиком как изображение, однако снимают некоторую характеристику с области и затем, анализируя изменение этой характеристики во времени, делают вывод о наличии/отсутствии огня в этой области.

Результаты работы китайских исследователей [5] показывают, что верификация подозрительных областей по времени позволяет существенно снизить ошибку первого рода при детекции огня и дыма на видеоизображениях. А работа 2010 года [6] говорит о том, что возможно существенно сократить объем данных, необходимых для того, чтобы различить огонь в поведении некоторой области изображения, отталкиваясь от его поведения как объекта.

Еще одна современная работа, демонстрирующая пространственно-временное обнаружение задымлений и возгораний [7], основана на последовательном выделении пространственных признаков подозрительных областей при помощи сверточной модели нейросети с архитектурой Faster-RCNN и классификации временного ряда собранных признаков с помощью рекуррентной нейросети с LSTM-архитектурой (Long-Short-Term-Memory). Предлагаемый подход во многом аналогичен данной работе в целом, и основное отличие — иной способ извлечения и накопления пространственных признаков для классификации области.

Другая интересная работа [8] представляет применение стереозрения для определения местопо-

ложения возгорания в трехмерном пространстве и использование расстояния от камеры до источника горения в качестве критерия для снижения уровня ложноположительных срабатываний. В перспективе любой автономный детектор возгораний и/или задымлений по видеоизображению может быть оборудован стереозрением и дополнен функционалом определения местоположения источника горения в трехмерном пространстве. Это может быть использовано для интеграции детектора раннего обнаружения возгораний, скажем, с адресной системой пожаротушения.

В предлагаемом методе предлагается сделать упор на то, чтобы верифицировать подозрительные области обязательно по времени, так как это способно уменьшить ошибку первого рода, и при этом использовать как можно меньше вычислительных мощностей для создания автономного детектора на компьютере Jetson Nano.

Гипотеза состоит в том, чтобы использовать в качестве данных определенные метрики регионов-кандидатов, собранные в течении короткого времени, и провести анализ собранных данных с помощью нейросети. Поскольку данные такого рода представляют собой временной ряд, или последовательность данных, то для задачи классификации такого ряда нужно решить задачу много-к-одному с помощью рекуррентной нейросети (RNN).

Предлагаемый метод

Предлагаемый метод направлен на создание детектора возгораний, работающего на малых вычислительных мощностях (edge computing) и при этом не совершающего таких ошибок, как, например, реагирование на статичное изображение огня в кадре, проходящего человека в красной куртке или разного рода блики, часто появляющиеся на разных поверхностях в кадре.

Общий механизм распознавания огня с помощью компьютерного зрения аналогичен тому, каким образом это делает человек: заметив что-то напоминающее огонь в поле своего зрения, переместит свое внимание в эту область для принятия решения, действительно ли был замечен огонь. Конвейер обработки видеоизображения для задачи компьютерного зрения, в целом, состоит из тех же шагов:

- 1) выделения регионов-кандидатов, то есть прямоугольных областей кадра, предположительно содержащих огонь;
- 2) анализ данных областей во времени для классификации на содержание источника горения.

Задача данного исследования — найти способ анализировать регионы-кандидаты по времени с минимальными вычислительными затратами, высокой точностью и низким значением ошибки.

Цель исследования — получить легкую нейросетевую модель для классификации регионов-кандидатов по времени на содержание источника горения (огня) в реальном времени, которая будет использоваться в конвейере автономного детектора возгораний на основе граничных вычислений.

Основное техническое новшество предлагаемой модели детектора возгораний — временная интерпретация видеоизображения, а точнее — предлагаемый способ извлечения признаков и их классификация.

Для работы с временными признаками и последовательностями данных в глубоком обучении используются рекуррентные нейросети. Это класс сетей, предназначенных для моделирования последовательных данных, таких как временные ряды или естественный язык. Задача обнаружения возгорания требует классификации временного ряда, отражающего поведение некоторой области видеоизображения во времени. Поэтому в архитектуре нейросети после рекуррентного слоя стоят два полносвязанных слоя (Dense Layer) для классификации на содержание/отсутствие огня.

Логично, что чем больше пространственных признаков каждого кадра видеоизображения будет использовано для формирования временной последовательности для классификации, тем точнее будет результат. Обратной стороной такой полноты исходных данных является, само собой, большая ресурсоемкость их обработки.

Временные признаки в общем смысле представляют собой последовательный набор данных, которые могут быть как отдельными числовыми характеристиками, так и, например, целым изображением или картой признаков либо иной структурой данных. Какой бы процесс ни описывала эта последовательность признаков, она будет иметь некоторое минимальное значение длины, ниже которого процесс предсказания не будет эффективным на этом наборе данных. Поэтому выбран более оптимальный путь минимизации размера самих величин, из которых набирается последовательность признаков, вместо сокращения длины ряда.

Предлагаемый способ получения признаков для некоторой прямоугольной области R кадра видеопоследовательности и формирования из них временного ряда состоит в следующем:

- данная область R кадра берется в качестве основной области (с масштабом $1x$);
- строятся две дополнительные прямоугольные области с центрами и ориентацией как у основной области в масштабах $2x$ и $1/2x$;
- область кадра, содержащая все три масштабные области, преобразуется в цветовое пространство HSV (hue-saturation-value);
- для трех масштабных областей находятся средние значения величин h , s и v , обозначающие компоненты оттенка, насыщенности и яркости цвета; итого — 9 числовых значений для одного региона-кандидата в кадре.

Полученные средние значения величин h , s , v для трех масштабных областей, построенных для одного региона-кандидата, берутся в качестве временного признака, и из таких наборов значений составляется ряд для последующей классификации. По объему данных один набор значений равен объему данных цветного изображения из трех пикселей. Такой способ формирования временных признаков делает процесс инвариантным к размеру региона-кандидата. Для большего региона модель будет затрачивать немного больше времени для расчета средних значений, но на выходе имеет для классификации точно такой же небольшой набор признаков, что несравнимо с исходными объемами данных. Остается вопрос, почему такая модель будет работать на распознавание огня и насколько эффективен предлагаемый метод.

Для ответа обратимся к рисунку 2, на котором показан процесс сбора временных признаков с некоторой фиксированной области изображения указанным выше способом. Для примера, показанного на рисунке 1, имеются 4 области: заключающая огонь и окружающее его пространство (1), заключающая только огонь (2) с небольшой внешней окантовкой, немного меньше огня (3), внутри огня (4). Видно, что и значения величин h , s , v , и динамика изменений этих значений отличаются для разных областей в зависимости от «масштаба» и того, что область в себе содержит. Отсюда гипотеза о том, что можно научить нейросеть с RNN-архитектурой классифицировать такие последовательности временных признаков на те, которые соответствуют наличию огня, от всех остальных.

Поэкспериментировав с масштабными областями на разных видеоизображениях, содержащих огонь, и оценив величины h , s , v , мы выбрали следующий способ расчета областей и их количества: три области, которые строятся путем масштабирования в обе стороны средней области, заключающей в себя только огонь. Выбор именно такого способа расчета масштабных областей и их количества основан на особенностях самого огня, его большой вариативности в разных условиях горения и его поведении в пространстве.

Наглядно процесс получения величин h , s , v для областей, как содержащих огонь, так и не содержащих его, показан на рис. 3–5.

На рисунке 6 изображен общий алгоритм верификации региона-кандидата на содержание огня:

Алгоритм состоит из следующих шагов:

- 1) выделение области предполагаемого нахождения цели (огня, по цвету/движению, с помощью сверточной нейросети и т.д.) и двух масштабных областей ($x2$ и $x0.5$);
- 2) преобразование изображения в цветовое пространство HSV (hue, saturation, value);
- 3) вычисление средних значений HSV для трех выделенных ранее масштабных областей;
- 4) повторение пунктов 2) и 3) для последовательности кадров (экспериментально — 32 кадра) и получение в результате входного вектора для рекуррентной нейросети из 9 сигналов (h , s , v для трех областей) по 32 значения;
- 5) инференс обученной рекуррентной нейросети для классификации выбранного участка видеопоследовательности;
- 6) полученная в результате инференса вероятностная оценка того, что верифицируемый регион-кандидат действительно содержит огонь.

Архитектура нейросети

Задача классификации последовательности данных не является новой, как и архитектуры нейросетей, предложенные для ее решения. В данной работе использована архитектура, показанная на рисунке 7.

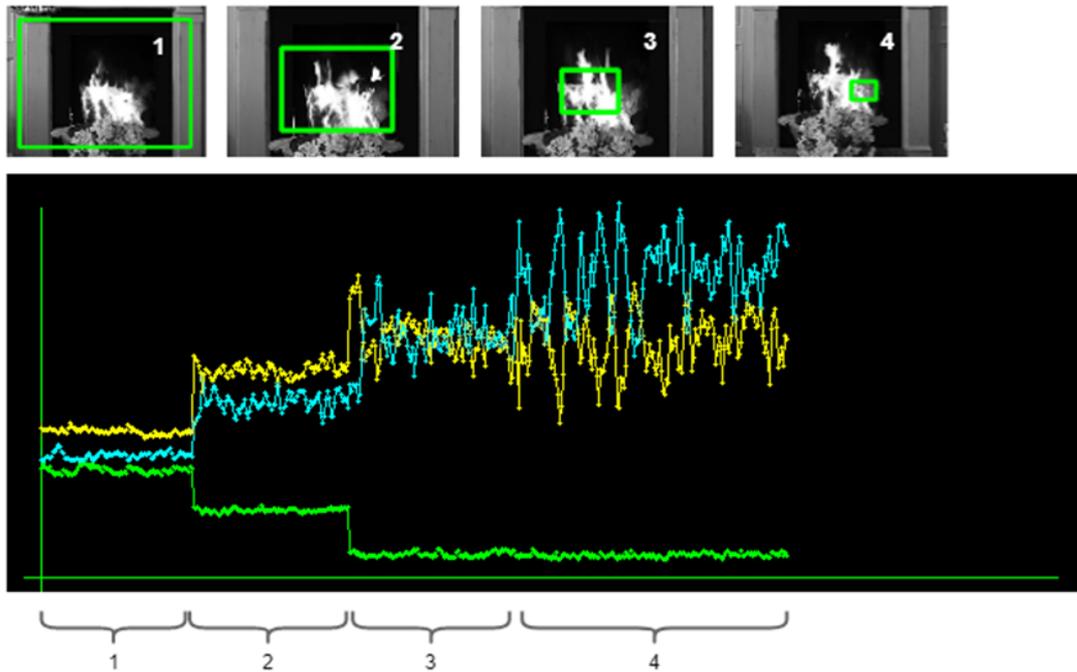


Рис. 2. Сбор данных средних величин h , s , v с областей разного масштаба, содержащих в себе огонь с разной степенью включения

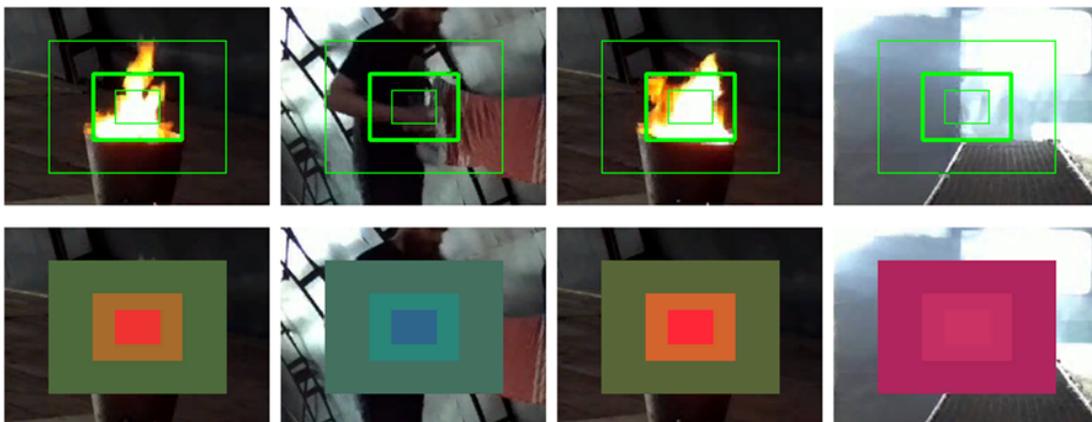


Рис. 3. Примеры масштабных областей и снимаемых с них сигналов средних величин Hue-Saturation-Value (показаны в нижнем ряду, преобразованы в пространство цвета RGB (Hue-Red, Sat-Green, Val-Blue))

Входной слой имеет размерность 32×9 , что означает 32 шага по времени и 9 значений на каждый шаг. Далее идет слой рекуррентной сети (LSTM или GRU), с входной размерностью 32×9 и восемью шагами на выходе. Для рекуррентного слоя заданы dropout и recurrent_dropout, которые способствуют лучшему обучению сети и помогают избежать переобучения за счет случайного отключения части узлов, соединяющих текущий и последующий слои. Выход рекуррентного слоя направлен на вход классификатора на основе двух полносвязанных (Dense) слоев с двумя байесовскими выходами нейросети, на которых получается результат классификации последовательности.

В процессе исследования и обучения модели произведена небольшая модификация архитектуры для сравнения результатов обучения и поиска более оптимальной конфигурации. В частности, модификации касались применения GRU-слоев вместо LSTM, а также использование dropout-ов как

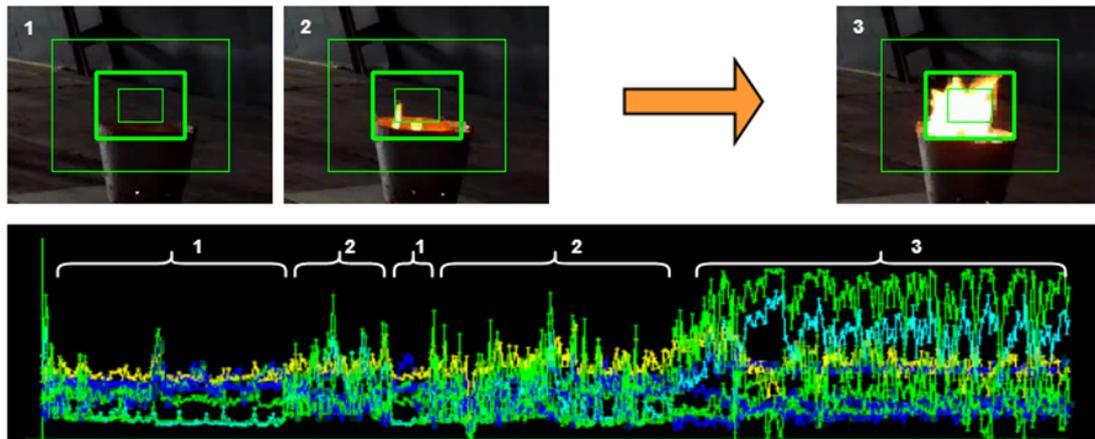


Рис. 4. Пример сигналов h , s , v , снимаемых с масштабных областей на видео, содержащих появление горения

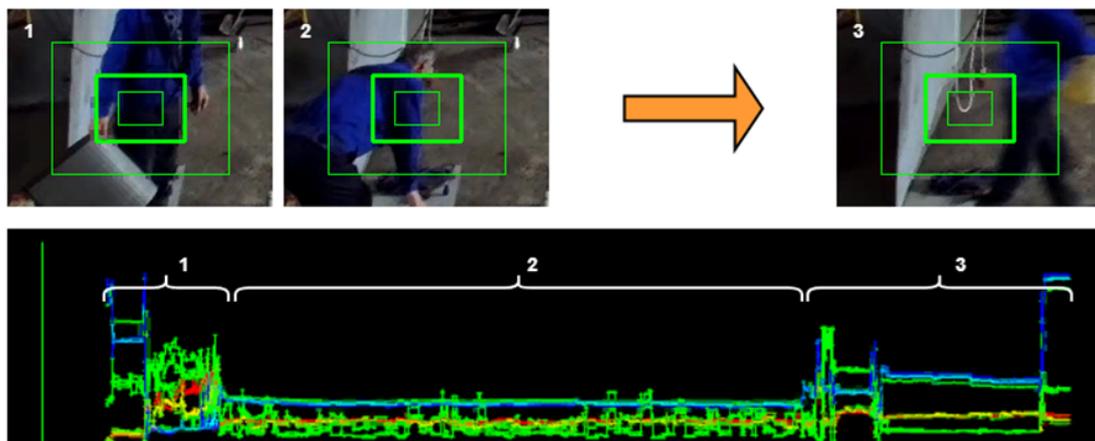


Рис. 5. Пример сигналов h , s , v , снимаемых с масштабных областей на видео, не содержащих источника горения (огня)

внутри рекуррентного слоя, так и отдельно в виде Dropout-слоя после рекуррентного.

Данные для обучения

Данные для обучения нейросети были подготовлены вручную с помощью небольших программ-утилит, написанных для этой задачи.

В лабораторных условиях были отсняты видеоролики, на которых присутствует:

- огонь на разном удалении от камеры;
- движущиеся люди;
- различные движущиеся предметы и механизмы;
- предметы, похожие на огонь, которые могут спровоцировать детектор на ошибку (естественное и искусственное освещение — дневной свет в окнах, лампы накаливания и газоразрядные).

Получить данные для обучения нейросети можно с помощью разметки видеороликов. Разметка в данном случае является преобразованием видеоизображения во временной ряд количественных характеристик, и назначение этому ряду соответствующего класса: огонь / не огонь. Для набора видеозаписей, содержащих огонь и снятых с фиксированного ракурса, человек выделяет в каждом ролике прямоугольную область, описывающую основную область пламени в кадре; при этом происходит расчет и запись усредненных значений HSV для масштабных областей (2x и 0,5x) в файл с данными. Аналогично для областей, не содержащих огонь, с той разницей, что на выходе для них ставится в

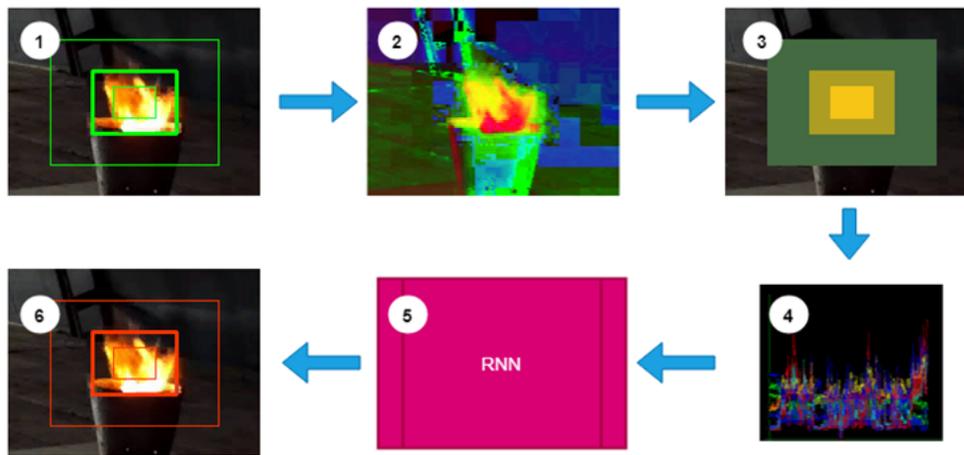


Рис. 6. Алгоритм верификации региона-кандидата на содержание огня: 1) выделение региона-кандидата и расчёт масштабных областей; 2) переход в цветовое пространство HSV; 3) расчёт средних значений Hue-Saturation-Value для масштабных областей; 4) набор временного ряда значений HSV для последующей 5) классификации с помощью рекуррентной нейросети и 6) получение результата огонь/не огонь

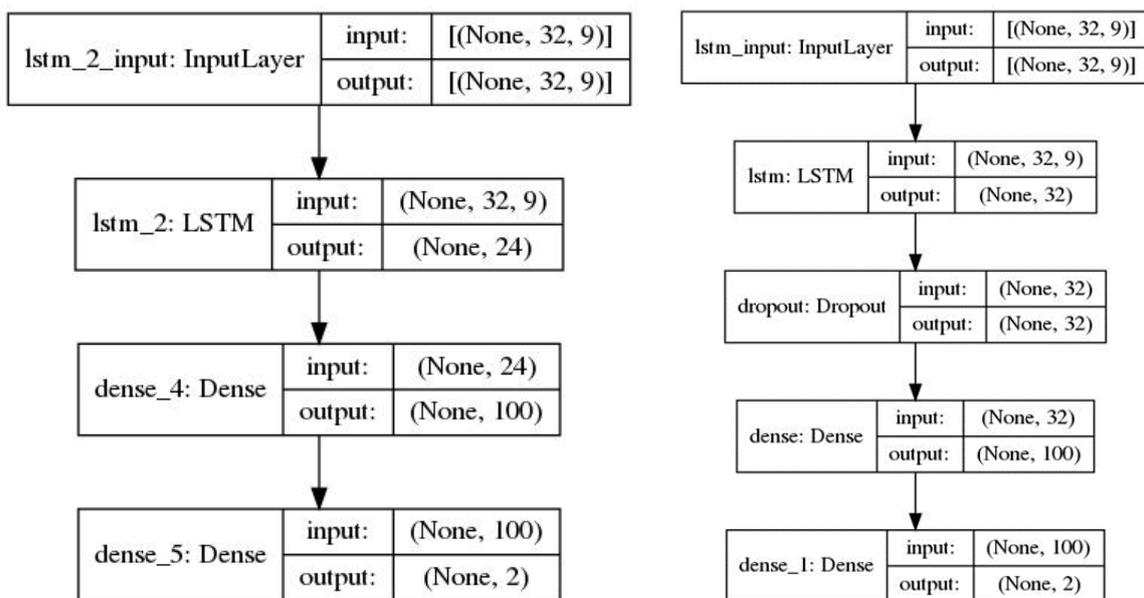


Рис. 7. Архитектура нейросети (с dropout внутри рекуррентного слоя (слева) и с отдельным Dropout слоем (справа)). Рекуррентный слой LSTM может быть заменен на GRU

соответствие класс «нет огня».

В итоге был получен следующий набор данных для обучающей и тестовой выборки:

30, 231 образцов для обучения;

10, 384 образца для тестирования;

Эксперименты и результаты

Обучение нейросети

Проведен ряд экспериментов с обучением нейросети, с небольшими изменениями как предложенной архитектуры, так и наборов данных для обучения, с целью определить наиболее подходящую конфигурацию модели и параметров обучения.

На собранных данных нейросеть хорошо обучается. Количество эпох обучения — 100. Результаты экспериментов относительно заданных условий представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты обучения рекуррентной сети со слоями GRU (1.1–1.8) и LSTM (2.1–2.8). Для сравнения были составлены архитектуры с разным количеством ячеек памяти в рекуррентном слое из набора [8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64] для каждого варианта рекуррентного слоя [GRU, LSTM]

Exp. №	RNN type	RNN units	Accuracy	Loss
1.1	GRU	8	0.940402	0.2399
1.2	GRU	16	0.959242	0.1842
1.3	GRU	24	0.982904	0.1022
1.4	GRU	32	0.972351	0.12024
1.5	GRU	40	0.963004	0.14234
1.6	GRU	48	0.94241	0.13233
1.7	GRU	56	0.941058	0.11323
1.8	GRU	64	0.956242	0.14234
2.1	LSTM	8	0.942045	0.2122
2.2	LSTM	16	0.95414	0.14234
2.3	LSTM	24	0.970502	0.10234
2.4	LSTM	32	0.990882	0.09742
2.5	LSTM	40	0.961082	0.10240
2.6	LSTM	48	0.932459	0.12234
2.7	LSTM	56	0.943529	0.13648
2.8	LSTM	64	0.955430	0.12234

Ниже приведены соответствующие графики истории обучения, где голубой тренд показывает параметр “accuracy”, оранжевый — параметр “loss”.

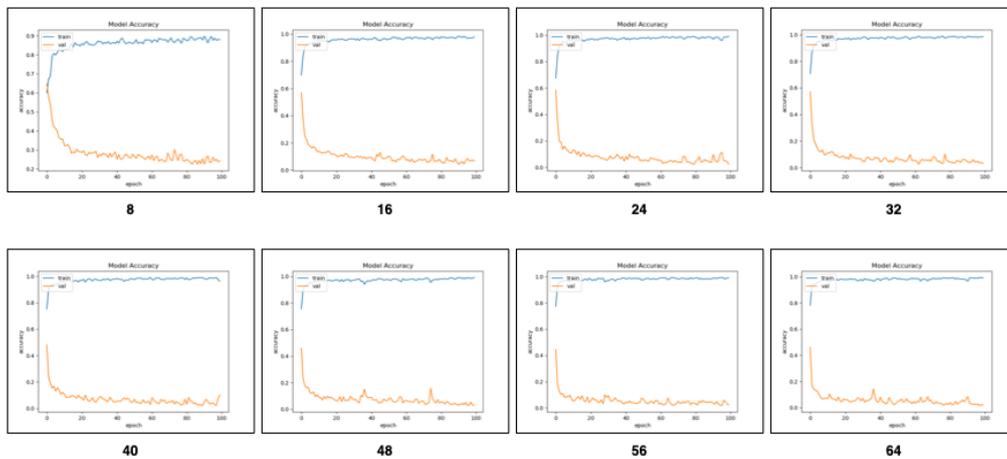


Рис. 8. Графики обучения рекуррентной нейросети со слоем LSTM с указанием количества ячеек слоя ([8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64])

На фоне хорошего результата обучения для столь сильного сжатия исходных данных (степень сжатия равносильна сжатию региона-кандидата в каждом кадре до трех цветных пикселей — 9 значений средних величин пространства HSV) было решено провести дополнительный эксперимент с еще меньшим количеством входных данных, исключив из временного ряда величины hue (оттенки) для всех масштабных областей.

Если эксперимент будет удачным и сеть продолжит безошибочно отличать регионы-кандидаты, содержащие огонь, от всех других, то это будет означать, что нейросеть действительно способна отличать области, содержащие огонь по характеру того мерцания, который источник горения создает на видеоизображении, даже без учета цветовой составляющей огня. Это важный момент, т.к. горение

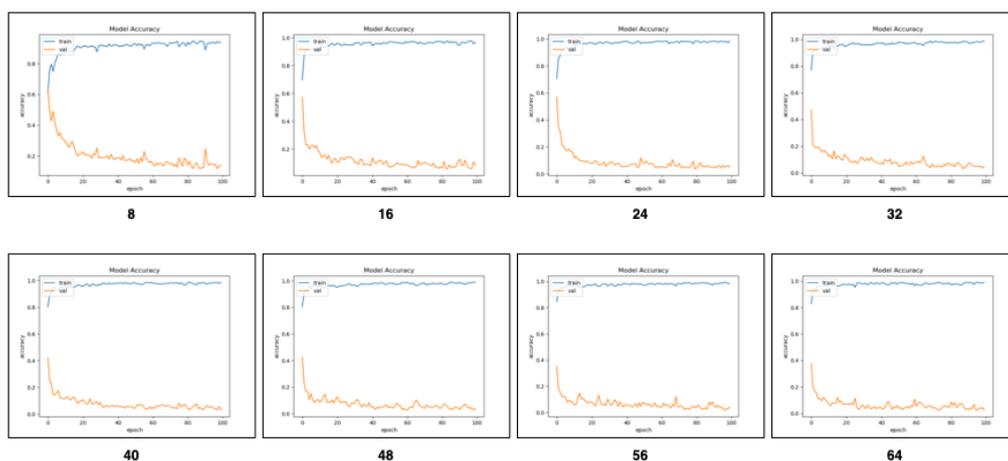


Рис. 9. Графики обучения рекуррентной нейросети со слоем LSTM с указанием количества ячеек слоя ([8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64])

разных материалов порождает разную цветовую гамму языков пламени.

Результаты эксперимента приведены в таблице 2.

Таблица 2

Результаты обучения рекуррентной сети со слоями GRU (1, 3) и LSTM (2, 4). Для сравнения были обучены архитектуры с разным количеством ячеек памяти в рекуррентном слое [16, 32] для каждого варианта рекуррентного слоя [GRU, LSTM]

Exp №	RNN type	RNN units	Accuracy	Loss
1	GRU	32	0.971279	0.10958
2	LSTM	32	0.97736	0.11395
3	GRU	16	0.952367	0.19234
4	LSTM	16	0.942547	0.20134

Примеры работы нейросети без HUE-величины с огнем разной природы, а соответственно, и разной цветовой палитрой пламени на изображении показаны на рисунке 10.

Нейросеть обучена и протестирована на устройстве Jetson Nano от NVIDIA — одноплатном компьютере с графическим ускорителем (128 ядер Maxwell), ориентированном на ИИ (нейросети, глубокое обучение, искусственный интеллект) и ресурсоемкие расчеты.

Примеры работы

На рисунках ниже показаны примеры классификации регионов-кандидатов (подозрительных областей) на содержание или отсутствие огня. Примеры сделаны с помощью программной утилиты, которая позволяет вручную выделить подозрительную область видеоизображения, образовать от нее масштабные области по описанному в статье методу и осуществить классификацию данной области видеоизображения по времени на наличие огня.

На рисунке 10 приведены примеры подтверждения наличия огня в выделенной области.

На рисунке 11 видно, что предложенная модель «отстраивается» от объектов, похожих на огонь, то есть не дает подтверждения его наличия в области. Это и есть заявленный результат по снижению ошибки первого рода с помощью временного анализа подозрительной области.

Оценка качества модели

Для того чтобы рассчитать вероятность ложноположительного срабатывания, был использован следующий подход:

- 1) собрана коллекция видеороликов, соответствующих следующим критериям:
 - а) фиксированное положение камеры при съемке;

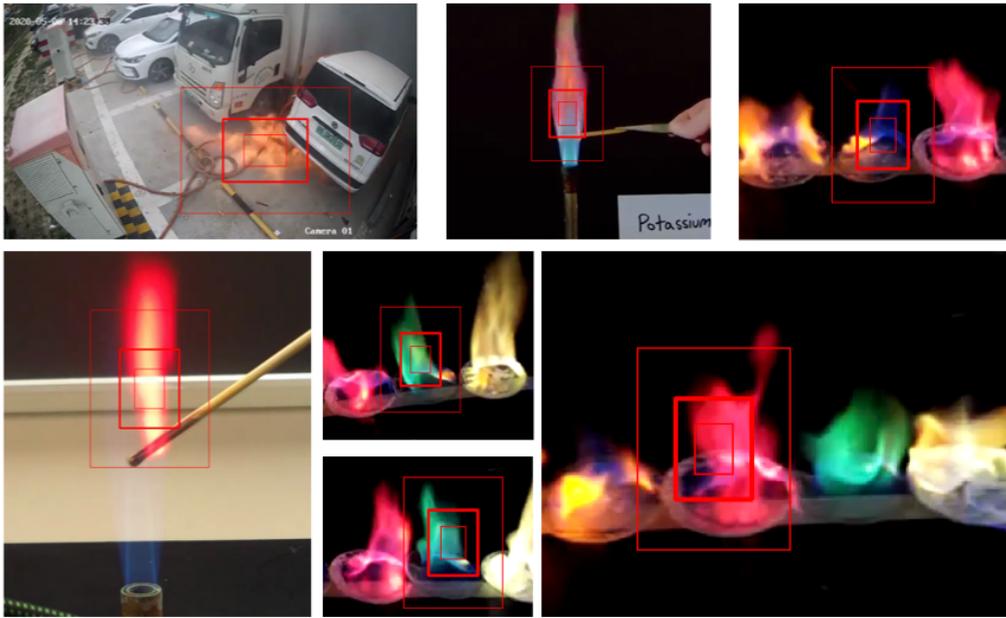


Рис. 10. Примеры работы сети, обученной без HUE-величин, с областями, содержащими огонь разной природы (что влияет на палитру пламени). На всех изображениях показано подтверждение наличия огня в подозрительной области

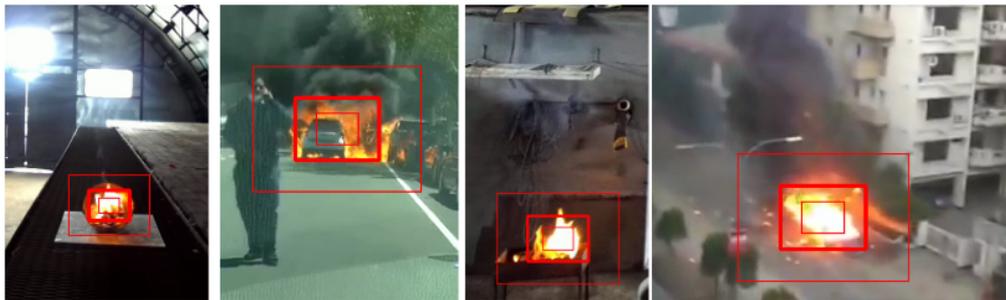


Рис. 11. Подтверждение огня в подозрительной области видеоизображения



Рис. 12. Примеры отсутствия ложных срабатываний на других объектах видеоизображений. Наличие огня в подозреваемой области не подтверждено

- b) если в ролике присутствует огонь, то он не меняет своего местоположения в кадре;
 - c) независимо от наличия или отсутствия огня в роликах присутствует движение людей, машин и других объектов;
 - d) ролики содержат искусственные источники освещения, свет, проникающий в окна, объекты, напоминающие огонь по цвету, блики и поверхности, отражающие огонь на воспроизведении;
- 2) каждый ролик из коллекции размечается так, чтобы был известен регион возгорания на данном

ролике (прямоугольная область, описанная вокруг области горения в кадре);

3) программная утилита прогоняет коллекцию роликов, обнаруживая в каждом подозрительные области (регионы-кандидаты на содержание огня); два программных процесса занимаются обнаружением регионов-кандидатов: первый выделяет области, по цвету напоминающие огонь, второй — все области, где замечено движение (эти области отслеживаются встроенным трекером для того, чтобы была возможность набрать необходимое количество кадров); подозрительные области подвергаются классификации с помощью RNN-сети по описанному методу;

4) результат классификации интерпретируется следующим образом:

- a) если область классифицирована как содержащая огонь и находится внутри вручную указанной области огня для данного ролика (или же совпадает с указанной областью на 95 %, коэффициент IoU = 95 %), то результат положительный; (TP — true positive);
- b) если область классифицирована как содержащая огонь и находится вне вручную указанной области огня для данного ролика (или же совпадает с указанной областью менее чем на 95 %, коэффициент IoU < 95 %), то результат ложноположительный; (FP — false positive);
- c) если область классифицирована как область без огня и находится внутри вручную указанной области огня для данного ролика (или же совпадает с указанной областью на 95 %, коэффициент IoU = 95 %), то результат ложноотрицательный (FN — false negative);
- d) если область классифицирована как область без огня и находится вне вручную указанной области огня для данного ролика (или же совпадает с указанной областью менее чем на 95 %, коэффициент IoU < 95 %), то результат отрицательный (TN — true negative).

Искомые метрики модели: True Positive Rate (TPR) и False Positive Rate (FPR) — рассчитываются следующим образом:

$$TPR = \frac{TP}{TP + FN}; \quad FPR = \frac{FP}{FP + TN}.$$

В результате эксперимента получены следующие значения величин:

- TP = 284;
- TN = 945;
- FP = 7;
- FN = 4.

Соответственно, вероятности работы модели:

$$TPR = 284 / (284 + 4) = 0.986;$$

$$FPR = 7 / (7 + 945) = 0.0074;$$

Точность классификации составляет 98.6%, а ошибка первого рода — 0.7 %.

Выводы

В статье предложен метод раннего обнаружения огня на видеопоследовательности, который позволяет значительно сократить количество ложных срабатываний (ошибку первого рода), что является одним из ключевых моментов на пути к созданию автономного детектора, способного к самостоятельной работе в реальных условиях.

Метод предлагает верификацию найденных регионов-кандидатов путем анализа временного ряда характеристик с помощью рекуррентной нейросети. Основное новшество предложенной модели — способ получения временной последовательности, отражающей временное изменение проверяемой области и пространства вокруг нее с помощью косвенных величин. Способ заключается в выделении трех масштабных областей, названных так по способу образования и пространственного расположения, и представляющих собой в некотором виде «пирамиду признаков», часто используемую в архитектуре сверточных нейросетей. В данном случае признаки — это средние значения величин h , s , v , рассчитанные для каждой масштабной области в цветовом пространстве HSV (h — оттенок, s — насыщенность, v — интенсивность). Три области отражают видимые во времени изменения пространства внутри и снаружи предполагаемой области горения. «Колебания» величин h , s , v в этих областях образуют собой некоторое представление, которое практически безошибочно классифицируется рекуррентной нейросетью.

Таким образом, регионы-кандидаты, предположительно содержащие область возгорания (или горения), проходят окончательную проверку по времени и по видимым изменениям пространства внутри, снаружи и в пределах подозрительной области.

Полученные для предложенной модели метрики качества работы: точность классификации 98.6% и ошибка первого рода, равная 0.7 %, позволяют говорить о высоком достигнутом результате и перспективном использовании данного метода.

Кроме уменьшения ложноположительных срабатываний модели, метод позволяет значительно сократить количество данных для классификации региона-кандидата, что делает эту модель пригодной для использования в устройствах граничных вычислений, вроде одноплатных компьютеров семейства Jetson от NVIDIA или других аналогичных, для создания автономных детекторов раннего обнаружения возгораний по видеоизображениям.

Вся работа, описанная в статье, должна рассматриваться не как уже найденное решение задачи раннего обнаружения огня на видеоизображениях, а как перспективное направление дальнейшего исследования и основа для создания промышленных аппаратно-программных детекторов, которым человек сможет доверить охрану имущества от возможных угроз, связанных с огнем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Saponara S., Elhanashi A., Gagliardi A. Real-Time Video Fire-Smoke Detection Based on CNN in Antifire Surveillance Systems. *J Real-Time Image Proc.* 2021;18:889–900.
2. Hongyi Pan, Diaa Badawi, Ahmet Enis Cetin. Computationally Efficient Wildfire Detection Method Using a Deep Convolutional Network Pruned via Fourier Analysis. *Sensors.* 2020;20:2891.
3. Abdusalomov A., Baratov N., Kutlimuratov A., Whangbo T. K. An Improvement of the Fire Detection and Classification Method Using YOLOv3 for Surveillance Systems. *Sensors.* 2021;21:6519.
4. Samarth G., Bhowmik N., Breckon T. P. Experimental Exploration of Compact Convolutional Neural Network Architectures for Non-Temporal Real-Time Fire Detection. *Proceedings of the 18th IEEE International Conference on Machine Learning and Applications ICMLA 2019.* Piscataway, NJ: IEEE. 2019:653–658.
5. Lin G., Zhang Y., Xu G., Zhang Q. Smoke Detection on Video Sequences Using 3D Convolutional Neural Networks. *Fire Technol.* 2019;55:1827–1847.
6. Günay O., Taşdemir K., Töreyn B. U., Çetin A. E. Fire Detection in Video Using LMS Based Active Learning. *Fire Technol.* 2010;46:551–577.
7. Kim B., Lee J. A Video-Based Fire Detection Using Deep Learning Models. *Appl. Sci.* 2019;9:2862.
8. Li Guodong, Lu Gang, Yan Yong. Fire Detection Using Stereoscopic Imaging and Image Processing Techniques. *Proceedings of IEEE International Conference on Imaging Systems and Techniques 2014 (IST2014).* 2014:28–32. DOI: 10.1109/IST.2014.6958440.

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-8

СХЕМА ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ ИНДУКЦИИ НА СМЕЩЕННЫХ СЕТКАХ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ**И. В. Бычин^{1,2,a}, А. В. Гореликов^{1,2}, А. В. Ряховский^{1,2}**¹ Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,
г. Сургут, Российская Федерация² Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация
^a igor-bychin@yandex.ru

Аннотация: для модели неидеальной магнитной гидродинамики в рамках метода контрольного объема рассматривается вариант схемы дискретизации уравнения индукции магнитного поля. Для дискретизации уравнения индукции используется алгоритм ограниченного переноса, обеспечивающий соленоидальность численного решения. Приводится подробный вывод дискретного аналога уравнения индукции в произвольных ортогональных криволинейных координатах для смещенных структурированных расчетных сеток. Конвективные потоки в уравнении индукции аппроксимируются по противопоточной схеме с квадратичной интерполяцией с использованием метода отложенной коррекции.

Ключевые слова: уравнение индукции, дискретный аналог, численный метод, магнитная гидродинамика.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-04-60123).

Для цитирования: Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Схема дискретизации уравнения индукции на смещенных сетках в ортогональных криволинейных координатах. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):60–73. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-8.

DISCRETIZATION SCHEME OF THE INDUCTION EQUATION ON A STAGGERED GRID IN ORTHOGONAL CURVILINEAR COORDINATES**Igor V. Bychin^{1,2,a}, Andrey V. Gorelikov^{1,2}, Aleksey V. Ryakhovsky^{1,2}**¹ Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation² Surgut State University, Surgut, Russian Federation
^a igor-bychin@yandex.ru

Abstract: a discretization scheme of the magnetic field induction equation is considered for the model of nonideal magnetic hydrodynamics within the framework of the control volume method. A constrained transfer algorithm is used to discretize the induction equation, which provides a solenoidal numerical solution. A detailed elaboration of the discrete analog of the induction equation in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates for staggered structured computational grids is presented. The convective flows in the induction equation are approximated with the counterflow scheme using quadratic interpolation and the deferred correction method.

Keywords: induction equation, discrete analog, numerical method, magnetohydrodynamics.

Acknowledgements: this work is financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project #20-04-60123).

Cite this article: Bychin I. V., Gorelikov A. V., Ryakhovsky A. V. Discretization Scheme of the Induction Equation on a Staggered Grid in Orthogonal Curvilinear Coordinates. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):60–73. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-8.

Введение

С середины 90-х годов XX века разработано достаточно большое количество программных комплексов (MagIC, UCSC Code, Calypso, ETH code, GeoFEM и т. д.) [1–5] для математического моделирования геомагнетизма, с помощью которых получен ряд наблюдаемых характеристик геомагнитного

поля. Полученные результаты позволили существенно продвинуться в понимании процессов, формирующих магнитное поле Земли. Тем не менее необходимо отметить, что в многочисленных исследованиях [1, 6–8], проведенных с использованием вышеупомянутых программных комплексов, изучались, в основном, квазиламинарные режимы течений, что оставляет вопросы о реалистичности полученных результатов.

В кодах для моделирования геодинamo реализована математическая модель магнитогидродинамической естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся сферическом слое, и, как правило, для численного решения используются спектральные и псевдоспектральные методы [1–8]. Широкое использование спектральных и псевдоспектральных методов обусловлено тем, что для сферической геометрии они предпочтительней с точки зрения скорости сходимости и вычислительной эффективности по сравнению с локальными методами (конечно-разностные, конечно-объемные, конечно-элементные методы) [4, 9]. Несмотря на это, локальные методы обладают рядом преимуществ, например, таких как: возможность расчета в областях со сложной геометрической формой и использование широкого спектра моделей турбулентности, т.е. в этом смысле локальные методы являются более универсальными. В настоящее время существует ряд работ, посвященных созданию численных методов и программного обеспечения для решения задач геодинamo [4, 9] в рамках локальных подходов.

При использовании локальных методов одна из основных проблем — это получение численного решения уравнения индукции, удовлетворяющего сеточному уравнению неразрывности. Существуют различные подходы для обеспечения бездивергентности магнитного поля: использование векторного потенциала [10]; метод искусственного скалярного потенциала [11–12]; введение в уравнение индукции градиента псевдодавления [9, 13–16]; метод Пауэлла, который широко применяется в астрофизических приложениях и основан на записи уравнений в форме, допускающей существование магнитных монополей [17]; алгоритм ограниченного переноса, основанный на использовании интегральной формы закона электромагнитной индукции Фарадея [11, 13, 18]. Перечисленные методы устранения численного магнитного заряда не являются универсальными и обладают своими преимуществами и недостатками. Например, коррекция магнитного поля в методе скалярного потенциала нелокальна и поэтому локальные ошибки в дивергенции магнитного поля могут мгновенно распространяться на всю область [19]. Другие методы, например, метод Пауэлла, не являются, строго говоря, консервативными.

Результаты, представленные в данной статье, являются продолжением работ авторов по разработке и модификации численных методов решения задач магнитной гидродинамики (МГД) и созданию программного обеспечения для моделирования геодинamo [20–21]. В настоящей работе рассмотрена схема дискретизации уравнения индукции магнитного поля, разработанная в рамках метода контрольного объема [22–23] и использующая алгоритм ограниченного переноса [18]. Дискретный аналог уравнения индукции записывается для смещенных структурированных расчетных сеток в произвольных ортогональных криволинейных координатах.

Дискретизация расчетной области

Будем считать, что расчетная область G — это ограниченная область в трехмерном пространстве, в которой введены произвольные ортогональные координаты — $\{x_\alpha\}$ (здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2, 3 и определяют номер координаты точки или компоненты вектора); $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ — соответствующий правый ортонормированный базис, $\{H_\alpha\}$ — коэффициенты Ламе. Пусть область G можно разбить системой координатных поверхностей на непересекающиеся подобласти (контрольные объемы) $D_{(i)} := D_{i_1 i_2 i_3}$ ($i_\alpha = 1, \dots, n_\alpha$), n_α — количество координатных поверхностей вдоль направления x_α , здесь и далее набор индексов (i_1, i_2, i_3) кратко обозначается (i) . Пусть $P_{(i)}$ — точка, находящаяся в геометрическом центре контрольного объема $D_{(i)}$. Сеточные значения компонент магнитного поля будем определять в точках на гранях контрольных объемов, т.е. использовать дискретизацию на смещенных (разнесенных) структурированных расчетных сетках [11]. Для дискретизации уравнения индукции на смещенных сетках удобно использовать точки с целыми и полуцелыми индексами, полагая, что расчетные точки с одним полуцелым индексом находятся в центрах граней контрольных объемов, расчетные точки с двумя полуцелыми индексами находятся в центрах ребер контрольных объемов, а расчетные точки с тремя полуцелыми индексами находятся в вершинах контрольных объемов. Для описания смещенной расчетной сетки с использованием целых и полуцелых

индексов введем операторы сдвига, действующие на наборах индексов:

$$h_\alpha^k(i) := h_\alpha^k(i_1, i_2, i_3) = \left(h_\alpha^k(i_1), h_\alpha^k(i_2), h_\alpha^k(i_3) \right), \quad (1)$$

$$h_\alpha^k(i_\beta) := i_\beta + \frac{k}{2} \delta_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, верхний индекс k принимает значения во множестве целых чисел и определяет направление и величину сдвига индекса i_β по направлению x_α . Операторы сдвига очевидно коммутируют друг с другом.

Введём следующие компактные обозначения для точек смещённой расчетной сетки:

$$P \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] := P_{h_\alpha^k(i)}, \quad P \left[\begin{smallmatrix} p \ k \\ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right] := P_{h_\beta^p h_\alpha^k(i)}, \quad P \left[\begin{smallmatrix} q \ p \ k \\ \gamma \ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right] := P_{h_\gamma^q h_\beta^p h_\alpha^k(i)}.$$

Нижние греческие индексы в квадратных скобках определяют направление смещения по расчётной сетке, а индексы над ними – величину сдвига по соответствующему направлению. Для сеточных значений зависимых и независимых переменных вводятся следующие обозначения:

$$f \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] := f \left(P \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] \right), \quad f \left[\begin{smallmatrix} p \ k \\ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right] := f \left(P \left[\begin{smallmatrix} p \ k \\ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right] \right), \quad f \left[\begin{smallmatrix} q \ p \ k \\ \gamma \ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right] := f \left(P \left[\begin{smallmatrix} q \ p \ k \\ \gamma \ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right] \right),$$

где f – произвольная переменная или элемент расчётной сетки (координата точки, длина ребра и т.д.). Аналогичные обозначения вводятся для суммы и произведения сеточных значений функций, например,

$$(f + g) \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] := f \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] + g \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right], \quad (fg) \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] := f \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] g \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right].$$

В рамках введенных обозначений, если $k = \pm 1$, то точки $P \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ – это центры граней $S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ контрольного объема $D_{(i)}$, ортогональных координатной линии x^α . Граница контрольного объема $\partial D_{(i)} = \bigcup_{\alpha=1}^3 S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$; $\delta S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ – площадь соответствующей грани контрольного объема. Если $k, p = \pm 1$, то точки $P \left[\begin{smallmatrix} p \ k \\ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ – это центры рёбер $l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p \ k \\ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right] = S_\beta \left[\begin{smallmatrix} p \\ \beta \end{smallmatrix} \right] \cap S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ контрольного объема $D_{(i)}$, расположенных вдоль координатных линий x^γ ($\alpha \neq \beta \neq \gamma$); $\delta l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p \ k \\ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ – длина соответствующего ребра. Граница грани $S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ – $\partial S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] = \bigcup_{p=-1,1} \left(l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p \ k \\ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right] \cup l_\beta \left[\begin{smallmatrix} p \ k \\ \gamma \ \alpha \end{smallmatrix} \right] \right)$. Если $k, p = \pm 1$ и $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, то точки $P \left[\begin{smallmatrix} q \ p \ k \\ \gamma \ \beta \ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ – это вершины контрольного объема $D_{(i)}$.

Дискретный аналог уравнения индукции магнитного поля

В МГД [24] уравнение индукции можно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \text{rot rot } \mathbf{B} = 0. \quad (3)$$

Здесь: \mathbf{B} – вектор магнитной индукции, \mathbf{u} – скорости жидкости, t – время, $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ – коэффициент магнитной вязкости, c – скорость света, σ – удельная электрическая проводимость жидкости. Из (3) непосредственно следует, что равенство нулю дивергенции \mathbf{B} в начальный момент времени обеспечивает соленоидальность магнитного поля и в последующие моменты времени, это свойство решения желательно сохранить и для дискретного аналога уравнения индукции. Уравнение (3) можно записать в форме закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \text{rot } \mathbf{E}, \quad (4)$$

где \mathbf{E} – напряженность электрического поля, которая в модели МГД имеет вид:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{B}. \quad (5)$$

Для получения дискретного аналога в данной работе используется подход, известный в вычислительной магнитной гидродинамике как алгоритм ограниченного переноса (СТА — constrained transport algorithm) [18]: уравнение (4) умножается на $e_\alpha dS_\alpha dt$ (dS_α — элемент площади на координатной поверхности, ортогональной e_α) и затем интегрируется по грани $S_\alpha [k]$ и по промежутку времени $[t_0, t]$. При вычислении поверхностного интеграла используются теорема Стокса и интегральная теорема о среднем. При интегрировании по времени в данной работе использована полностью неявная схема [23, 24]. В результате дискретный аналог уравнения индукции (3) записывается в виде:

$$\frac{1}{\delta t} \left(B_\alpha [k] - B_\alpha^0 [k] \right) \delta S_\alpha [k] = -c \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1, 1} p E_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \delta l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right],$$

$$(\alpha = 1, 2, 3, k \in \{-1, 1\}), \quad (6)$$

где $B_\alpha [k]$ — сеточное значение компонент индукции магнитного поля B_α на текущем временном слое t в центре грани $S_\alpha [k]$, $B_\alpha^0 [k]$ — сеточное значение B_α на предыдущем временном слое t_0 ; $E_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$ — сеточное значение E_γ в центре ребра $l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$; $\delta t = t - t_0$ — шаг по времени; $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — символ Леви-Чивиты.

Дискретный аналог уравнения неразрывности

Сеточные значения $\text{div} \mathbf{B}$ вычисляются в центрах контрольных объемов $D_{(i)}$ по формуле:

$$\text{DIV } \mathbf{B} |_{P_{(i)}} = \frac{1}{\delta V_{(i)}} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=-1, 1} k B_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] \delta S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right], \quad (7)$$

где $\delta V_{(i)}$ — объем $D_{(i)}$, внешняя нормаль на грани $S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ — $\mathbf{n} = k \mathbf{e}_\alpha$. Правая часть (7) — это поток \mathbf{B} через границу $D_{(i)}$, отнесенный к его объему. Пусть в момент времени t_0 сеточные значения $B_\alpha^0 \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ удовлетворяют дискретному аналогу уравнения неразрывности, т.е. $\text{DIV } \mathbf{B}^0 |_{P_{(i)}} = 0$. Тогда подстановка $B_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] \delta S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ из дискретного аналога уравнения индукции (6) в правую часть (7) дает:

$$\text{DIV } \mathbf{B} |_{P_{(i)}} = -\frac{c \delta t}{\delta V_{(i)}} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\sum_{k, p=-1, 1} k p E_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \delta l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \right). \quad (8)$$

Сумма в круглых скобках в правой части (8) симметрична по индексам α и β , и, следовательно, её свертка с символом Леви-Чивиты равна нулю, т.е.

$$\text{DIV } \mathbf{B} |_{P_{(i)}} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, решение дискретного аналога уравнения индукции (8) удовлетворяет сеточному уравнению неразрывности (9) на текущем временном слое, при условии, что B^0 соленоидально на предыдущем временном слое, т.е. $\text{DIV } \mathbf{B}^0 |_{P_{(i)}} = 0$.

Аппроксимация плотности тока проводимости

Следуя [18], напряженность электрического поля (5) можно записать в виде суммы:

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}, \quad (10)$$

где $\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ — напряженность, обусловленная движением проводящей среды, а $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}$ — плотность тока проводимости. Сначала разберем вопрос об аппроксимации плотности тока проводимости. Для этого рассмотрим координатную поверхность, ортогональную оси x_γ и проходящую через точку $P \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$, лежащую в центре ребра $l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$ ($\alpha \neq \beta \neq \gamma, p, k \in \{-1, 1\}$). На данной координатной поверхности построим замкнутый контур, образованный координатными линиями x_α и x_β , проходящими через ближайшие, соседние с $P \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$ четыре точки $P \left[\begin{smallmatrix} p \pm 1 & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$, $P \left[\begin{smallmatrix} p & k \pm 1 \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$. Точки $P \left[\begin{smallmatrix} p \pm 1 & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$,

$P \left[\begin{smallmatrix} p & k \pm 1 \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$ находятся в центрах граней контрольных объемов, и в них вычисляются соответствующие сеточные значения компонент $B_\alpha \left[\begin{smallmatrix} p \pm 1 & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$, $B_\beta \left[\begin{smallmatrix} p & k \pm 1 \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$ вектора магнитной индукции. Часть координатной поверхности $x_\gamma = const$ внутри построенного контура обозначим $\tilde{S}_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$, тогда сам контур будет её краем $\partial \tilde{S}_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$. Для равномерной по направлениям x_α и x_β сетки точка $P \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$ находится в центре $\tilde{S}_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$. Введем обозначения: $\delta \tilde{S}_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$ — площадь $\tilde{S}_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$; $\delta \tilde{l}_\alpha \left[\begin{smallmatrix} p \pm 1 & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$, $\delta \tilde{l}_\beta \left[\begin{smallmatrix} p & k \pm 1 \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$ — длины сторон контура $\partial \tilde{S}_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$.

Сеточное значение компоненты плотности тока проводимости $j_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$ в центре ребра $l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$ получим с использованием формулы Стокса для $\text{rot } \mathbf{B}$ при интегрировании по $\tilde{S}_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$:

$$j_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] = \frac{c}{4\pi} \delta \tilde{S}_\gamma^{-1} \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \sum_{\lambda, \rho=1}^3 \varepsilon_{\gamma\lambda\rho} \sum_{q=-1,1} q (B_\rho \delta \tilde{l}_\rho) \left[\begin{smallmatrix} q & p & k \\ \lambda & \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]. \quad (11)$$

Заметим, что ненулевой вклад в правую часть (11) дадут только те слагаемые, у которых индексы λ и ρ совпадают с α или β , поскольку должно выполняться условие $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, эти слагаемые будут содержать $B_\alpha \left[\begin{smallmatrix} p \pm 1 & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$, $\delta \tilde{l}_\alpha \left[\begin{smallmatrix} p \pm 1 & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$, $B_\beta \left[\begin{smallmatrix} p & k \pm 1 \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$, $\delta \tilde{l}_\beta \left[\begin{smallmatrix} p & k \pm 1 \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$.

Вычислим вклад тока проводимости в правую часть дискретного аналога уравнения индукции (6):

$$-\frac{c}{\sigma} \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,1} p (j_\gamma \delta l_\gamma) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]. \quad (12)$$

Подстановка $j_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$ из (11) в (12) дает:

$$\begin{aligned} & -\frac{c}{\sigma} \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,1} p (j_\gamma \delta l_\gamma) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] = \\ & = -\nu_m \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,1} p \delta l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \delta \tilde{S}_\gamma^{-1} \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \left(\sum_{\lambda, \rho=1}^3 \varepsilon_{\gamma\lambda\rho} \sum_{q=-1,1} q (B_\rho \delta \tilde{l}_\rho) \left[\begin{smallmatrix} q & p & k \\ \lambda & \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) = \\ & = -\sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p, q=-1,1} p q \left(\nu_m \delta l_\gamma \delta \tilde{S}_\gamma^{-1} \right) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \sum_{\lambda, \rho=1}^3 \varepsilon_{\gamma\lambda\rho} (B_\rho \delta \tilde{l}_\rho) \left[\begin{smallmatrix} q & p & k \\ \lambda & \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] = \\ & = -\sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p, q=-1,1} p q \left(\nu_m \delta l_\gamma \delta \tilde{S}_\gamma^{-1} \right) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \left\{ \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} (B_\beta \delta \tilde{l}_\beta) \left[\begin{smallmatrix} q & p & k \\ \alpha & \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] + \varepsilon_{\gamma\beta\alpha} (B_\alpha \delta \tilde{l}_\alpha) \left[\begin{smallmatrix} q & p & k \\ \beta & \alpha & \alpha \end{smallmatrix} \right] \right\} = \\ & = -\sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p, q=-1,1} p q \left(\nu_m \delta l_\gamma \delta \tilde{S}_\gamma^{-1} \right) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \left\{ \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} (B_\beta \delta \tilde{l}_\beta) \left[\begin{smallmatrix} p & k+q \\ \beta & \alpha & \alpha \end{smallmatrix} \right] + \varepsilon_{\gamma\beta\alpha} (B_\alpha \delta \tilde{l}_\alpha) \left[\begin{smallmatrix} p+q & k \\ \beta & \alpha & \alpha \end{smallmatrix} \right] \right\} = \\ & = \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \sum_{p, q=-1,1} p q \left(\nu_m \delta l_\gamma \delta \tilde{S}_\gamma^{-1} \right) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \left\{ (B_\alpha \delta \tilde{l}_\alpha) \left[\begin{smallmatrix} p+q & k \\ \beta & \alpha & \alpha \end{smallmatrix} \right] - (B_\beta \delta \tilde{l}_\beta) \left[\begin{smallmatrix} p & k+q \\ \beta & \alpha & \alpha \end{smallmatrix} \right] \right\}. \end{aligned}$$

$(\alpha \neq \beta \neq \gamma)$

Следовательно, вклад тока проводимости (12) можно записать в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned}
 -\frac{c}{\sigma} \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,1} p (j_\gamma \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \\
 = \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p, q=-1,1} pq \left(\nu_m \delta l_\gamma \delta \bar{S}_\gamma^{-1} \right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} (B_\alpha \delta \bar{l}_\alpha) \begin{bmatrix} p+q & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \\
 + \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p, q=-1,1} (-pq) \left(\nu_m \delta l_\gamma \delta \bar{S}_\gamma^{-1} \right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} (B_\beta \delta \bar{l}_\beta) \begin{bmatrix} p & k+q \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Введем коэффициенты диффузии, которые вычисляются в центрах рёбер $l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ контрольного объёма $D_{(i)}$:

$$d_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} := \left(\nu_m \delta l_\gamma \delta \bar{S}_\gamma^{-1} \right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma, p, k \in \{-1, 1\}), \quad (14)$$

и рассмотрим каждое слагаемое в выражении (13) по отдельности. Первое слагаемое в правой части (13) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p, q=-1,1} pq \left(\nu_m \delta l_\gamma \delta \bar{S}_\gamma^{-1} \right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} (B_\alpha \delta \bar{l}_\alpha) \begin{bmatrix} p+q & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \\
 = - \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p=-1,1} d_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} (B_\alpha \delta \bar{l}_\alpha) \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \\
 + \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p=-1,1} d_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} (B_\alpha \delta \bar{l}_\alpha) \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части (13) обозначим $\Omega_\alpha^j \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ и запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 \Omega_\alpha^j \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = - \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p, q=-1,1} pq \left(\nu_m \delta l_\gamma \delta \bar{S}_\gamma^{-1} \right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} (B_\beta \delta \bar{l}_\beta) \begin{bmatrix} p & k+q \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \\
 = - \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p=-1,1} pk \bar{d}_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} (B_\beta \delta \bar{l}_\beta) \begin{bmatrix} p & 2k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - \\
 - \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p=-1,1} p(-k) \bar{d}_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} (B_\beta \delta \bar{l}_\beta) \begin{bmatrix} p \\ \beta \end{bmatrix} = \\
 = k \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p=-1,1} p \bar{d}_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \left\{ (B_\beta \delta \bar{l}_\beta) \begin{bmatrix} p \\ \beta \end{bmatrix} - (B_\beta \delta \bar{l}_\beta) \begin{bmatrix} p & 2k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right\}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

$\Omega_\alpha^j \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$ содержит восемь сеточных значений компонент индукции магнитного поля: $B_\beta \left[\begin{smallmatrix} p \\ \beta \end{smallmatrix} \right]$, $B_\beta \left[\begin{smallmatrix} p & 2k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]$, ($\beta = 1, 2, 3$, $\beta \neq \alpha$, $p = \pm 1$). Таким образом, вклад тока проводимости в правую часть уравнения индукции (6) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{c}{\sigma} \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,1} p (j_\gamma \delta l_\gamma) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] &= \\ &= - \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p=-1,1} d_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] (B_\alpha \delta \tilde{l}_\alpha) \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] + \\ &+ \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p=-1,1} d_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] (B_\alpha \delta \tilde{l}_\alpha) \left[\begin{smallmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] + \Omega_\alpha^j \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Аппроксимация конвективной составляющей напряженности электрического поля с использованием схемы QUICK и метода отложенной коррекции

В данной работе для аппроксимации конвективных потоков в уравнении индукции использована противопоточная схема с квадратичной интерполяцией QUICK [23, 25] в комбинации с методом отложенной коррекции [23, 26] для улучшения устойчивости, скорости сходимости и устранения возможных нефизических осцилляций решения.

Учитывая, что $\tilde{E}_\gamma = -\frac{1}{c} \sum_{\tau, \rho=1}^3 \varepsilon_{\gamma\tau\rho} u_\tau B_\rho$, вычислим вклад \tilde{E} в правую часть уравнения (6):

$$\begin{aligned} -c \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,1} p \tilde{E}_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \delta l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] &= \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,1} p \sum_{\tau, \rho=1}^3 \varepsilon_{\gamma\tau\rho} (u_\tau B_\rho) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \delta l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] = \\ &= \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \sum_{p=-1,1} p \sum_{\tau, \rho=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\tau\rho} (u_\tau B_\rho \delta l_\gamma) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] = \\ &= \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \sum_{p=-1,1} p \left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} (u_\alpha B_\beta \delta l_\gamma) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta\alpha} (u_\beta B_\alpha \delta l_\gamma) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) = \\ &= - \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} p (u_\beta B_\alpha \delta l_\gamma) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right] + \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} p (u_\alpha B_\beta \delta l_\gamma) \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Схему QUICK для неравномерной сетки можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} F\Phi(x) &= F(\Theta(F)\Phi_b + \Theta(-F)\Phi_c) + \\ &+ F \{ \Theta(F) (k_a(\Phi_a - \Phi_b) + k_c(\Phi_c - \Phi_b)) + \Theta(-F) (k_b(\Phi_b - \Phi_c) + k_d(\Phi_d - \Phi_c)) \}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Theta(F) = \begin{cases} 0, & F < 0 \\ 1, & F \geq 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда. Сеточные значения зависимой переменной Φ в (19) вычисляются в точках $a < b < c < d$ и равны соответственно: $\Phi_a, \Phi_b, \Phi_c, \Phi_d$. Точка x , в которой аппроксимируется конвективный поток $F\Phi(x)$, лежит на отрезке $[b, c]$ координатной линии x_β . Коэффициенты в (19) вычисляются по формулам:

$$k_a = \frac{(x-b)(x-c)}{(b-a)(c-a)}, k_c = \frac{(x-b)(x-a)}{(c-b)(c-a)}, k_b = \frac{(x-c)(x-d)}{(c-b)(d-b)}, k_d = \frac{(x-c)(x-b)}{(d-c)(d-b)}. \quad (20)$$

Введем функцию:

$$f_Q^\beta(\Phi(x)) = \Theta(F)(k_a(\Phi_a - \Phi_b) + k_c(\Phi_c - \Phi_b)) + \Theta(-F)(k_b(\Phi_b - \Phi_c) + k_d(\Phi_d - \Phi_c)), \quad (21)$$

где верхний индекс указывает координатную линию, вдоль которой осуществляется аппроксимация. Тогда (19) запишется в виде:

$$F\Phi(x) = F(\Theta(F)\Phi_b + \Theta(-F)\Phi_c) + F f_Q^\beta(\Phi(x)). \quad (22)$$

Полагая в (21) и (22) $F = u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi(x) = B_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_a = B_\alpha \begin{bmatrix} p-3 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_b = B_\alpha \begin{bmatrix} p-1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_c = B_\alpha \begin{bmatrix} p+1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_d = B_\alpha \begin{bmatrix} p+3 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, получим следующую аппроксимацию потоков $(u_\beta B_\alpha) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ в (18):

$$(u_\beta B_\alpha) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \left(\Theta \left(u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} p-1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Theta \left(-u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} p+1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) + u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} f_Q^\beta \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right), \quad (23)$$

где

$$f_Q^\beta \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) = \Theta \left(u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \left(k_a \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p-3 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\alpha \begin{bmatrix} p-1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) + k_c \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p+1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\alpha \begin{bmatrix} p+3 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \right) + \Theta \left(-u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \left(k_b \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p-1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\alpha \begin{bmatrix} p+1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) + k_d \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p+3 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\alpha \begin{bmatrix} p+1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \right). \quad (24)$$

Коэффициенты k_a, k_b, k_c, k_d в (24) получаются по формулам (20) подстановками: $x = x_\beta \begin{bmatrix} p \\ \beta \end{bmatrix}$, $a = x_\beta \begin{bmatrix} p-3 \\ \beta \end{bmatrix}$, $b = x_\beta \begin{bmatrix} p-1 \\ \beta \end{bmatrix}$, $c = x_\beta \begin{bmatrix} p+1 \\ \beta \end{bmatrix}$, $d = x_\beta \begin{bmatrix} p+3 \\ \beta \end{bmatrix}$.

Таким образом, по схеме QUICK первое слагаемое в правой части (18) записывается в виде:

$$\begin{aligned} & - \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} p(u_\beta B_\alpha \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \left((u_\beta B_\alpha \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} -1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - (u_\beta B_\alpha \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) = \\ & = B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \left(\Theta \left(-u_\beta \begin{bmatrix} -1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} -1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - \Theta \left(u_\beta \begin{bmatrix} 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) + \\ & + \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \left(\Theta \left(u_\beta \begin{bmatrix} -1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} -1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} -2 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - \Theta \left(-u_\beta \begin{bmatrix} 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} 2 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) - \\ & - \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} p(u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} f_Q^\beta \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) = \\ & = - \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} p \Theta \left(p u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} p \Theta \left(p u_\beta \begin{bmatrix} -p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} -p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} -2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} (-p)(u_{\beta} \delta l_{\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} f_Q^{\beta} \left(B_{\alpha} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) = \\
& = - \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} p \Theta \left(p u_{\beta} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) (u_{\beta} \delta l_{\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_{\alpha} \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \\
& + \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} (-p) \Theta \left(-p u_{\beta} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) (u_{\beta} \delta l_{\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_{\alpha} \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \\
& + \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} (-p)(u_{\beta} \delta l_{\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} f_Q^{\beta} \left(B_{\alpha} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \\
& = - \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} p (\Theta(p F_{\beta\gamma}) F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_{\alpha} \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \\
& + \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} (-p) (\Theta(-p F_{\beta\gamma}) F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_{\alpha} \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \\
& + \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} (-p) F_{\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} f_Q^{\beta} \left(B_{\alpha} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right), \tag{25}
\end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$F_{\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = u_{\beta} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta l_{\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, (\alpha \neq \beta \neq \gamma, p \in \{-1, 1\}). \tag{26}$$

Согласно методу отложенной коррекции, в матрицу системы линейных уравнений, которые получаются в результате дискретизации по схеме QUICK, вносятся слагаемые, соответствующие аппроксимации по противопоточной схеме, а остальные слагаемые вносятся в источникный член дискретного аналога и рассчитываются по значениям зависимой переменной на предыдущей итерации. Преобразуем первое слагаемое в правой части (25) в соответствии с методом отложенной коррекции:

$$- \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} p (\Theta(p F_{\beta\gamma}) F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_{\alpha} \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} (-p) (\Theta(-pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \\
 &+ \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} (-p) (\Theta(-pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} - \\
 &- \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} p (\Theta(pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = \\
 &= - \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} (-p) (\Theta(-pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \\
 &+ \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} (-p) F_{\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Таким образом, (25) записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 &- \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} p(u_\beta B_\alpha \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \\
 &= - \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} (-p) (\Theta(-pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \\
 &+ \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} (-p) (\Theta(-pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha^Q \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}, \tag{28}
 \end{aligned}$$

и первые два слагаемых в правой части (28) соответствуют схеме вверх по потоку, а остальные слагаемые содержатся в $\Omega_\alpha^Q \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$, которое определяется по формуле:

$$\Omega_\alpha^Q \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} (-p) F_{\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \left(B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \hat{l}_Q^\beta \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \right). \tag{29}$$

Аналогично, полагая в (21) и (22): $F = u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi(x) = B_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_a = B_\beta \begin{bmatrix} p & k-3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_b = B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_c = B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_d = B_\beta \begin{bmatrix} p & k+3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, получим аппроксимацию потоков $(u_\alpha B_\beta) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ в (18):

$$(u_\alpha B_\beta) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \left(\Theta \left(u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Theta \left(-u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) + u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \hat{I}_Q^\alpha \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right), \quad (30)$$

где

$$\hat{I}_Q^\alpha \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) = \Theta \left(u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \left(k_a \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k-3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) + k_c \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \right) + \Theta \left(-u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \left(k_b \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) + k_d \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k+3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \right). \quad (31)$$

Коэффициенты k_a , k_b , k_c , k_d в (31) получаются по формулам (20) подстановками: $x = x_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$, $a = x_\alpha \begin{bmatrix} k-3 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $b = x_\alpha \begin{bmatrix} k-1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $c = x_\alpha \begin{bmatrix} k+1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $d = x_\alpha \begin{bmatrix} k+3 \\ \alpha \end{bmatrix}$.

Введем обозначение для второго слагаемого в правой части (18):

$$\Omega_\alpha^F \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} p (u_\alpha B_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Тогда с учетом (30) $\Omega_\alpha^F \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ аппроксимируется по формуле:

$$\Omega_\alpha^F \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} p F_{\alpha\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \left(\Theta \left(u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Theta \left(-u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \hat{I}_Q^\alpha \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \right). \quad (33)$$

Таким образом, аппроксимация вклада \tilde{E} в уравнение индукции (6) запишется в виде:

$$\begin{aligned} & -c \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1, 1} p \tilde{E}_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \\ & = - \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} (-p) (\Theta(-p F_{\beta\gamma}) F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} (-p) (\Theta(-p F_{\beta\gamma}) F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha^Q \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha^F \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (34) \end{aligned}$$

Окончательная форма записи дискретного аналога уравнения индукции

Запишем правую часть (6) с учетом (17) и (34):

$$-c \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1, 1} p E_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{c}{\sigma} \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,1} p (j_\gamma \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - c \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,1} p \tilde{E}_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \\
 &= - \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} \left(d_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta \tilde{l}_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} - p (\Theta(-pF_{\beta\gamma}) F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \\
 &+ \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p=-1,1} \left(d_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta \tilde{l}_\alpha \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - p (\Theta(-pF_{\beta\gamma}) F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \\
 &+ \Omega_\alpha^j \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha^Q \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha^F \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{35}
 \end{aligned}$$

Определим коэффициенты при B_α и источниковый член $\Omega_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ для дискретного аналога уравнения индукции (6) по формулам:

$$a_{\alpha\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} := d_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta \tilde{l}_\alpha \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - p (\Theta(-pF_{\beta\gamma}) F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma, p, k \in \{-1, 1\}), \tag{36}$$

$$a_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} a_{\alpha\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \tag{37}$$

$$\Omega_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = \Omega_\alpha^j \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha^Q \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha^F \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} - \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} \left(d_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \left\{ \delta \tilde{l}_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} - \delta \tilde{l}_\alpha \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right\} - p (\Theta(-pF_{\beta\gamma}) F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Тогда дискретный аналог уравнения индукции (6) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\delta t} \left(B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} - B_\alpha^0 \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} \right) \delta S_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = -a_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \\
 &+ \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p=-1,1} a_{\alpha\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, k \in \{-1, 1\}). \tag{39}
 \end{aligned}$$

Уравнение (39) содержит 25 сеточных значений компонент индукции магнитного поля: 9 сеточных значений $B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}, B_\alpha \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, B_\alpha \begin{bmatrix} 4p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ ($\beta = 1, 2, 3, \beta \neq \alpha, p = \pm 1$) и 16 сеточных значений $B_\beta \begin{bmatrix} p & k-3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, B_\beta \begin{bmatrix} p & k+3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ ($\beta = 1, 2, 3, \beta \neq \alpha, p = \pm 1$). Сеточные значения компонент вектора индукции, входящие в источниковый член $\Omega_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ согласно методу отложенной коррекции, берутся с предыдущей итерации.

Заключение

Представлена разработанная в рамках метода контрольного объема численная схема дискретизации уравнения индукции магнитного поля в модели неидеальной магнитной гидродинамики. Для дискретизации уравнения индукции использован алгоритм ограниченного переноса, обеспечивающий

соленоидальность численного решения. Конвективные потоки в уравнении индукции аппроксимированы по схеме QUICK в комбинации с методом отложенной коррекции, что дает второй порядок аппроксимации по пространственным переменным на равномерной сетке. Предложенная в статье численная схема реализована для сферических координат в разрабатываемом авторами МГД-коде для математического моделирования геодинамо. Программный код разработан с использованием технологии CUDA, набора расширений к языку программирования Фортран (CUDA Fortran) и адаптирован для гибридных вычислительных систем с графическими процессорами. Результаты тестов разработанного кода [27] демонстрируют достаточно точное соответствие эталонным решениям задачи моделирования геодинамо с вакуумными и псевдовакuumными граничными условиями [2–4], полученным с помощью спектральных и псевдоспектральных методов. В частности, отклонение от эталонных значений средней кинетической и магнитной энергии составляет менее одного процента на расчетных сетках, содержащих 980000 контрольных объемов в сферическом слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Glatzmaier G. A., Roberts P. H. A Three-Dimensional Self-Consistent Computer Simulation of a Geomagnetic Field Reversal. *Nature*. 1995;377:203–209. DOI: 10.1038/377203a0.
2. Christensen U. R., Aubert J., Cardin P., Dormy E., Gibbons S., Glatzmaier G. A., Grote E., Honkura Y., Jones C., Kono M., Matsushima M., Sakuraba A., Takahashi F., Tilgner A., Wicht J., Zhang K. A Numerical Dynamo Benchmark. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2001;128:25–34. DOI: 10.1016/S0031-9201(01)00275-8.
3. Jackson A., Sheyko A., Marti P., Tilgner A., Cebbron D., Vantieghem S., Simitev R., Busse F., Zhan X., Schubert G., Takehiro S., Sasaki Y., Hayashi Y.-Y., Ribeiro A., Nore C., Guermond J.-L. A Spherical Shell Numerical Dynamo Benchmark with Pseudo-Vacuum Magnetic Boundary Conditions. *Geophysical Journal International*. 2014;196(2):712–723. DOI: 10.1093/gji/ggt425.
4. Matsui H., Heien E., Aubert J., Aurnou J. M., Avery M., Brown B., Buffett B. A., Busse F., Christensen U. R., Davies C. J., Featherstone N., Gastine T., Glatzmaier G. A., Gubbins D., Guermond J.-L., Hayashi Y.-Y., Hollerbach R., Hwang L. J., Jackson A., Jones C. A., Jiang W., Kellogg L. H., Kuang W., Landeau M., Marti P., Olson P., Ribeiro A., Sasaki Y., Schaeffer N., Simitev R. D., Sheyko A., Silva L., Stanley S., Takahashi F., Takehiro S.-I., Wicht J., Willis A. P. Performance Benchmarks for a Next Generation Numerical Dynamo Model. *Geochem. Geophys. Geosyst.* 2016;17(5):1586–1607. DOI: 10.1002/2015GC006159.
5. Reshetnyak M. Yu. *Simulation in Geodynamo*. Saarbrücken: Lambert Academic Publ.; 2013. 180 p.
6. Olson P. L., Glatzmaier G. A., Coe R. S. Complex Polarity Reversals in a Geodynamo Model. *Earth Planet. Sci. Lett.* 2011;304:168–179. DOI: 10.1016/j.epsl.2011.01.031.
7. Olson P., Driscoll P., Amit H. Dipole Collapse and Reversal Precursors in a Numerical Dynamo. *Phys. Earth. Planet. Inter.* 2009;173:121–140. DOI: 10.1016/j.pepi.2008.11.010.
8. Jones C. A. Convection-Driven Geodynamo Models. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 2000;358:873–897. DOI: 10.1098/rsta.2000.0565.
9. Vantieghem S., Sheyko A., Jackson A. Applications of a Finite-Volume Algorithm for Incompressible MHD Problems. *Geophysical Journal International*. 2016;204(2):1376–1395. DOI: 10.1093/gji/ggv527.
10. Matsui H., Okuda H. Development of a Simulation Code for MHD Dynamo Processes Using the GeoFEM Platform. *Int. J. Comput. Fluid Dyn.* 2004;18(4):323–332. DOI: 10.1080/1061856031000154784.
11. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2001. 608 с.
12. Бетелин В. Б., Галкин В. А., Гореликов А. В. Алгоритм типа предиктор-корректор для численного решения уравнения индукции в задачах магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. *Доклады Академии наук*. 2015;464(5):525–528. DOI: 10.7868/S0869565215290034.
13. Toth G. The Div $b=0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes. *J. Comput. Phys.* 2000;161:605–652. DOI: 10.1006/jcph.2000.6519.
14. Harder H., Hansen U. A Finite-Volume Solution Method for Thermal Convection and Dynamo Problems in Spherical Shells. *Geophysical Journal International*. 2005;161(2):522–532. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2005.02560.x.

15. Chan K. H., Zhang K., Li L., Liao X. A New Generation of Convection-Driven Spherical Dynamos Using EBE Finite Element Method. *Phys. Earth Planet. Int.* 2007;163(14):251–265. DOI: 10.1016/j.pepi.2007.04.017.
16. Guermond J.-L., Laguerre R., Léorat J., Nore C. An Interior Penalty Galerkin Method for the MHD Equations in Heterogeneous Domains. *J. Comput. Phys.* 2007;221(1):349–369. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.06.045.
17. Powell K. G., Roe P. L., Linde T. J., Gombosi T. I., De Zeeuw D. L. A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics.* 1999;154(2):284–309. DOI: 10.1006/jcph.1999.6299.
18. Iskakov A. B., Descombes S., Dormy E. An Integro-Differential Formulation for Magnetic Induction in Bounded Domains: Boundary Element-Finite Volume Method. *J. Comput. Phys.* 2004;197(2):540–554. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.12.008.
19. Teyssier R., Commerçon B. Numerical Methods for Simulating Star Formation. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences.* 2019;6:1–35. DOI: 10.3389/fspas.2019.00051.
20. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Исследование установившихся режимов естественной конвекции во вращающемся сферическом слое. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2016;1:48–59.
21. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Численное решение начально-краевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля в шаре. *Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика.* 2020;64:15–30. DOI: 10.17223/19988621/64/2.
22. Patankar S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* Washington DC: Hemisphere Publishing; 1980. 197 p.
23. Versteeg H. K., Malalasekera W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics.* Harlow: Pearson Education Limited; 2007. 503 p.
24. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. *Магнитная гидродинамика.* М.: Логос; 2011. 324 с.
25. Leonard B. P. A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1979;19(1):59–98. DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3.
26. Hayase T., Humphrey J. A. C., Greif R. A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures. *Journal of Computational Physics.* 1992;98(1):108–118. DOI: 10.1016/0021-9991(92)90177-Z.
27. Бычин И. В. Тестирование магнитогидродинамического кода на задачах естественной конвекции и геодинамо. *Успехи кибернетики.* 2021;2(1):6–13. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-1-1.

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-9

ДЕЛИТЕЛЬ $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$ Г. Е. Деев^a, С. В. Ермаков^b, Н. А. Король^c*Обнинский институт атомной энергетики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Обнинск, Российская Федерация,*^a georgdeo@mail.ru, ^b ermakov@iate.obninsk.ru, ^c riksking@mail.ru

Аннотация: рассмотрен абстрактный автомат, осуществляющий деление на $13_{(4)}$ в четверичной системе счисления. Автомат является типичным представителем семейства делителей, отличающихся отсутствием общих характерных признаков. Вследствие чего почти каждый делитель является источником оригинальных особенностей. Примером такого делителя является предлагаемый для рассмотрения делитель. Некоторые его особенности представляют необычные и неочевидные вычислительные объекты, подлежащие исследованию. Все делители семейства реализуемы в В-технологии.

Ключевые слова: числоид, метод накопления состояний, финальные состояния, нормальное и инверсное представление чисел, экстравертность по состояниям, производное состояние.

Благодарности: работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-07-00862.

Для цитирования: Деев Г. Е., Ермаков С. В., Король Н. А. Делитель $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):74–85. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-9.

 $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$ DIVISORG. E. Deev^a, S. V. Ermakov^b, N. A. Korol^c*Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering, National Research Nuclear University MEPhI, Obninsk, Russian Federation*^a georgdeo@mail.ru, ^b ermakov@iate.obninsk.ru, ^c riksking@mail.ru

Abstract: we consider an abstract automaton that divides by $13_{(4)}$ in the quadratic numbering system. The automaton is typical for a family of divisors having no common features. As a consequence, almost every divisor is a source of original features. An example of such a divisor is presented. Some of its features are unusual and non-obvious computational objects to be investigated. All the divisors of the family can be implemented with the B-technology.

Keywords: numberoid, state accumulation method, final states, normal and inverse representation of numbers, extroversion by states, derived state.

Acknowledgements: this study is supported by the RFBR grant 20-07-00862.

Cite this article: Deev G. E., Ermakov S. V., Korol N. A. $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$ Divisor. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):74–85. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-9.

Предисловие

В семействе умножителей на целую константу имеют место четко выраженная структурированность и множество закономерностей, находящих себе применение при их синтезе. В отличие от умножителей делители на целую константу не обладают такими особенностями. Делители обладают оригинальными особенностями, сильно разнятся друг от друга даже для соседних значений делимого. Несмотря на отсутствие видимого родства между делителями, в их семействе все же имеется нечто общее, и этим общим является метод синтеза делителей. Единый подход к синтезу устройств позволяет единообразно решать каждую новую задачу по нахождению нового делителя. Таким образом, метод синтеза делителей общий, а результаты разные, причем различие носит труднопредсказуемый характер. Зафиксируем далее внимание на делителе $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$. Обнаружим то новое, что с ним связано. Окажется, что это новое носит как понятийный, так и объектный характер.

Синтез делителя

Последовательность действий при синтезе делителя $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$ такова.

1. Обращаемся к умножителю на $13_{(3)}$, обозначаемому $13 \cdot \bar{x}|\bar{q}$. Его построение происходит на основе алгоритма, использующего закономерности, присущие семейству умножителей [1].

2. С его помощью находится числоид, представляющий рациональное число 13^{-1} , — мультипликативный делитель.

3. Отправляясь от нулевого столбца, методом накопления состояний [1], находим делитель $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$.

После этого изучаем особенности делителя.

Поясним встретившиеся здесь термины.

Числоид – это цифровой объект, представляющий числа на разрядной сетке. Зависимость представления от сетки весьма существенная. Например, на сетке $Gr_{(\infty,0)}^0$, первоначально предназначавшейся для представления натуральных чисел, оказалось возможным представлять числоидами все действительные числа. Так, число (-1) представляется числоидом $\overleftarrow{3} = \dots 333$, тройкой, проставленной на все места разрядной сетки. То же число на сетке $Gr_{(\infty,-1)}^0$, содержащей в себе дополнительный разряд (-1), будет представлено иначе. Число – это единственная идея, в то время как числоидов, представляющих число, бесконечно много. Вычислительные устройства ведут вычисления с числоидами.

Метод накопления состояний пояснен на примере изучаемого устройства $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$.

Умножитель $13 \cdot \bar{x}|\bar{q}$ берем в готовом виде из [1], таблица 7.15. Мы слегка изменим эту таблицу, оставив в ней только необходимое для наших целей.

Таблица 1

$$\text{Автомат } \overleftarrow{0} 13 \cdot \bar{x}|\bar{q}, \bar{q} \in Q = \{\overleftarrow{0}, \overleftarrow{0}1, \overleftarrow{0}2, \dots, \overleftarrow{0}12\}$$

q \ x	$\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{0}1$	$\overleftarrow{0}2$	$\overleftarrow{0}3$	$\overleftarrow{0}10$	$\overleftarrow{0}11$	$\overleftarrow{0}12$
$\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{0}, \overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{0}, 1$	$\overleftarrow{0}, 2$	$\overleftarrow{0}, 3$	$\overleftarrow{0}1, 0$	$\overleftarrow{0}1, 1$	$\overleftarrow{0}1, 2$
$\overleftarrow{1}$	$\overleftarrow{0}1, 3$	$\overleftarrow{0}2, 0$	$\overleftarrow{0}2, 1$	$\overleftarrow{0}2, 2$	$\overleftarrow{0}2, 3$	$\overleftarrow{0}3, 0$	$\overleftarrow{0}3, 1$
$\overleftarrow{2}$	$\overleftarrow{0}3, 2$	$\overleftarrow{0}3, 3$	$\overleftarrow{0}10, 0$	$\overleftarrow{0}10, 1$	$\overleftarrow{0}10, 2$	$\overleftarrow{0}10, 3$	$\overleftarrow{0}11, 0$
$\overleftarrow{3}$	$\overleftarrow{0}11, 1$	$\overleftarrow{0}11, 2$	$\overleftarrow{0}11, 3$	$\overleftarrow{0}12, 0$	$\overleftarrow{0}12, 1$	$\overleftarrow{0}12, 2$	$\overleftarrow{0}12, 3$

Штриховкой выделены клетки с финальными состояниями, попадая в которые под действием соответствующего сигнала, автомат из них никогда не выходит. Символом $\overleftarrow{0}$ обозначена запись $\overleftarrow{0} = \dots 000$. Аналогично понимаются другие записи со стрелками.

Числоид, представляющий число 13^{-1} , ищем вначале на сетке $Gr_{(\infty,0)}^0 \equiv \dots \overleftarrow{3} \overleftarrow{2} \overleftarrow{1} \overleftarrow{0}$. Если окажется, что на этой сетке его не существует, то будем искать его на другой сетке. Выясняется, однако, что нет необходимости искать его на других сетках, он находится на ней и записывается в виде: $13^{-1} = \overleftarrow{2}313$. Описанием поиска заниматься не будем ([1], гл. 8), однако проверим, что это так. Для этого пропустим найденный числоид через умножитель на 13. За вычислением умножителя следим с помощью развертки:

...	6	5	4	3	2	1	0	t
...	2	3	1	2	3	1	3	x
...	$\overleftarrow{0}12$	$\overleftarrow{0}3$	$\overleftarrow{0}11$	$\overleftarrow{0}12$	$\overleftarrow{0}3$	$\overleftarrow{0}11$	$\overleftarrow{0}$	q
...	0	0	0	0	0	0	1	y

Вычисления ведутся на сетке $Gr_{(\infty,0)}^0$. Результат вычисления записывается в виде равенства: $13 \cdot \overleftarrow{2}313|\overleftarrow{0} = \overleftarrow{0}1$, подтверждающего представление $13^{-1} = \overleftarrow{2}313$.

Переходим к построению таблицы делителя. Используется метод накопления состояний. Начинаем с нулевого столбца. Нулевой столбец вычисляется по формулам:

$$\overleftarrow{0}, x \rightarrow \rangle n^{-1} \cdot x \langle, \langle n^{-1} \cdot x \rangle = \rangle \overleftarrow{2}313 \cdot x \langle, \langle \overleftarrow{2}313 \cdot x \rangle, \tag{1}$$

где угловыми скобками обозначены функции отрыва:

$$\rangle \bar{n} = \overleftarrow{p} n_r \dots n_1 n_0 \langle = \overleftarrow{p} n_r \dots n_1, \langle \bar{n} = \overleftarrow{p} n_r \dots n_1 n_0 \rangle = n_0, \bar{p} = \overleftarrow{p_s \dots p_1 p_0} - \text{период.}$$

Как видно, в используемых функциях отрыва отрыв происходит по разряду единиц и соответственно этому отрыву осуществляется построение нашего делителя; но можно использовать другие варианты функций отрыва и изучать другие делители, соответствующие этим вариантам. Здесь мы этим не занимаемся.

Нулевой столбец:

	q	$\overleftarrow{0}$
x		
$\overleftarrow{0}$		$\overleftarrow{0}, \overleftarrow{0}$
$\overleftarrow{1}$		$\overleftarrow{2}31,3$
$\overleftarrow{2}$		$\overleftarrow{1}23,2$
$\overleftarrow{3}$		$\overleftarrow{0}21,1$

Появились новые состояния, $\overleftarrow{2}31$, $\overleftarrow{1}23$, $\overleftarrow{0}21$. Эти состояния являются числоидами, представляющими отрицательные числа. Поэтому, нумеруя ими столбцы будущей таблицы, помещаем их слева от нуля.

	q	$\overleftarrow{0}21$	$\overleftarrow{1}23$	$\overleftarrow{2}31$	$\overleftarrow{0}$
x					
$\overleftarrow{0}$		$\overleftarrow{1}02,1$	$\overleftarrow{3}12,3$	$\overleftarrow{1}23,1$	$\overleftarrow{0}, \overleftarrow{0}$
$\overleftarrow{1}$		$\overleftarrow{0},0$	$\overleftarrow{2}10,2$	$\overleftarrow{0}21,0$	$\overleftarrow{2}31,3$
$\overleftarrow{2}$		$\overleftarrow{2}31,3$	$\overleftarrow{1}02,1$	$\overleftarrow{3}12,3$	$\overleftarrow{1}23,2$
$\overleftarrow{3}$		$\overleftarrow{1}23,2$	$\overleftarrow{0},0$	$\overleftarrow{2}10,2$	$\overleftarrow{0}21,1$

По формулам [1, с. 112] описывающим переходы-выходы в автомате:

$$\bar{q}, x \rightarrow \rangle n^{-1} \cdot x + \bar{q} \langle, \langle n^{-1} \cdot x + \bar{q} \rangle = \rangle \overleftarrow{2}313 \cdot x + \bar{q} \langle, \langle \overleftarrow{2}313 \cdot x + \bar{q} \rangle, \quad (2)$$

заполняем столбцы. После заполнения появились новые состояния: $\overleftarrow{3}12$, $\overleftarrow{2}10$, $\overleftarrow{1}02$, которыми нумеруются новые столбцы, и по формулам (2) происходит их заполнение, см. табл. 2.

Таблица 2

Автомат $13^{-1} \cdot \bar{x} | \bar{q}$

	q	$\overleftarrow{1}02$	$\overleftarrow{2}10$	$\overleftarrow{3}12$	$\overleftarrow{0}21$	$\overleftarrow{1}23$	$\overleftarrow{2}31$	$\overleftarrow{0}$
x								
$\overleftarrow{0}$		$\overleftarrow{2}10,2$	$\overleftarrow{0}21,0$	$\overleftarrow{2}31,2$	$\overleftarrow{1}02,1$	$\overleftarrow{3}12,3$	$\overleftarrow{1}23,1$	$\overleftarrow{0}, \overleftarrow{0}$
$\overleftarrow{1}$		$\overleftarrow{1}02,1$	$\overleftarrow{3}12,3$	$\overleftarrow{1}23,1$	$\overleftarrow{0},0$	$\overleftarrow{2}10,2$	$\overleftarrow{0}21,0$	$\overleftarrow{2}31,3$
$\overleftarrow{2}$		$\overleftarrow{0},0$	$\overleftarrow{2}10,2$	$\overleftarrow{0}21,0$	$\overleftarrow{2}31,3$	$\overleftarrow{1}02,1$	$\overleftarrow{3}12,3$	$\overleftarrow{1}23,2$
$\overleftarrow{3}$		$\overleftarrow{2}31,3$	$\overleftarrow{1}02,1$	$\overleftarrow{3}12,3$	$\overleftarrow{1}23,2$	$\overleftarrow{0},0$	$\overleftarrow{2}10,2$	$\overleftarrow{0}21,1$

Новых состояний не получилось, и потому построение таблицы на этом заканчивается. Все вычисления, приводящие к таблице 2, приводить не будем. Ограничимся одним типовым вычислением.

Рассмотрим, например, клетку таблицы, расположенную в столбце, отмеченном состоянием $\bar{q} = \overleftarrow{231}$, и в строке, отмеченной сигналом $x = 2$. Имеем:

$$\begin{aligned} \bar{q}, x = \overleftarrow{231}, 2 &\rightarrow \langle n^{-1} \cdot x + \bar{q} \rangle, \langle n^{-1} \cdot x + \bar{q} \rangle = \langle \overleftarrow{2313} \cdot x + \bar{q} \rangle, \langle \overleftarrow{2313} \cdot x + \bar{q} \rangle = \\ &= \langle \overleftarrow{2313} \cdot 2 + \overleftarrow{231} \rangle, \langle \overleftarrow{2313} \cdot 2 + \overleftarrow{231} \rangle = \langle \overleftarrow{1232} + \overleftarrow{231} \rangle, \langle \overleftarrow{1232} + \overleftarrow{231} \rangle = \\ &= \langle \overleftarrow{3123} \rangle, \langle \overleftarrow{3123} \rangle = \overleftarrow{312}, 3. \end{aligned}$$

Таким образом, этой клеткой описывается переход автомата: $\overleftarrow{231}, 2 \rightarrow \overleftarrow{312}, 3$. Аналогично ведется вычисления при заполнении других клеток таблицы.

Заполнение нулевого столбца, т.е. столбца, отмеченного состоянием $\bar{q} = \overleftarrow{0}$, происходит по формулам (1), являющимся частным случаем формул (2). Переходы типа (2) встречаются и для умножителей. Тем самым подтверждается утверждение [1] о том, что такого сорта переходы носят универсальный характер и применимы как к умножителям, так и к делителям.

Обратим внимание на то, что состояния делителя представлены бесконечно местными числоидами, имеющими период из трех цифр. Состояния автомата можно представлять по-разному, функционирование его от этого не изменится. Человеческий фактор часто включает в процедуру использования вычислительных устройств приемы, основанные на соображениях удобства, и использует упомянутое обстоятельство. Но при теоретическом изучении важно, чтобы представление было «естественным», генетически возникающим из процедуры синтеза, которая сама по себе не допускает произвольного представления состояний по той причине, что формулы, применяемые при исследовании, перестают работать. При использовании естественных обозначений часто оказывается возможным обнаруживать закономерности, присущие всему семейству устройств. Поэтому громоздкость обозначений для состояний не является основанием для отказа от их использования, хотя переход к более простым обозначениям для состояний в некоторых случаях вполне возможен и в целях экономии может приветствоваться. Более того, при реализации устройств в «железе» отказ от естественности неизбежен.

Состояния автомата имеют довольно громоздкие обозначения. Приведем вариант упрощенных обозначений. Пусть: $\overleftarrow{231} \stackrel{об}{=} 1$, $\overleftarrow{123} \stackrel{об}{=} 2$, $\overleftarrow{021} \stackrel{об}{=} 3$, $\overleftarrow{312} \stackrel{об}{=} 4$, $\overleftarrow{210} \stackrel{об}{=} 5$, $\overleftarrow{102} \stackrel{об}{=} 6$. Тогда таблица автомата примет вид:

Таблица 3

Автомат $13^{-1} \cdot \bar{x} | \bar{q}$

q \ x	6	5	4	3	2	1	0
$\overleftarrow{0}$	5,2	3,0	1,2	6,1	4,3	2,1	0, $\overleftarrow{0}$
$\overleftarrow{1}$	6, $\overleftarrow{1}$	4,3	2,1	0,0	5,2	3,0	1,3
$\overleftarrow{2}$	0,0	5, $\overleftarrow{2}$	3,0	1,3	6,1	4,3	2,2
$\overleftarrow{3}$	1,3	6,1	4, $\overleftarrow{3}$	2,2	0,0	5,2	3,1

Примеры вычислений синтезированным автоматом

Пример 1. Пусть $\bar{x} = \overleftarrow{0} 320_{(4)} = 13 \cdot 20_{(4)} = 7 \cdot 8_{(10)} = 56_{(10)}$ делится на $13_{(4)} = 7_{(10)}$. Развертка:

4	3	2	1	0		t
	$\overleftarrow{0}$	3	2	0		x
0	0	2	0	0		q
	$\overleftarrow{0}$	0	2	0		y

Пишем результат: $13^{-1} \cdot \overleftarrow{0} 320 | \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0} 20$; он соответствует условию: $13 \cdot \overleftarrow{0} 20 | \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0} 320$.

Пример 2. Пусть $\bar{x} = \overleftarrow{0} 321_{(4)} = 13 \cdot 20 + 1_{(4)} = 7 \cdot 8 + 1_{(10)} = 57_{(10)}$ не делится на 13. Развертка:

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		t
...	0	0	0	0	0	0	3	2	1		x
4	2	1	4	2	1	4	4	1	0		q
...	3	1	2	3	1	2	3	3	3		y

Пишем результат: $13^{-1} \cdot \overleftarrow{0} 321 | 0 = \overleftarrow{1} \overleftarrow{2} \overleftarrow{3} \overleftarrow{3} \overleftarrow{3} = \overleftarrow{3} \overleftarrow{1} \overleftarrow{2} \overleftarrow{3} \overleftarrow{3} \overleftarrow{3} = \overleftarrow{2} \overleftarrow{3} \overleftarrow{1} \overleftarrow{2} \overleftarrow{3} \overleftarrow{3} \overleftarrow{3}$.

Обращаем внимание на то, что этот результат является результатом *нормального* деления, т.е. деления, когда на вход устройства информация о числах поступает от младших разрядов к старшим. Этот вид деления отличается от того, к которому мы привыкли и в котором деление происходит от старших разрядов к младшим. Видно, что результат написан в трех различных формах. В каждой из них имеется период, идущий в бесконечность. Период состоит из трех цифр. Поэтому возможны три варианта записи периода и три варианта записи числоида-результата. Таким образом, одно и то же число может быть представлено числоидами, имеющими различные формы. Цифра под периодом указывает на разряд, начиная с которого пишется период. Подтвердим правильность результата. Как это часто бывает при работе с бесконечностями, необходимо использовать приемы, созданные Эйлером. Имеем:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{1} \overleftarrow{2} \overleftarrow{3} \overleftarrow{3} \overleftarrow{3} &= 3 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot (10^2 + 10^{11} + 10^{20} + \dots) + 2 \cdot (10^3 + 10^{12} + 10^{21} + \dots) + \\ &+ 1 \cdot (10^{10} + 10^{13} + 10^{22} + \dots) = 33 + 123 \cdot 10^2 \cdot (10^0 + 10^3 + 10^{12} + \dots) = \\ &= 33 + 123 \cdot 10^2 \cdot \frac{10^{3 \cdot \infty} - 1}{10^3 - 1} \Big|_{Ax_0} = 33 + 123 \cdot 10^2 \cdot \frac{-1}{10^3 - 1} = \frac{32301 - 12300}{333} = \\ &= \frac{20001}{333} = \frac{2223 \cdot 3}{111 \cdot 3} = \frac{2223}{111} = 2 \underset{0}{0} 0 \underset{0}{2} 1 \underset{0}{0} 2 \underset{0}{1} 0 \dots = 2 \underset{0}{0} 0 \underset{0}{2} \overleftarrow{1} \overleftarrow{2} \overleftarrow{1} 0 = 2 \underset{0}{0} + 13^{-1}. \end{aligned}$$

При вычислениях мы, следуя Эйлеру, отбросили слагаемое, содержащее $10^{3 \cdot \infty}$, как находящееся на другой числовой оси, на оси Ax_3 , на которой все числа имеют весовой множитель $10^{3 \cdot \infty}$, в то время как нам доступно для использования только то, что находится на «нашей» числовой оси, на оси Ax_0 с весовым множителем 10^0 .

Результат правилен, поскольку добавок $13^{-1} = 0 \underset{0}{0} \overleftarrow{2} \overleftarrow{1} 0$. Это представление можно получить как результат деления «столбиком», т.е. как результат деления от старших разрядов к младшим, как результат «инверсного» деления. Нормальное деление, отличающееся от инверсного деления, выполняет делитель $13^{-1} \cdot \bar{x} | \bar{q}$, заданный таблицами 2 и 3, ведущий деление от младших разрядов к старшим. Попутно мы получаем второе, инверсное, числоидное представление для числа 13^{-1} . Зафиксируем эти результаты в виде таблицы 4.

Таблица 4

Представления числа 13^{-1}

Нормальное	Инверсное
$13^{-1} = \overleftarrow{2} \overleftarrow{3} \overleftarrow{1} \overleftarrow{3} \overleftarrow{3}$	$13^{-1} = 0 \underset{0}{0} \overleftarrow{2} \overleftarrow{1} 0$

В нормальном представлении период $\overleftarrow{2} \overleftarrow{3} \overleftarrow{1}$ идет в $+\infty$ по местам разрядной сетки $Gr_{(\infty, 0]}^0$, а в инверсном представлении период $\overleftarrow{2} \overleftarrow{1} 0$ идет по разрядной сетке $Gr_{[0, -\infty)}^0$ из $-\infty$ до места с номером (-2) .

Увеличим число \bar{x} из предыдущего примера на единицу и посмотрим, каков результат вычисления делителем в этом случае.

Пример 3. Пусть $\bar{x} = \overleftarrow{0} 322_{(4)} = 13 \cdot 20 + 2_{(4)} = 7 \cdot 8 + 2_{(10)} = 58_{(10)}$ не делится на 13. Развертка:

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	t
...	0	0	0	0	0	0	3	2	2	x
1	4	2	1	4	2	1	6	2	0	q
	2	3	1	2	3	1	3	1	2	y

Пишем результат: $13^{-1} \cdot \overleftarrow{0}322|0 = \overleftarrow{2}3\overleftarrow{1}312 = \overleftarrow{1}2\overleftarrow{3}1312 = \overleftarrow{3}1\overleftarrow{2}31312$.

Опять результат-числоид записан в трех разных формах. Числоид-результат, будучи записан в развернутом виде на сетке $Gr_{(\infty,0)}^0$, имеет вид: $\overleftarrow{y} = \dots 231231231312$, из которого извлекаются все формы записи. Проверим результат по Эйлеру (без подробностей):

$$\overleftarrow{1}2\overleftarrow{3}1312 = 1312 + 123 \cdot 10^4 \cdot \frac{-1}{10^3 - 1} = \frac{20022}{333} = \frac{2232 \cdot 3}{111 \cdot 3} = \frac{2232}{111} = 2\overleftarrow{0}\overleftarrow{1}02 = 2\overleftarrow{0} + 2 \cdot 13^{-1}.$$

Видно, что $2 \cdot 13^{-1} = \overleftarrow{0}\overleftarrow{1}02$ — представление, имеющее место на сетке $Gr_{[0,-\infty)}^0$. Его можно получить также делением «столбиком».

Экстравертность автомата по состояниям

Рассмотрим вопрос об экстравертности автомата по состояниям. Формулы (2), определяющие переходы в автомате, продолжают функционировать и в том случае, когда в роли состояний берутся произвольные числоиды. Этот факт означает существование бесконечного автомата, имеющего в своей основе автомат, заданный таблицей 2. Этот автомат был первоначальным целевым объектом, определяемым уравнениями (2), назначение которого делить на $13_{(4)}$. Это минимальный автомат, выполняющий деление на $13_{(4)}$. Все остальное, получающееся на основе уравнений (2), должно рассматриваться как результат экстравертирования по различным параметрам, и, в частности, по состояниям. В последнем случае приходим к упомянутому бесконечному автомату. Числоиды на сетке $Gr_{(\infty,0)}^0$ представляют все действительные числа. Некоторые из них представляют числа, делящиеся на $13_{(4)}$, остальные — нет. Априорно ясно, что числоиды, представляющие числа, не делящиеся на $13_{(4)}$, могут привести к непреодолимым сложностям. Поэтому рассмотрим пример экстравертирования по состояниям, представленным числоидами, делящимися на $13_{(4)}$. Пусть в качестве «затравочного» начального состояния создаваемого автомата, являющегося фрагментом бесконечного автомата, берется числоид $\overleftarrow{q} = \overleftarrow{0}211 = 3 \cdot 13^{-1} = 3 \cdot \overleftarrow{2}313$. Этот числоид не входит в ядро автомата 2, которое для удобства приведем здесь, сняв «шапку» с этого автомата:

Ядро:	$\overleftarrow{1}02$	$\overleftarrow{2}10$	$\overleftarrow{3}12$	$\overleftarrow{0}21$	$\overleftarrow{1}23$	$\overleftarrow{2}31$	$\overleftarrow{0}$
-------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---------------------

Видно, что в ядре нет состояния $\overleftarrow{q} = \overleftarrow{0}211$. Тем не менее проведем вычисление из этого состояния, взятого как начальное.

Пример 4. Пусть $\overleftarrow{x} = \overleftarrow{0}320_{(4)} = 13 \cdot 20_{(4)} = 7 \cdot 8_{(10)} = 56_{(10)}$ делится на 13. Не выписывая бесконечный автомат с состояниями, кратными 13^{-1} , приведем только развертку его вычислительной работы. Поскольку таблицы бесконечного автомата у нас перед глазами нет, приходится для заполнения развертки вычислять его переходы-выходы. Это делается по формулам схемы (2), начальная из которых имеет вид: $\overleftarrow{0}211, x \rightarrow \overleftarrow{2}313 \cdot x + \overleftarrow{0}211, (\overleftarrow{2}313 \cdot x + \overleftarrow{0}211)$.

Получается развертка:

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	t
...	0	0	0	0	0	0	3	2	0	x
...	$\overleftarrow{1}02$	$\overleftarrow{0}21$	$\overleftarrow{2}10$	$\overleftarrow{1}02$	$\overleftarrow{0}21$	$\overleftarrow{2}10$	$\overleftarrow{2}31$	$\overleftarrow{0}21$	$\overleftarrow{0}211$	q
...	1	0	2	1	0	2	3	1	1	y

Как выясняется, уже при $t = 1$ происходит попадание в ядро автомата и потому нет необходимости вести вычисления переходов-выходов по формулам (2); с этого момента можно пользоваться таблицей 2. Кроме того, видно, что, начиная с момента $t = 3$, формируется трехместный период, и мы можем записать результат:

$$13^{-1} \cdot \overleftarrow{0} \overleftarrow{320} | \overleftarrow{0211} = \overleftarrow{21} \overleftarrow{0231}. \tag{3}$$

На основе результата (3) можно сформулировать утверждение, что бесконечный автомат с состояниями вида $\bar{q} = \nu \cdot 13^{-1} = \nu \cdot \overleftarrow{2313}$, ν — целое, т. е. кратными 13^{-1} , исправно ведет свои вычисления с неизбежным попаданием в ядро автомата 2. Подобного нельзя сказать про бесконечный автомат с состояниями, представленными произвольными действительными числами.

Еще одно наблюдение представляет дополнительный интерес с вычислительной точки зрения. Обратимся к предыдущей развертке и задержимся на моменте $t = 3$, когда на вход автомата поступает сигнал $\overleftarrow{0}$. Можно сказать, что *вычисление можно остановить в этот момент, т. к. вся последующая вычислительная работа автомата сводится к переносу состояния $\bar{q} = \overleftarrow{210}$ в качестве периода*.

Кроме того, возникает мысль в записи отделить простой 0 от тройки нулей $\overleftarrow{000}$, возникшей в предыдущей развертке, и, как результат, в таблице 2 в столбце, отмеченном состоянием $\bar{q} = \overleftarrow{210}$, писать так:

q x		$\overleftarrow{210}$	
0		$\overleftarrow{021,0}$	
$\overleftarrow{000}$		$\overleftarrow{102} \overleftarrow{021} \overleftarrow{210}, \overleftarrow{210}$	

Такая система записи позволяет нам избавиться от выписывания бесконечных последовательностей символов и представлять их в конечном виде. Это не что иное как актуализация бесконечности. Теперь мы можем предыдущую развертку записать в виде:

$\infty > t \geq 3$	2	1	0	t
$\overleftarrow{000}$	3	2	0	x
$\overleftarrow{102} \overleftarrow{021} \overleftarrow{210}$	$\overleftarrow{102} \overleftarrow{021} \overleftarrow{210}$	$\overleftarrow{231}$	$\overleftarrow{021}$	q
$\overleftarrow{210}$	2	3	1	y

Бесконечное вычисление изображено в конечном виде. Появившийся здесь объект $\overleftarrow{102} \overleftarrow{021} \overleftarrow{210}$ можно трактовать как состояние и считать его *производным состоянием*. Следует отметить, что это не просто игра с символикой, а отражение нашей ментальной способности к актуализации бесконечности и ее последующей материализации. Интересна структура этого производного состояния: оно состоит из упорядоченной тройки бесконечных периодических числоидов, расположенных на одной и той же сетке $Gr_{(\infty,0)}^0$ и упорядоченно воспринимаемых в одном акте восприятия.

Обратимся к числовому истолкованию числоидов, являющихся состояниями автомата, заданного таблицей 2. Истолкования таковы:

$$\overleftarrow{102} = -\frac{102}{333}, \overleftarrow{210} = -\frac{210}{333}, \overleftarrow{312} = -\frac{312}{333}, \overleftarrow{021} = -\frac{21}{333}, \overleftarrow{123} = -\frac{123}{333}, \overleftarrow{231} = -\frac{231}{333},$$

т.е. числоид $\overleftarrow{102}$ представляет число $(-\frac{102}{333})$ и т. д.

Числа позволяют упорядочить состояния делителя:

$$\text{ядро: } \overleftarrow{312} < \overleftarrow{231} < \overleftarrow{210} < \overleftarrow{123} < \overleftarrow{102} < \overleftarrow{021} < \overleftarrow{0}. \tag{4}$$

Таблица 5

Автомат $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$

	q	$\overleftarrow{312}$	$\overleftarrow{231}$	$\overleftarrow{210}$	$\overleftarrow{123}$	$\overleftarrow{102}$	$\overleftarrow{021}$	$\overleftarrow{0}$
x	$\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{231,2}$	$\overleftarrow{123,1}$	$\overleftarrow{021,0}$	$\overleftarrow{312,3}$	$\overleftarrow{210,2}$	$\overleftarrow{102,1}$	$\overleftarrow{0,0}$
$\overleftarrow{1}$	$\overleftarrow{123,1}$	$\overleftarrow{021,0}$	$\overleftarrow{312,3}$	$\overleftarrow{210,2}$	$\overleftarrow{102,1}$	$\overleftarrow{0,0}$	$\overleftarrow{231,3}$	$\overleftarrow{123,2}$
$\overleftarrow{2}$	$\overleftarrow{021,0}$	$\overleftarrow{312,3}$	$\overleftarrow{210,2}$	$\overleftarrow{102,1}$	$\overleftarrow{0,0}$	$\overleftarrow{231,3}$	$\overleftarrow{123,2}$	$\overleftarrow{021,1}$
$\overleftarrow{3}$	$\overleftarrow{312,3}$	$\overleftarrow{210,2}$	$\overleftarrow{102,1}$	$\overleftarrow{0,0}$	$\overleftarrow{231,3}$	$\overleftarrow{123,2}$	$\overleftarrow{021,1}$	

В этом порядке расположим состояния делителя, таблицу которого перепишем с учетом установленного порядка.

Это та же самая таблица 2, но в ней состояния в «шапке» таблицы упорядочены.

Такое упорядочение приводит к явному обнаружению закономерностей, присущих автомату $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$. В таблице заштрихованы клетки, соответствующие финальным состояниям. Кроме того, видно, что все состояния автомата, выписанные в его «шапке», получаются из состояния $\overleftarrow{021} = -\frac{21}{333} = -\frac{21}{21 \cdot 13} = -\frac{1}{13(4)} = -\frac{1}{7(10)}$ умножением его на целые числа, так что множество состояний автомата можно записать в виде одной формулы:

$$Q_{13^{-1}} = \{\bar{q}|\bar{q} = \overleftarrow{021} \cdot i, i = 0, 1, \dots, 12\} = \{\overleftarrow{021} \cdot i\}_{i=0}^{i=12}. \tag{5}$$

Теперь построим таблицу, являющуюся продолжением таблицы 5, в которой в роли состояний выступают производные состояния. Предварительно для компактизации записей введем обозначения. Символом, например, $\overleftarrow{312} \overset{об}{=} \overleftarrow{123} \overleftarrow{231} \overleftarrow{312}$ обозначим упорядоченную тройку круговых перестановок, построение которой начинается с цифры нулевого разряда. Пара стрелок, вверху и внизу, означает такую перестановку. Из двух стрелок верхняя является ведущей, указывающей, в каком направлении ведется перестановка; нижняя стрелка – подчиненная, ее назначение состоит в информировании о том, что выполняется круговая перестановка. Для изображения производного состояния построенный объект надо снабдить еще одной стрелкой сверху, как это показано в развертке на странице 79. Получим изображение для производного состояния: $\overleftarrow{\overleftarrow{312}} \overset{об}{=} \overleftarrow{\overleftarrow{123}} \overleftarrow{\overleftarrow{231}} \overleftarrow{\overleftarrow{312}}$. В правой части стоит его развернутое обозначение, в левой – его компактная запись. С помощью такой компактизации развертка на странице 79 примет вид:

$\infty > t \geq 3$	2	1	0	t
$\overleftarrow{\overleftarrow{000}}$	3	2	0	x
$\overleftarrow{\overleftarrow{210}}$	$\overleftarrow{231}$	$\overleftarrow{021}$	$\overleftarrow{0211}$	q
$\overleftarrow{\overleftarrow{210}}$	2	3	1	y

Вычисление по-прежнему имеет вид конечного вычисления, на практике при реализации его на В-компьютерах оно, действительно, конечно, поскольку в В-компьютерах производные состояния, будучи с точки зрения ментального акта многократной актуализацией, реализуются конечным образом, причем максимально простым. Правильность вычисления, записанного в развертке, была проверена раньше.

При построении продолжения таблицы 5 на множество производных состояний в роли «входных сигналов» будет выступать не только тройка $\overleftarrow{000}$, но и родственные ей тройки: $\overleftarrow{111}$, $\overleftarrow{222}$, $\overleftarrow{333}$. Понятно, что множество трехбуквенных входных сигналов приведенными образцами не ограничивается, но для первоначального изучения вычислительной процедуры можно рассмотреть приведенные входные тройки сигналов. Иные варианты могут быть рассмотрены по аналогии.

Выпишем все производные состояния (кроме нулевого), получающиеся компактизацией:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{021} &\rightarrow \overleftarrow{210} \overleftarrow{102} \overleftarrow{021} = \overleftarrow{021}, \overleftarrow{102} \rightarrow \overleftarrow{021} \overleftarrow{210} \overleftarrow{102} = \overleftarrow{102}, \overleftarrow{123} \rightarrow \overleftarrow{231} \overleftarrow{312} \overleftarrow{123} = \overleftarrow{123} \\ \overleftarrow{210} &\rightarrow \overleftarrow{102} \overleftarrow{021} \overleftarrow{210} = \overleftarrow{210}, \overleftarrow{231} \rightarrow \overleftarrow{312} \overleftarrow{123} \overleftarrow{231} = \overleftarrow{231}, \overleftarrow{312} \rightarrow \overleftarrow{123} \overleftarrow{231} \overleftarrow{312} = \overleftarrow{312} \end{aligned}$$

Если ограничиться натуральными числами, а они все имеют числоидное представление вида $\bar{x} = \overleftarrow{0} x_r \dots x_1 x_0$, то компактизационное продолжение таблицы делителя будет таким.

Таблица 6

Автомат $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$ (продолжение)

q	$\overleftarrow{312}$	$\overleftarrow{231}$	$\overleftarrow{210}$	$\overleftarrow{123}$	$\overleftarrow{102}$	$\overleftarrow{021}$
x	$\overleftarrow{312}, \overleftarrow{312}$	$\overleftarrow{231}, \overleftarrow{231}$	$\overleftarrow{210}, \overleftarrow{210}$	$\overleftarrow{123}, \overleftarrow{123}$	$\overleftarrow{102}, \overleftarrow{102}$	$\overleftarrow{021}, \overleftarrow{021}$

В этих обозначениях таблица автомата выглядит особенно просто. Типичный фрагмент развертки похож на фрагмент предыдущей развертки и выглядит так:

$$\begin{array}{c} \infty > t \geq 3 \\ \hline \overleftarrow{000} \\ \overleftarrow{123} \quad \overleftarrow{123} \\ \overleftarrow{123} \end{array}$$

Но для других входных наборов $\overleftarrow{111}$, $\overleftarrow{222}$, $\overleftarrow{333}$ достигнутая простота теряется. Рассмотрим, например, переход из состояния $\overleftarrow{123}$ под действием входного сигнала $\overleftarrow{222}$. Соответствующий фрагмент развертки будет содержать проблемные места, отмеченные знаком «?». Необходимо выяснить, чем заполнять проблемные места. Для этого нужно вернуться к развертке:

$$\begin{array}{c} \infty > t \geq 3 \\ \hline \overleftarrow{222} \\ ? \quad \overleftarrow{210} \\ ? \end{array}$$

Имеем, возвращаясь к предыдущим обозначениям:

$$\begin{array}{c} \infty > t \geq 3 \\ \hline \overleftarrow{222} \\ ? \quad \overleftarrow{102} \overleftarrow{021} \overleftarrow{210} \\ ? \end{array}$$

Но и здесь ясности не происходит, поскольку, возвращаясь к предыдущим обозначениям еще на один шаг и приходя к исходным обозначениям, обнаруживаем, что содержащийся в $\overleftarrow{102} \overleftarrow{021} \overleftarrow{210}$ переход из состояния $\overleftarrow{210}$ в состояние $\overleftarrow{021}$ под действием сигнала 2 невозможен и потому множество состояний в таблице 5 должно быть расширено. Вычисление переходов из первичных стояний автомата 5 под действием нетривиальных троек $\overleftarrow{111}$, $\overleftarrow{222}$, $\overleftarrow{333}$ происходит по следующим образцам.

Пример 5. Пусть $q = \overleftarrow{123}$, входной сигнал равен $\overleftarrow{2}$. Соответствующая развертка:

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	t
	...	2	2	2	2	2	2	2	2	x
...	$\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{102}$	$\overleftarrow{123}$	$\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{102}$	$\overleftarrow{123}$	$\overleftarrow{0}$	$\overleftarrow{102}$	$\overleftarrow{123}$	q
	...	0	1	2	0	1	2	0	1	y

Видно, что формируется переход-выход:

$$\frac{\infty + 0 \quad \infty > t \geq 0}{\overleftarrow{0} \vee \overleftarrow{102} \vee \overleftarrow{123} \quad \overleftarrow{0} \overleftarrow{102} \overleftarrow{123}}$$

$$\overleftarrow{222}$$

$$\overleftarrow{201}$$

Эта схема является типичным переходом-выходом в автомате. Из нее мы извлекаем, что в роли состояния автомата выступает объект вида: $\overleftarrow{0} \overleftarrow{102} \overleftarrow{123}$. Он родственен выписанным ранее производным состояниям, но не совпадает ни с одним из них. Это означает появление новых состояний в расширенном автомате.

Правая часть развертки (справа от разрыва) показывает, что изображенная в ней конструкция заполняет всю разрядную сетку $Gr_{(\infty,0]}^0$, как это показано в первоначальной развертке этого примера, а левая часть развертки (слева от разрыва) показывает, что переносится в следующую разрядную сетку $Gr_{(\infty,0]}^1$, в сетку бесконечно больших величин первого порядка. Обращаем внимание, что в следующую сетку ввиду неопределенности на бесконечности, как это видно из начальной развертки этого примера, переносится в качестве начального любое из состояний $\overleftarrow{0} \vee \overleftarrow{102} \vee \overleftarrow{123}$; требуется дополнительная информация для выбора начального состояния на следующей разрядной сетке.

Переходы наподобие рассмотренного полезны на практике, поскольку они позволяют бесконечные по длительности вычисления свести к конечным, причем это может быть реализовано как В-технологии. Такого сорта сведения бесконечных вычислений к конечным приводят к ускорению вычислений. В-технология позволяет реализовать такое ускорение.

Из примера ясно, как строить переходы из состояний автомата 5 под действием нетривиальных троек сигналов. Результаты этих построений приведены в таблице 7.

Таблица 7 оказалась довольно содержательной и ввиду нехватки места распалась на три части. Она чрезвычайно полезна для слежения за бесконечными вычислительными процессами. В ней появляется новое расширение понятия состояния автомата. Оказалось, что имеет смысл считать состояниями образования вида $\overleftarrow{021} \overleftarrow{312} \overleftarrow{231}$, являющиеся ничем иным, как конечной актуализацией бесконечности, позволяющие свести бесконечные вычисления к конечным. Будучи результатом ментальной операции актуализации бесконечности, такие состояния тем не менее материально реализуемы конечным образом в В-технологии. Далее рассмотрим пример на ее использование.

Рассмотрим пример на применение таблиц 6, 7.

Пример 6. Пусть $\bar{x} = \overleftarrow{0} 331_{(4)} = 13 \cdot 20 + 10_{(4)} = 7 \cdot 8 + 4_{(10)} = 60_{(10)}$ не делится на 13. Развертка:

$\infty > t \geq 3$	2	1	0	t
$\overleftarrow{000}$	3	3	1	x
$\overleftarrow{021} \overleftarrow{210} \overleftarrow{102}$	$\overleftarrow{210}$	$\overleftarrow{231}$	$\overleftarrow{0}$	q
$\overleftarrow{102}$	1	2	3	y

Пишем результат: $13^{-1} \cdot \overleftarrow{0} 331 | \overleftarrow{0} = \overleftarrow{102} 123$. Бесконечно долгое вычисление благодаря актуализации бесконечности, проявившейся во введении состояний вида $\overleftarrow{021} \overleftarrow{210} \overleftarrow{102}$, выполнено за четыре такта. Понятно, что устройство, заданное таблицами 6, 7, сложнее устройства, заданного таблицей 5.

Таблица 7

Автомат $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$ (продолжение)

q \ x	$\overleftarrow{312}$	$\overleftarrow{231}$	$\overleftarrow{210}$
$\overleftarrow{111}$	$\overleftarrow{210} \overleftarrow{123} \overleftarrow{312}, \overleftarrow{321}$	$\overleftarrow{000} \overleftarrow{021} \overleftarrow{231}, \overleftarrow{300}$	$\overleftarrow{123} \overleftarrow{312} \overleftarrow{210}, \overleftarrow{213}$
$\overleftarrow{222}$	$\overleftarrow{231} \overleftarrow{021} \overleftarrow{312}, \overleftarrow{330}$	$\overleftarrow{021} \overleftarrow{312} \overleftarrow{231}, \overleftarrow{303}$	$\overleftarrow{210}, \overleftarrow{2}$
$\overleftarrow{333}$	$\overleftarrow{312}, \overleftarrow{3}$	$\overleftarrow{102} \overleftarrow{210} \overleftarrow{231}, \overleftarrow{312}$	$\overleftarrow{231} \overleftarrow{102} \overleftarrow{210}, \overleftarrow{231}$

q \ x	$\overleftarrow{123}$	$\overleftarrow{102}$	$\overleftarrow{021}$
$\overleftarrow{111}$	$\overleftarrow{312} \overleftarrow{210} \overleftarrow{123}, \overleftarrow{132}$	$\overleftarrow{102}, \overleftarrow{1}$	$\overleftarrow{231} \overleftarrow{000} \overleftarrow{021}, \overleftarrow{030}$
$\overleftarrow{222}$	$\overleftarrow{000} \overleftarrow{102} \overleftarrow{123}, \overleftarrow{201}$	$\overleftarrow{123} \overleftarrow{000} \overleftarrow{102}, \overleftarrow{120}$	$\overleftarrow{312} \overleftarrow{231} \overleftarrow{021}, \overleftarrow{033}$
$\overleftarrow{333}$	$\overleftarrow{021} \overleftarrow{000} \overleftarrow{123}, \overleftarrow{210}$	$\overleftarrow{210} \overleftarrow{231} \overleftarrow{102}, \overleftarrow{123}$	$\overleftarrow{000} \overleftarrow{123} \overleftarrow{021}, \overleftarrow{102}$

q \ x	$\overleftarrow{000}$
$\overleftarrow{111}$	$\overleftarrow{021} \overleftarrow{231} \overleftarrow{000}, \overleftarrow{003}$
$\overleftarrow{222}$	$\overleftarrow{102} \overleftarrow{123} \overleftarrow{000}, \overleftarrow{012}$
$\overleftarrow{333}$	$\overleftarrow{123} \overleftarrow{021} \overleftarrow{000}, \overleftarrow{021}$

Но, если речь идет об ускорении вычислений, переход к устройству, заданному таблицами 6, 7, необходим. Забегая вперед, скажем, что этим дело не ограничивается. Есть вычисления, в которых используется развитие описанного варианта ускорения вычислений. Развитие происходит в различных направлениях и простирается достаточно далеко.

Заключение

Единый подход к синтезу устройств позволяет единообразно решать каждую новую задачу даже при сильном отличии входных данных и результатов. Единый подход к синтезу устройств характеризуется стандартной последовательностью действий.

Первым действием ищется числоид, представляющий число 13^{-1} , вначале на сетке $Gr_{(\infty,0]}^0 \equiv \dots \overleftarrow{3} \overleftarrow{2} \overleftarrow{1} \overleftarrow{0}$. Оказывается, он находится на ней и записывается в виде: $13^{-1} = \overleftarrow{2313}$.

Методом накопления состояний с использованием найденного представления находится конечный делитель $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$.

Проверяется правильность его работы. Оказывается, что некоторые числоиды, являющиеся результатами его вычислений, могут быть записаны в виде периодических выражений в нескольких разных видах.

На основе проведенного наблюдения выясняется, что в таблице автомата $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$ можно отделить стрелочные входные сигналы от нестрелочных.

Это приводит к более громоздкой таблице автомата, в которой в роли состояний выступают конструкции вида $\bar{q} = \overleftarrow{102} \overleftarrow{021} \overleftarrow{210}$. И более громоздкая таблица автомата и более сложная конструкция состояний дают возможность проводить ускоренное вычисление. Например, потенциально бесконечные вычисления выполняются за конечное число шагов. В таком автомате оптимальным образом

решена проблема останова, что также приводит к ускорению вычислений.

Синтезированный автомат $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$ обладает свойством экстривертности по состояниям, состоящим в том, что любой числоид на сетке $Gr_{(\infty,0]}^0 \equiv \dots \bar{3} \bar{2} \bar{1} \bar{0}$ может быть взят в качестве начального состояния. Во множестве числоидов выделяется класс состояний вида $Q_{13^{-1}} = \{\bar{q}|\bar{q} = \overleftarrow{021} \cdot i, i \in Z\}$, всегда приводящий к конечным вычислениям. Этот класс состояний может аппроксимировать вычисления с начальными состояниями, в роли которых выступают любые действительные числа.

Синтезированный делитель $13^{-1} \cdot \bar{x}|\bar{q}$ является нормальным делителем, т. е. он делит от младших разрядов к старшим. Таблица 5 наглядно демонстрирует присущие ему структурные закономерности. Нормальному делителю противопоставляется инверсный делитель (в статье не описан), ведущий деление от старших разрядов к младшим (нам хорошо знакомое деление). Эти делители приводят к двум различным числоидам, представляющим число 13^{-1} (см. табл. 4).

Показан не встречавшийся ранее способ ускорения вычислений, состоящий в использовании комплексов состояний в качестве одного нового состояния.

Для реализации описанной идеологии наилучшим образом подходит В-технология. В других технологиях такая реализация совершенно не просматривается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деев Г. Е. *Теория вычислительных устройств*. Санкт-Петербург: Лань; 2019. 452 с.
2. Летников А. *Теория дифференцирования с произвольным указателем*. М.: Типография А. И. Мамонтова; 1868.
3. Эйлер Л. *Дифференциальное исчисление*. М.-Л.: ГИТТЛ; 1949.

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-10

БЕСПИЛОТНЫЙ АВТОМОБИЛЬ: ПОДХОДЫ К РЕАЛИЗАЦИИ, ПРОБЛЕМЫ**О. П. Бобровская^{1,2,a}, Т. В. Гавриленко^{1,2}**¹ Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,

г. Сургут, Российская Федерация

² Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация^a o-bobrovskaya@mail.ru

Аннотация: в статье описано, каким образом сейчас решается задача создания беспилотного автомобиля. Приведена классификация степени автоматизации вождения, выделяющая 6 уровней автономности, начиная от полного отсутствия автоматизации до полностью автономного автомобиля. Описаны основные составляющие технологии автопилота: карты высокого разрешения, восприятие, локализация, прогнозирование, планирование, контроль. Рассмотрена информация из открытых источников о 9 компаниях, занимающихся разработкой автопилота от 0-го до 5-го уровня автономности. Отмечены ошибки, допускаемые тестируемыми и эксплуатируемыми решениями на текущем этапе развития технологий автономного вождения. Выделены проблемы, еще не решенные в данной области.

Ключевые слова: автопилот, автономное транспортное средство, система помощи водителю, искусственная нейронная сеть, классификация SAE.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме № 0580-2021-0007 «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления».

Для цитирования: Бобровская О. П., Гавриленко Т. В. Беспилотный автомобиль: подходы к реализации, проблемы. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):86–96. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-10.

THE AUTONOMOUS VEHICLE: IMPLEMENTATION AND ISSUES**O. P. Bobrovskaya^{1,2,a}, T. V. Gavrilenko^{1,2}**¹ Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation² Surgut State University, Surgut, Russian Federation^a o-bobrovskaya@mail.ru

Abstract: the paper considers the autonomous vehicle development. Six autonomous driving levels are listed ranging from manual driving to a fully autonomous vehicle. The key autopilot components are presented: high-resolution maps, perception, localization, prediction, planning, control. Open-source information about 9 companies engaged in Level 0 to Level 5 autopilot development is reviewed. Errors found in the tested and operating solutions at the current stage of autonomous driving technology development are noted. The problems not yet solved are identified.

Keywords: autopilot, autonomous vehicle, driver assistant, neural network, SAE classification.

Acknowledgements: this study is the 47 GP government order contracted to the Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences, project No. 0580-2021-0007 Advancing Distribution System Simulation and Computation Methods.

Cite this article: Bobrovskaya O. P., Gavrilenko T. V. The Autonomous Vehicle: Implementation and Issues. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):86–96. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-10.

Последние 5–10 лет активно развивается направление автономных транспортных средств. Многие автопроизводители вкладывают средства в разработку умных систем помощи вождению, были созданы отдельные компании, занимающиеся разработкой автопилота. Электронные устройства, необходимые для управления автомобилем, уже присутствуют во многих современных моделях, основное

внимание сосредоточено на вычислительных устройствах и программном обеспечении. Заявляемая цель — сделать движение в автомобиле безопасным, исключив из управления человеческий фактор.

В начале прогнозы были крайне оптимистичны: нам обещали готовые беспилотники в течение пары лет, но время прошло, а работа еще не закончена. Оказалось, что создать автопилот, решающий все возникающие во время вождения задачи не хуже человека не так-то просто. Рассмотрим современные общие представления отрасли о том, как должен выглядеть автопилот, подходы разных компаний к реализации этих идей и нерешенные вопросы, которые мешают наконец создать машину, которая едет из пункта А в пункт Б без вмешательства человека и без аварий.

Классификация SAE

Для классификации степени автоматизации вождения широко используется классификация из «Таксономии и определений терминов, относящихся к системам автоматизации движения для дорожных транспортных средств», впервые выпущенной органом по стандартизации автомобилестроения SAE International в 2014 году. В документе зафиксированы задачи, выполняемые человеком на разных уровнях автоматизации вождения. Чтобы понять классификацию, следует привести определения используемых в ней понятий.

Динамическая задача вождения (ДЗВ) — все оперативные и тактические функции, выполняемые в реальном времени, необходимые для управления транспортным средством в процессе дорожного движения, за исключением стратегических функций, таких как планирование поездок и выбор пунктов назначения и путевых точек.

Область функционирования (или операционного/эксплуатационного проектирования) — условия эксплуатации, для использования в которых данная система автоматизации вождения или некоторые ее функции специально предназначены, включая, помимо прочих, экологические, географические ограничения, а также ограничения по времени суток и/или наличие или отсутствие определенных условий дорожного движения.

Согласно последней версии документа SAE от 30 апреля 2021 года [1] выделяется 6 уровней автоматизации транспортных средств:

0. *Автоматизация вождения отсутствует.* Водитель выполняет ДЗВ, даже если присутствуют активные системы безопасности, например, экстренное торможение или предупреждение.

1. *Помощь водителю.* Устойчивое и зависящее от области функционирования выполнение системой автоматизации подзадачи ДЗВ: движения в одной полосе или движения между полосами (но не обоих одновременно). Ожидается, что водитель выполнит оставшуюся часть ДЗВ.

2. *Частичная автоматизация вождения.* Устойчивое и зависящее от области функционирования выполнение системой автоматизации подзадач ДЗВ: движения в одной полосе и между полосами. Ожидается, что водитель выполнит подзадачу обнаружения объектов и событий и реагирования, а также будет контролировать систему автоматизации вождения.

3. *Условная автоматизация вождения.* Устойчивое и зависящее от области функционирования выполнение системой автоматизации всей ДЗВ. Ожидается, что пользователь будет восприимчив к запросам автоматизированной системы вождения на вмешательство, а также к сбоям в других частях системы автомобиля, влияющих на ДЗВ, иотреагируют соответствующим образом.

4. *Высокая автоматизация вождения.* Устойчивое и зависящее от области функционирования выполнение системой автоматизации всей ДЗВ. Вмешательство от пользователя не ожидается.

5. *Полная автоматизация вождения.* Устойчивое и безусловное (не зависящее от области функционирования) выполнение системой автоматизации всей ДЗВ. Вмешательство от пользователя не ожидается.

Стоит отметить, что данный документ не содержит спецификаций и не предъявляет требований к системам автоматизации вождения каким-либо иным образом. Набор тестов для определения или проверки уровня автоматизации вождения отсутствует, и, как утверждает SAE, создание таких тестов на практике невозможно. Поэтому описанные выше уровни назначаются, а не измеряются, и отражают замысел конструкции для функции системы автоматизации вождения, как определено ее производителем.

Обобщенная архитектура

Как отмечается в статье [2], после вызовов DARPA Grand Challenges в 2005–2007 годах большая часть отрасли разбила архитектуру автономных автомобилей на карты высокого разрешения (HD map), локализацию (localization), восприятие (perception), прогнозирование (prediction) и планирование (planning). После прорывов, сделанных в рамках соревнований по классификации изображений ImageNet, блоки восприятия и прогнозирования стали основываться на машинном обучении. Тем не менее планирование и моделирование поведения по-прежнему в значительной степени основано на правилах: эффективность повышается, если люди пишут все более подробные правила, определяющие, как автономное транспортное средство должно управляться.

Рассмотрим подробнее выделенные блоки автопилота, чтобы позже останавливаться только на специфических отличиях решений разных компаний:

1. Карты высокого разрешения

Карты, предварительно построенные с помощью лидаров и прочих датчиков, включающие все регулирующие дорожное движение знаки и расположение светофоров. Обычно загружаются в облако — их необходимо часто обновлять в связи с тем, что реальный мир меняется: появляются новые постоянные знаки или временные знаки ремонтных работ, изменяются фасады зданий и проч.

2. Восприятие

Типичное решение представляет собой нейронную сеть, обрабатывающую данные с датчиков: камер, радаров, лидаров, GPS, гиросtabilизатора (акселерометра и гироскопа), ультразвуковых датчиков — для определения положения других объектов, участников дорожного движения, вокруг автономного транспортного средства. Эти системы тренируются на размеченных вручную данных, хотя многие компании автоматизируют разметку данных, оставляя на людей только функции проверки решения. Задача восприятия включает в себя подзадачи обнаружения, классификации, отслеживания и сегментации.

3. Локализация

Определяется положение автомобиля в пространстве путем сопоставления данных, полученных с помощью восприятия, и карт высокого разрешения. Достигается точность ± 10 см.

4. Прогнозирование (предсказание)

Процесс предвидения того, что может случиться дальше, и того, как собственные действия транспортного средства могут повлиять на поведение других. Существует два подхода: подход, основанный на модели, и подход, основанный на данных, использующий машинное обучение.

5. Планирование

Определение траектории до пункта назначения с учетом движущихся объектов на дороге. На верхнем уровне происходит поиск пути на графе (преобразованной карте). На нижнем уровне минимизируется ошибка траектории с точки зрения безопасности, законности, скорости и осуществимости.

6. Контроль

Контроллер получает требуемую траекторию как последовательность точек. Его задача — используя управляющие воздействия (руление, ускорение и торможение), провести машину через заданные точки.

Большинство современных автопилотов не сильно отклоняются от рассмотренной архитектуры, но компании стараются презентовать информацию о своих решениях как об уникальных разработках.

Сравнение решений рассмотренных компаний-производителей

В сети Интернет можно найти информацию о многих развивающихся сейчас проектах автопилотов. Объем такой информации варьируется в зависимости от открытости проекта, но часто ее достаточно, чтобы составить общее представление об архитектуре системы. Некоторые общие характеристики рассмотренных автопилотов представлены в табл.

В столбце «Уровень» приведен заявленный компанией уровень автоматизации вождения, который может и не соответствовать реальности.

Многие компании не раскрывают исходный код своего автопилота, но рассказывают о некоторых архитектурных решениях на различных презентациях или в публикациях, как делает Tesla и Cognitive Pilot. NVIDIA предоставляет набор инструментов для разработки программного обеспечения (SDK). Comma OpenPilot и Apollo разместили исходный код на платформе GitHub, чтобы любой заинтересованный человек мог разобраться в его работе или даже принять участие в разработке.

Как известно, в настоящее время качество нейронных сетей основывается на том, насколько обширен и качественен набор данных, на которых они обучаются. И, чтобы помочь исследовательскому

Таблица

Программные и аппаратные решения

	Уровень	Открытый исходный код	Открытый набор данных	Упомянутые архитектуры нейронных сетей	Упомянутые библиотеки, фреймворки	Лидар	Радар	Разработан свой процессор
Tesla	2, 3, 4	-	-	ResNet, FPN, DeepLabV3, U-Net, Transformer, Spatial RNN	PyTorch	-	-	+
Waymo	4	-	+	VectorNet	AutoML, TensorFlow	свой	+	+
Comma OpenPilot	0, 1	+	-	CNN, ResNet, RNN, GRU	Pillow, CasADi, ONNX	-	+	-
NVIDIA Drive	2, 3, 4	+/-	-	CNN	Torch 7	+	+	+
Argo AI	4	-	+	свой	+	+
Level 5	2, 3, цель — 4	-	+	CNN, DCNN	PyTorch	+	+	-
Cognitive Pilot	3, 4	-	-	CNN, U-Net, LeNet, SSD, SqueezeNet RCNN	Caffe	-	свой	-
Yandex	4	-	+	свой	+	-
Apollo	4, 5	+	+	CNN, R-CNN, Fast R-CNN, Faster R-CNN, YOLO, SSD, FCN, LSTM	Caffe	+	+	+

сообществу развивать машинное восприятие и технологии автономного вождения, многие компании выложили в открытый доступ часть своих наборов размеченных данных для обучения нейросетей.

Чтобы примерно описать работу нейронной сети, используют названия стандартных архитектур, которые применялись при ее построении, как, например, CNN или U-Net, хорошо зарекомендовавшие себя при решении определенных задач распознавания образов или классификации.

Радары позволяют определять препятствия и скорость движущихся объектов, но имеют маленькое разрешение и плохо работают в условиях снега или дождя. Лидар измеряет расстояния путем излучения света (лазер) и позволяет строить **карты высокого разрешения**.

Несмотря на то, что одни работающие над автопилотом компании считают, что именно лидар сделает автопилот безопасным, другие отказываются от его использования (Tesla и Cognitive Pilot) по причине его высокой стоимости и быстрого выхода из строя. Argo AI, купив в 2018 году компанию по производству лидаров, в мае 2021 выпустила свой лидар специально для решения задач автопилота. Яндекс также разработал собственный лидар к ноябрю 2021 года. Comma OpenPilot разрабатывает систему, которую можно поставить на свой автомобиль (поддерживается множество моделей), поэтому использует стандартный набор датчиков автомобиля, впрочем, и уровень автопилота в данном случае — система помощи водителю.

В мае 2021 года Tesla отказалась и от радаров из-за различных минусов самих радаров, а также необходимости объединять их данные с данными с камер, решив полагаться только на последние и нейросети. Cognitive Pilot для решения тех же минусов радара в 2018 году создали свой радар.

Далее более подробно представлены решения рассмотренных компаний.

Tesla

Tesla — американская компания-производитель электромобилей, которая предоставляет набор функций ADAS (advanced driver-assistance systems — усовершенствованная система помощи водителю); работа в этом направлении началась в 2013 году.

Компания собирает данные со всех автомобилей, подключенных к облаку. На каждой машине

происходит сравнение реальных данных с прогнозами автопилота, даже если в данный момент управляет машиной водитель. Причем данные с радаров, от использования которых в автопилоте отказались, продолжают собираться для лучшей маркировки данных. Кроме того, в компании используют симуляцию для генерации еще большего количества данных для обучения.

На презентации Tesla Autonomy Day в 2019-му году был представлен чип, разработанный специально для нейронной обработки (NPU). На одной машине используется два таких чипа, обеспечивающих производительность 144 трлн операций в секунду, работающих как два независимых компьютера. В результате обработки поступающей информации формируются две версии плана, проверяемые на совпадение.

Также в 2019 было заявлено, что все производимые автомобили имеют необходимые аппаратные средства для полностью автономного вождения, осталось только улучшить программное обеспечение.

Архитектура блока **восприятия** (GydraNet), разработанная в компании Tesla, создана для преобразования данных с камер в «векторное пространство» с тремя измерениями. Изображения с 8 камер выравниваются, объединяются, проходят через экстрактор признаков и классификатор. Трансформер позволяет сопоставить изображение одной и той же области с разных точек обзора (разных камер) и определить как одну и ту же область. Очередь признаков сохраняет такую информацию, как, например: припаркована ли распознанная впереди машина или она движется; действующее ограничение скорости, знак о котором был пройден 15 с назад. Далее последовательность статичных изображений окружающего мира выстраивается в динамическую модель. После чего следуют отдельные модули (отдельные «голова гидры»), обученные решать разные задачи (реакция на дорожную разметку, дорожные знаки и проч.).

Построенные в процессе карты могут служить альтернативой **картам высокого разрешения**, строящимся с помощью лидаров. Вместо точного 3D-контура объектов здесь используются извлекаемые нейронными сетями из изображений признаки.

В блоке **планирования** система Tesla ищет лучший набор траекторий, выпуклый коридор, используя физические модели, затем находит окончательное решение, используя методы непрерывной оптимизации [3]. В случаях, когда сочетание грубого поиска и непрерывной оптимизации недостаточно эффективно для решения задачи планирования (например, густонаселенные центры городов в час пик), Tesla планирует реализовывать методы, основанные на машинном обучении (комбинацию нейронных сетей и поиска по дереву Монте-Карло), которые еще не используются в текущей версии автопилота.

Waymo

Waymo — американская компания-производитель технологий беспилотных автомобилей, начавшая свою работу в 2016 году как дочерняя компания Alphabet (холдинг, образованный в процессе реорганизации Google в 2015 году). Впрочем, Google начала работу над технологией автопилота еще в 2009 году. С 2012 года есть лицензия, разрешающая использование беспилотных автомобилей на дорогах общего пользования в штате Невада.

В 2020 представлена [4] новая нейронная сеть VectorNet с иерархическим графом, в которой наблюдаемые траектории участников дорожного движения и особенности карты в виде последовательности векторов. Этот подход обеспечивает более точные прогнозы, по сравнению с CNN, при меньшем объеме вычислений. VectorNet позволяет прогнозировать траектории движущихся объектов, даже если какие-то объекты частично замаскированы (знак остановки, загораживаемый деревом).

В блоке **восприятия** автопилота Waymo применяет активное обучение для маркировки данных и AutoML для создания архитектур и выбора более эффективного варианта (по точности и времени вывода). В блоке **локализации** используется опыт работы с Google Maps. Для **прогнозирования** применяются рекуррентные нейронные сети и обучение с подкреплением в симуляторах.

Обычного обучения на примерах настоящих водителей оказалось недостаточно для обработки сложных сценариев вождения [5]. Чтобы решить эту проблему, для собранных 30 млн примеров добавили штрафы, препятствующие плохому поведению и поощряющие прогресс, и дополнили данные синтезированными возмущениями траектории движения.

Comma OpenPilot

Американская компания Comma.ai основана в 2015 году. В 2016 году первая версия полуавтоматической системы вождения OpenPilot была упакована в небольшое поставляемое устройство «Comma one». В связи с претензиями правительства исходный код был открыт с подчеркиванием его предполагаемого использования в исследовательских целях без каких-либо гарантий. В 2020 году представлено устройство «Comma two», в 2021 году сообщается о разработке «Comma three».

Comma OpenPilot — это система с открытым исходным кодом, в разработке которой может принять участие любой специалист. Система может встраиваться в большинство современных автомобилей.

Чтобы подключаться к любой машине, была спроектирована архитектура, которая будет работать с любой машиной. Электронный блок управления работает независимо от того, какой тип машины его использует. OpenPilot подключается к шлюзу (Gateway) через интерфейс CAN-шины (Controller Area Network), благодаря чему взаимодействует с остальной частью автомобиля. Само устройство размещается на переднем стекле и представляет собой смартфон, на который выводится изображение дороги.

Планирование разделено на две части — поперечное планирование (рулевое управление) и продольное планирование (газ/тормоз). В обоих случаях используются решающая программа MPC (Model Predictive Control — прогностический контроль модели) [6].

В блоке **контроля** план в форме кривизны и скоростей / ускорений сначала преобразуется в управляющие сигналы, не зависящие от транспортного средства, которые затем преобразуются в конкретные команды CAN этого транспортного средства через систему управления с обратной связью, работающую на частоте 100 Гц.

NVIDIA Drive

NVIDIA Drive — это семейство продуктов для разработки автономных транспортных средств (охватывающее все, от автомобиля до центра обработки данных) от американской компании NVIDIA, разрабатывающей графические процессоры и системы на кристалле (SoC). Свое первое комплексное решение для автомобильной промышленности компания представила в 2015 году.

Сейчас компания предлагает платформу разработки автономного транспортного средства и эталонную архитектуру для разработки автономных решений уровня 2+ и уровня 3, называемую DRIVE Hyperion. Платформа состоит из полного набора настроенных, оптимизированных и сертифицированных датчиков, а также высокопроизводительной вычислительной платформы. Кроме того, у компании есть аппаратные решения, предназначенные для автономных систем 5-го уровня (без программного обеспечения).

NVIDIA предоставляет аппаратное и программное обеспечение, необходимое для разработки автономного транспортного средства, включая суперкомпьютер NVIDIA DGX для обучения DNN-восприятию и масштабируемую платформу для физически точного моделирования различных сценариев DRIVE Sim. В последней происходит все тестирование систем автопилота, поскольку физические тесты беспилотных автомобилей компании в настоящее время приостановлены.

В статье [7] 2016 года представлена сквозная (end-to-end) система, в которой не осуществляется явная декомпозиция задачи вождения на подзадачи **восприятия, планирования и контроля**. Разработанная система выполняет все этапы обработки одновременно. На рис. 1 представлена CNN, которая получает на вход данные с камер и тренируется выдавать угол поворота руля.

Обученная таким образом сеть используется для генерации управляющих команд от одной передней центральной камеры. Сеть содержит около 27 миллионов связей и 250 тысяч параметров.

Несмотря на выделенные в статье преимущества данного подхода к разработке ПО для автономного транспортного средства, в компании для поиска наиболее безопасного решения разрабатываются и другие решения, включающие детекцию объектов разных классов, сегментацию изображений и проч.

Argo AI

Argo AI — независимая американская компания, основанная в 2016 году, которая создает программное обеспечение, оборудование, карты и инфраструктуру облачной поддержки для управления беспилотными автомобилями. В январе 2019 года получили разрешение тестировать свои автономные автомобили в Калифорнии.

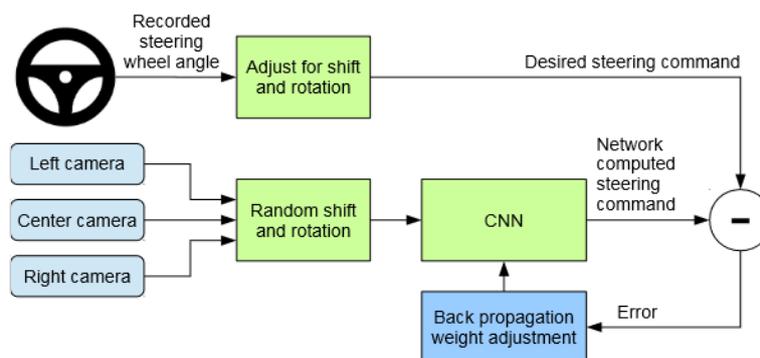


Рис. 1. Тренировка нейронной сети [7]

Argo AI не планирует выпускать технологии автономного вождения для личного владения: они хотят предоставить эти технологии для совместного использования автопарков с такими приложениями, как поиск пассажиров и услуги доставки товаров.

Чтобы соответствовать заявленному 4-му уровню автоматизации, предполагающему определенную **область функционирования** автономного транспортного средства, в пределах которой оно может выполнять корректно все свои функции, система беспилотного вождения Argo AI для коммерческого использования будет работать только в «геосети» (geonet) определенных улиц и поворотов, с учетом их топографических особенностей и максимальных ограничений скорости, в которых системе автопилота разрешено работать в режиме без водителя.

Предусмотрен ряд функций, предотвращающих работу за пределами **области функционирования**. Например, система контролирует количество осадков и безопасно останавливает автомобиль, если ливень становится слишком сильным. Другой пример: автомобиль не может выйти на новую территорию, он будет проезжать только по карте, которая кодирует авторизованную геосеть. При этом система рассматривает карты только как вспомогательное средство и проверяет, соответствует ли реальный мир ее ожиданиям. Когда эти ожидания не оправдываются, система либо адаптируется к новой реальности, либо предпринимает безопасные действия, такие как замедление до остановки или остановка, и запрашивает удаленную помощь.

Система **восприятия** предусматривает возможность отслеживания объектов неизвестного класса (например, трехголового монстра на Хэллоуин) с фиксацией их положения, скорости и направления движения.

Система **прогнозирования** обучается на наборах данных, включающих как правильное поведение (соблюдение правил), так и неправильное (от легкого несоблюдения правил до агрессивного поведения), и непрерывно собирает новые данные [8].

Level 5

Artiv (ранее Delphi Automotive) — международная компания, производитель автомобильных комплектующих, Lyft — агрегатор такси из Сан-Франциско. В 2017 году совместно создали отдел Level 5 для разработки беспилотного автомобиля. Успели предоставить 100 000 коммерческих поездок на такси с автопилотом (со страхующим водителем на водительском месте) за 3 года. В апреле 2021 проект перешел к компании Toyota's Woven planet (Япония), где команда продолжает работать над автопилотом.

В самом начале своего проекта разработчики обучили несколько базовых моделей компьютерного зрения на настольных компьютерах, создали свой первый внутренний фреймворк для обучения и за год выпустили на дороги готовый продукт. Но вскоре этих решений стало не хватать для дальнейшего развития, поэтому решили сменить парадигму и перешли на PyTorch в 2020 году [9].

В статье [10] 2020 года, предлагающей всем желающим попробовать свои силы в обучении собственных моделей на открытом наборе данных, авторы отмечают, что «задача **восприятия** уже готова к использованию в производстве, в то время как задачи **прогнозирования** и **планирования** еще не решены». И спустя год представляют [2] альтернативу традиционному подходу к **планированию**, основанному на правилах, — подход, ориентированный на машинное обучение, который они назвали *Autonomy 2.0*.

Cognitive Pilot

Cognitive Pilot (ООО «Когнитив Роботикс») — российская компания, созданная Cognitive Technologies (разработка и внедрение программного обеспечения) совместно со СберБанком в 2019 году для разработок в области беспилотных транспортных средств. Работа в этом направлении началась в 2017 году. Кроме беспилотного легкового автомобиля у компании также есть проекты:

- Cognitive Agro Pilot — система автономного управления сельскохозяйственными транспортными средствами. Основная задача системы — вести машину ровно вдоль границы между скошенной и нескошенной частями сельхозкультур. В основе системы управления, в отличие от систем основных зарубежных разработчиков, лежит не навигация по сигналу GPS, а компьютерное зрение. В 2021 году провели онлайн-мероприятие — День КиберПоля, где несмотря на плохие погодные условия продемонстрировали работу системы;

- Cognitive Rail Pilot — система помощи машинисту локомотива;
- Cognitive Tram Pilot — система автономного управления трамваем.
- Cognitive Auto Pilot — система управления беспилотным автотранспортом, выполняющая задачи: детекции автомобилей, пешеходов, границ полосы движения, распознавания дорожных знаков, предупреждения о столкновении и удержания в полосе движения.

На уровне **восприятия** для работы автопилота в реальных условиях (плохих дорог и погоды) разработали метод «виртуального тоннеля», в основе которого лежит принцип внутреннего самоподобия дорожной сцены. Разработчики научились выявлять наиболее общие, фундаментальные признаки, присущие дорожному полотну, будь это автомагистраль, проселочная или грунтовая дорога.

Вместо обычного подхода High level data fusion (объединение данных на высоком уровне), при котором данные с разных датчиков обрабатываются по отдельности, а затем результаты их распознавания усредняются, создали свой подход, который назвали Low level data fusion. «Сырые данные» сначала синхронизируются в единой системе координат, а потом комплексно обрабатываются.

На уровне **прогнозирования** технология CAI (Cognitive Artificial Intuition — когнитивная искусственная интуиция) позволяет моделировать элементы интуиции человека и делать точный прогноз развития дорожной ситуации для всех участников дорожной сцены, формировать сценарии безопасного движения, в том числе и в критических дорожных ситуациях [11].

Yandex / Яндекс

Беспилотные автомобили Яндекса — самоуправляемые транспортные средства, разрабатываемые инженерами российской компании Яндекс с 2017 года.

В настоящее время используется машина, оборудованная всем, что нужно для программного управления рулем и ускорением, к которой Яндекс добавляет свое оборудование: компьютер, комплект сенсоров, проводку [12].

Машина потребляет до 2 кВт, большая часть которых приходится на вычислитель, состоящий из двух серверных процессоров и трех видеокарт. Все вычисления происходят на борту автомобиля, он полностью автономен. Чтобы беспилотная часть машины могла продолжать функционировать длительное время, автомобиль комплектуется двумя дополнительными батареями, от которых питается электрическая сеть. Энергопотребление всего беспилотного оборудования меньше, чем у штатных узлов и агрегатов.

Инженеры разработали систему очистки сжатым воздухом и омывающей жидкостью, которая автоматически активируется в тот момент, когда на картинке, генерируемой лидаром, появляются нехарактерные визуальные шумы. Радары умеют видеть через закрытые кожухи, скрыты внутри крыши и в очистке не нуждаются.

Разработаны специальные аппаратные решения для **локализации** с помощью RTK (Realtime kinematic — кинематика реального времени) и собственное приемное устройство для работы с камерами. Используется UNIX-подобная ОС.

Apollo (Baidu)

Apollo, или Apolong, — проект китайской компании Baidu по разработке беспилотного автомобиля, начавший свою работу в 2013 году. В августе 2021 года презентовали автомобиль без руля и педалей, заявленный как беспилотник 5-го уровня. В мае 2021 года запустили такси без страхующего водителя с удаленным мониторингом и управлением в случае непредвиденных обстоятельств.

В блоке **прогнозирования** автопилота каждый момент времени (timestep) обновляется предсказание для каждого объекта на дороге. Apollo предлагает подход на основе модели, называемый «lane sequence-based prediction» (прогнозирование на основе последовательности полос движения). Дорога делится на связанные участки, в которых движение автомобиля элементарно, вероятность перехода с одного участка на другой определяется на основании скорости автомобиля и проч. [13].

В блоке **планирования** маршрута строится траектория в 3 измерениях (x, y, t), для каждой точки указывается скорость автомобиля. Для этой задачи координаты Френе (longitude (S) — долгота вдоль центра дороги и lateral (L) — расстояние вбок от центра) удобнее декартовых, поэтому расчеты производятся в них.

Сначала на дороге выделяются точки, в которых автомобиль может находиться в процессе движения, по ним строится множество траекторий, из которых выбирается самый дешевый маршрут (функция стоимости — сумма значения отклонения, комфорта пассажиров и др.). Затем по точкам подбирают последовательность скоростей. Для этого в координатах ST строятся траектории (профили скорости), не пересекающиеся с запрещенными областями, которые будут занимать другие объекты в это время (рис. 2). Для выбора лучшего профиля скорости используется оптимизационный движок.

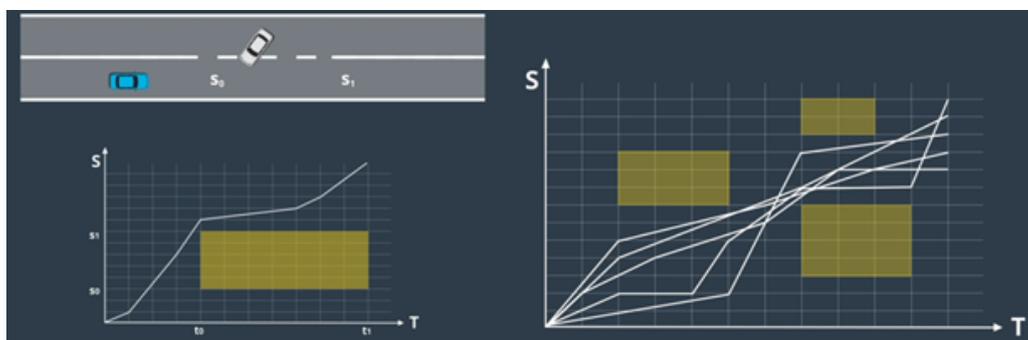


Рис. 2. Профили скорости [13]

Задача **контроля**: провести машину через заданные точки траектории, получая на входе саму требуемую траекторию и текущее положение автомобиля и выдавая на выход управляющие воздействия (руление, ускорение, торможение). Есть 3 подхода к решению задачи контроля, которые используются в Apollo: пропорционально-интегральная производная (PID), линейно-квадратичный регулятор (LQR), прогностический контроль модели (MPC).

В 2020 году в статье [14] представили полностью автоматический конвейер модели прогнозирования для поддержки аннотации данных различных подмодулей прогнозирования, извлечения признаков, обучения, настройки и развертывания модели, который продемонстрировал повышение эффективности настройки параметров до 400 % при масштабном развертывании в различных сценариях в разных странах.

Ошибки

Компании создают для презентаций и рекламы ролики, в которых представляют нарезку динамичных кадров с разных ракурсов в хороших условиях, на которых беспилотный автомобиль едет идеально. О качестве работы автопилота это говорит мало, в отличие от сообщений об эксплуатации от реальных пользователей.

Tesla продала большое количество своих машин с автопилотом и до недавнего времени не запрещала пользователям публиковать результаты их работы. Из этих видео, а также новостных сообщений можно заметить, что автопилот Tesla совершает много ошибок:

- автопилот не среагировал на светлый прямоугольный фургон, перегородивший дорогу, и врезался в него. Около 4 похожих случаев с 2016 года по 2020 год;
- автопилот не среагировал на припаркованные служебные машины с проблесковыми маячками в темное время суток. Выпустили обновление за пару недель после начала расследования. 12 аварий с 2018 года;
- распознал «призрака» на кладбище — в пустом пространстве обнаружил человека;

- крайне важна дорожная разметка — при въезде с неразмеченной дороги на размеченную автопилот попытался перестроиться, чуть не врезавшись в дорожное ограждение;
- распознал мальчика в оранжевой рубашке как дорожный конус;
- распознал луну как желтый сигнал светофора;
- распознал знак Burger King как знак «Стоп»;
- проектор отображал ложные знаки ограничения скорости на деревьях и фигуру пешехода на асфальте, что было распознано автопилотом как реальность.

Информации об ошибках Waymo немного. Известно, что за 10 млн км (поездки с водителем в Финиксе и окрестностях в 2019 году) автомобили Waymo попали в 18 аварий (водитель по возможности предотвращал неизбежные столкновения). Чтобы оценить, насколько хорошо автопилот справился бы без человека, Waymo повторно смоделировала ситуации, в которых водитель перехватил управление. Выяснилось, что без вмешательства произошло бы еще 29 аварий.

На презентации 2021 года CVPR'21 WAD спикер от Argo AI напомнил о том, что реальный мир еще является критически сложным для автономных систем вождения, приведя цитату из отчета [15] NTSB (Национальный совет по безопасности на транспорте) 2019 года о расследовании происшествия, в котором автомобиль (беспилотник Uber) в марте 2018 года в автономном режиме сбил насмерть пешехода, ведущего сбоку от себя велосипед: «Автоматическая система вождения несколько раз меняла классификацию пешехода, поочередно переходя между транспортным средством, велосипедом и прочим. Поскольку система никогда не классифицировала такого пешехода, а в ее конструкции исключена история отслеживания несуществующих объектов — объектов с измененной классификацией — она не могла правильно предсказать путь пешехода». Спикер отметил, что по-прежнему сложно построить устойчивую интерпретацию динамического мира.

Заклучение

В данной области есть множество проблем, с которыми столкнулись компании-производители и которые они пытаются либо решить, либо обойти. Во-первых, проблему представляют датчики, на которых основана система **восприятия**, и то, как полно с их помощью можно построить модель окружающего мира. Например, как отмечают в компании Waymo, лидар полностью ослепляется во время снега, дождя или тумана. Следовательно, Waymo много ездит в таких местах, как Феникс, Аризона, или Сан-Франциско, Калифорния, где условия постоянно сухие и солнечные.

Во-вторых, проблема, которая встанет перед производителями, когда они перейдут к созданию транспортных средств 5-го уровня автономности, — ограничения **карт высокого разрешения**, без которых их беспилотный автомобиль не может ездить. Теоретически возможное нанесение на карту всего мира является огромной проблемой с точки зрения масштаба.

В-третьих, в задачах управления (**планирование и контроль**) наблюдается тенденция заменять декларативные способы представления знаний нейронными сетями, аргументируется это лучшей работой последних. Неясно, к чему это приведет, поскольку перед искусственными нейронными сетями все еще стоит ряд нерешенных проблем: проблема полноты и верифицируемости, проблема интерпретируемости решений, проблема расчета емкости искусственной нейронной сети, проблема устойчивости к внешним воздействиям, проблема устойчивости решения.

В-четвертых, чтобы автопилот, являющийся обученной нейронной сетью, вел себя как опытный водитель (встраивался в плотный городской поток, вовремя ускорялся) в условиях разных городов, его необходимо переобучать на новых данных. Даже с учетом того, что переобучение будет осуществляться автоматически в конвейере, это является частным решением общей задачи действительно автономного автомобиля, который может двигаться в любой обстановке. Работы над обобщением частных решений не наблюдается.

Кроме того, стоят более общие вопросы, близкие к проблемам искусственного интеллекта: как выглядит действительно автономный автомобиль и как проверить его автономность, на ком лежит ответственность в случае аварии? Широко используемая в разговорах об автопилотах классификация SAE, хотя и описывает уровни автономности вплоть до 5-го, предоставляет нам лишь термины — стандарты и спецификацию требований еще предстоит создать. Для этого следует решить, как оценить качество и безопасность решения, не важно, частичной или полной, автоматизации вождения: количеством часов езды в данном режиме автомобилей компании, количеством аварий на км, разнообразием ситуаций в процессе вождения? Также предстоит решить, какие км следует считать: те, что тестирова-

лись самой компанией, те, что проехали пользователи, приобретшие продукцию компании, или вообще испытания, проводимые в виртуальной реальности.

Не стоит забывать про проблемы внедрения в эксплуатацию. Вопрос психологического доверия к автономному автомобилю без человека-водителя стоит в отдаленном будущем. Пока же используются автомобили с частичной автоматизацией вождения, которые приводят к снижению внимания, уделяемого водителем дороге, что требует повышения осведомленности пользователей и развития систем контроля за вниманием водителя.

В данной работе не рассматривалось направление «Подключенные автономные автомобили» (CAV), предлагающее подходы по частичному решению поставленных проблем, но требующее перестройки всей транспортной инфраструктуры.

Можно сделать вывод, что в настоящее время отсутствуют теоретические доказательства возможности существования полного автопилота, и основные работы ведутся над тем, чтобы доказать это практикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taxonomy and Definitions for Terms Related to Driving Automation Systems for On-Road Motor Vehicles. Ground Vehicle Standard J3016_202104*. Режим доступа: https://saemobilus.sae.org/content/j3016_202104.
2. Ashesh Jain, Luca Del Pero, Hugo Grimmett, Peter Ondruska. *Autonomy 2.0: Why is Self-Driving Always 5 Years Away?* Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/2107.08142.pdf>.
3. *Tesla AI day*. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=j0z4FweCy4M&t=5021s>.
4. Jiyang Gao, Chen Sun, Hang Zhao, Yi Shen, Dragomir Anguelov, Congcong Li, Cordelia Schmid. *VectorNet: Encoding HD Maps and Agent Dynamics from Vectorized Representation*. Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/2005.04259.pdf>.
5. Mayank Bansal, Alex Krizhevsky, Abhijit Ogale. *ChauffeurNet: Learning to Drive by Imitating the Best and Synthesizing the Worst. Robotics: Science and Systems 2019*. Режим доступа: <http://roboticsproceedings.org/rss15/p31.pdf>.
6. *How Openpilot Works in 2021*. Режим доступа: <https://blog.comma.ai/openpilot-in-2021/>.
7. Mariusz Bojarski, Davide Del Testa, Daniel Dworakowski, Bernhard Firner, Beat Flepp, Praseem Goyal, Lawrence D. Jackel, Mathew Monfort, Urs Muller, Jiakai Zhang, Xin Zhang, Jake Zhao, Karol Zieba. *End to End Learning for Self-Driving Cars*. Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/1604.07316.pdf>.
8. *Argo AI. Developing a Self-Driving System You Can Trust. Safety Report*. Режим доступа: <https://www.argo.ai/wp-content/uploads/2021/04/ArgoSafetyReport.pdf>.
9. Sammy Sidhu, Qiangui (Jack) Huang, Ray Gao. *How Lyft Uses PyTorch to Power Machine Learning for Their Self-Driving Cars*. Режим доступа: <https://medium.com/pytorch/how-lyft-uses-pytorch-to-power-machine-learning-for-their-self-driving-cars-80642bc2d0ae>.
10. Luca Bergamini, Vladimir Iglovikov, Filip Hlasek, Peter Ondruska. *How to Build a Motion Prediction Model for Autonomous Vehicles*. Режим доступа: <https://medium.com/wovenplanetlevel5/how-to-build-a-motion-prediction-model-for-autonomous-vehicles-29f7f81f1580>.
11. Савицкий Г. *Взгляд на ADAS изнутри: когда поедет робот?* Режим доступа: <https://habr.com/ru/company/cognitivepilot/blog/524236/>.
12. Чистяков А. *Как Яндекс делает обычные автомобили беспилотными*. Режим доступа: <https://habr.com/ru/company/yandex/blog/585444/>.
13. *Apollo. Developer Center*. Режим доступа: <https://apollo.auto/devcenter/devcenter.html>.
14. Kecheng Xu, Xiangquan Xiao, Jinghao Miao, Qi Luo. *Data Driven Prediction Architecture for Autonomous Driving and its Application on Apollo Platform*. Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/2006.06715.pdf>.
15. *Collision Between Vehicle Controlled by Developmental Automated Driving System and Pedestrian*. Tempe, Arizona, March 18, 2018. National Transportation Safety Board. 2019. Режим доступа: <https://www.nts.gov/investigations/accidentreports/reports/har1903.pdf>.

Сетевое издание. Полные тексты статей размещаются на официальном сайте издания jcyb.ru.

Адрес учредителя и издателя:

Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,
117218, г. Москва, Нахимовский просп., дом 36, корпус 1. Телефон: +7 (495) 718-21-10.

Дата выхода в свет 12.05.2022.

Формат 60 × 84/8.

Усл. печ. л. 6,6. Уч.-изд. л. 9,8.

Цена свободная.