# VOTEXIA KIABEPHETIAKIA

## RUSSIAN JOURNAL OF CYBERNETICS

Выпуск посвящён 35-летию Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»

\* \* \*

Dedicated to 35<sup>th</sup> Anniversary of
the Federal State Institution
"Scientific Research Institute for System
Analysis of the Russian Academy of Sciences"

| 2021 T. 2 № 4

### ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

## Успехи кибернетики

## Russian Journal of Cybernetics

**Tom 2** 

**№** 4

Vol. 2

No. 4

Москва

2021

#### Учредитель и издатель

Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН)

«Успехи кибернетики» — это рецензируемый научный журнал, в котором публикуются научные статьи по следующим специальностям (физико-математические, технические науки):

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ;
- 2.2.2. Электронная компонентная база микро- и наноэлектроники, квантовых устройств;
- 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации.

Миссия журнала — развитие научных направлений по заявленной тематике в России и за рубежом, соответствующих приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в Российской Федерации, а также перечню критических технологий РФ.

Журнал ориентирован на пропаганду передовых идей в области физики, математики, технических наук, участие в реализации задач, сформулированных Президентом РФ в Указе от 01.12.2016 № 642, по научнотехнологическому развитию РФ, а также импортозамещению по приоритетным направлениям стратегического развития страны, соответствующим тематике журнала, обеспечение печатными площадями высококвалифицированных кадров, повышение качества диссертационных исследований в данных отраслях путем развития механизма профессионального и общественного обсуждения их научных результатов, воспитание молодого поколения ученых.

Журнал принимает к публикации оригинальные статьи; переводы статей, опубликованных в зарубежных журналах (при согласии правообладателя на перевод и публикацию); обзоры; эссе; комментарии; другие информационные материалы.

Издание будет полезно ученым, работающим в соответствующих областях наук, а также аспирантам и студентам.

#### Главный редактор

*Бетелин Владимир Борисович*, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва **Заместитель главного редактора** 

Заместитель главного редактора

Галкин Валерий Алексеевич, д. ф.-м. н., профессор, редистигель и филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Сургут

Члены редакционной коллетин

Власов Сергей Евгеньевич, д. т. н., директор, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва

Панченко Владислав Яковлевич, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, председатель Совета, Российский фонд фундаментальных исследований; заведующий кафедрой медицинской филики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Савин Геннадий Иванович, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель, Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН — филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва Сайдов Вилиал Александрович, загалении РАН, д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель, Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН — филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва Сайдов Вилиал Александрович, загалении РАН, д. т. н. профессор, научный руководитель, Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН — филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, москва

Сойфер Виктор Александрович, академик РАН, д. т. н., профессор, президент, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории автоматизированных систем научных исследований, Самарский национальный исследовательский университет им. ак. С. П. Королева, Институт систем обработки изображений РАН, Самара Чубариков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа,

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва Чаплыгин Юрий Александрович, академик РАН, д. т. н., профессор, президент, Московский институт электронной техники, Москва

Петров Игорь Борисович, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой информатики, Московский физико-технический институт, Москва Смирнов Николай Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, заместитель декана механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Смирнов гиколаевич, д. ф.-м. н., профессор, заместитель декана механико-математического факультета, московскии государственный университет им. М. В. Ломоносова, заместитель директора по стратегическим информационным технологиям, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, профессор, корфессор кафедры вычислительных методов, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва Губайдуллин Амир Анварович, д. ф.-м. н., профессор, директор, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения

РАН. Тюмень

Якобовский Михаил Владимирович, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, заместитель директора по научной работе, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва Шагалиев Рашит Мирзагалиевич, д. ф.-м. н.

Старков Сергей Олегович, д. ф.-м. н., профессор, начальник отделения интеллектуальных кибернетических систем, Обнинский институт атомной энергетики, Обнинск Еськов Валерий Матвеевич, д. ф.-м. н., д. б. н., профессор, заведующий отделом, Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Сургут Лаврентьев Михаил Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск Пятков Сергей Григорьевич, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск Ильын Валерий Павлович, д. ф.-м. н., профессор, важделый мадематики, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск Крыжановский Борис Владимирович, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., руководитель, Центр оптико-нейронных технологий ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Москва Нагорнов Олег Викторович, д. ф.-м. н., профессор, первый проректор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва Савченко Владимир Васильевич, PhD (Theoretical Mechanics), Университет Хосэй, Токио, Япония

Земпо Ясунари, PhD (Physics), Университет Хосэй, Токио, Япония
Пападопулос Атанас, Doctorat d'Etat (Habilitation), mathematics, Университет Страсбурга, Национальный центр научных исследований Франции, Страсбург, Франция

#### Ответственный секретарь

Гавриленко Тарас Владимирович, к. т. н. Ответственный редактор Чалова Анна Петровна, к. филол. н. Технический редактор Моргун Дмитрий Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент Редактор Камилов Эркин Махмуджанович **Переводчик** Троицкий Дмитрий Игоревич, к. т. н., доцент **Художественное оформление обложки**© Горбунов Александр Сергеевич

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77-78857 от 04.08.2020.

Издается с 2020 года. Выпускается 4 раза в год. Адрес редакции:

Адрес редавции:
ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 117218, г. Москва, Нахимовский просп., дом 36, корпус 1.
Телефон: +7 9226-54-57-88, факс: +7 (495) 719-76-81, e-mail: taras.gavrilenko@gmail.com. Сайт: jcyb.ru.

#### Founder and Publisher

#### Federal State Institution

Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences (SRISA)

Russian Journal of Cybernetics is peer-reviewed.

The journal publishes papers on physics, mathematics, and engineering. The key areas of interest are:

- simulation, numerical methods, and simulation software
- electronic components for micro- and nanoelectronics, and quantum devices
- system analysis, control, and information processing.

Our mission is advancing these research areas in Russia and globally, supporting the national priority fields of research and development, and the critical technologies.

The Journal promotes advanced concepts in physics, mathematics, engineering, and facilitates the national research and technology development under the Russian President Decree No. 642 dated 01.12.2016, and phasing out strategic imports. We offer an opportunity for professional researchers to publish. We improve the doctorate research quality through public peer review and educate the new generation of researchers.

The Journal accepts original papers; translations of papers from international journals (consent of the right holders for the translation and publication is required); reviews; essays; remarks, and event reports.

The Journal is intended for researchers, university, and doctorate students.

#### Chief Editor

Prof. Vladimir B. Betelin, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Academic Director, SRISA, Moscov Vice Chief Editor

Prof. Valery A. Galkin. Doctor of Science (Phys&Math), Director, SRISA, Surgut Branch, Surgut

#### Editorial Board

Prof. Sergey E. Vlasov, Doctor of Science (Engineering), Director, SRISA, Moscow
Prof. Vladislav Ya. Panchenko, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Chairman of the Council, Russian Foundation for Basic Research, Chairperson of the Department of Medical Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscov

Prof. Gennady I. Savin, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Academic Director, Joint Supercomputer Center of the Russian Academy of Sciences, SRISA subdivision, Moscow

Prof. Viktor A. Soifer, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Engineering), President, Chief Researcher Lab for Automated Research Systems, Korolev Samara National Research University, Academic Director, Institute of Image Processing Systems, RAS, Samara

Prof. Vladimir N. Chubarikov, Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Mathematical and Computer Analysis Methods, Lomonosov Moscow State University, Moscow Prof. Yuri A. Chaplygin, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Engineering), President, National Research University of Electronic Technology, Moscow Prof. Igor B. Petrov, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Informatics,

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow

Prof. Nikolay N. Smirnov, Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Dean, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Deputy Director for Strategic Information Technology, SRISA, Moscow

Prof. Vladimir F. Tishkin, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Professor, Department of Computational Methods, Lomonosov Moscow State University, Moscow

Prof. Amir A. Gubaidullin, Doctor of Science (Phys&Math), Director, Tyumen Division, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, RAS Siberian Branch, Tyumen Prof. Mikhail V. Iakobovski, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Director for Research, Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow Prof. Rashit M. Shagaliyev, Doctor of Science (Phys&Math)

Prof. Sergey O. Starkov, Doctor of Science (Phys&Math), Head, Division of Intelligent Cybernetic Systems, Obninsk Institute of Atomic Energy, Obninsk Prof. Valery M. Eskov, Doctor of Science (Phys&Math), Doctor of Science (Biology), Head of Division, SRISA, Surgut Branch, Surgut Prof. Mikhail M. Lavrentiev, Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Director for Research, Institute of Automation and Electrometry, RAS Siberian Branch, Novosibirsk Prof. Sergey G. Pyatkov, Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Further Mathematics, Yugra State University, Khanty-Mansiysk Prof. Valerii P. Ilyin, Doctor of Science (Phys&Math), Professor, Department of Applied Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk Prof. Boris V. Kryzhanovskii, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Director, Opto-neural Technologies Center, Scientific Research

Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences (SRISA), Moscow
Prof. Oleg V. Nagornov, Doctor of Science (Phys&Math), First Vice-Rector, National Research Nuclear University MEPhI, Moscow

Prof. Vladimir V. Savchenko, PhD (Theoretical Mechanics), Hosei University, Tokyo, Japan Prof. Yasunari Zempo, PhD (Physics), Hosei University, Tokyo, Japan Prof. Athanase Papadopoulos, Doctorat d'Etat (Habilitation), Mathematics, University of Strasbourg, French National Centre for Scientific Research, Strasbourg, France

#### **Executive Editor**

Taras V. Gavrilenko, Ph.D. (Engineering)

Managing Editor Anna P. Chalova, Ph.D. (Linguistics)

Technical Editor Dmitry A. Morgun, Ph.D. (Phys&Math), Assoc. Prof. Editor

Erkin M. Kamilov Translator

Dmitry I. Troitsky, Ph.D. (Engineering), Assoc. Prof.

Cover Design

(C) Alexander S. Gorbunov

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media Mass media registration certificate EL No. FS 77-78857 dated on 04.08.2020. Published since 2020. 4 issues per year.

Editorial Board Address SRISA, Russia 117218, Moscow, Nakhimovsky pr., 36/1. Tel.: +7(922)654-5788, fax: +7(495)719-76-81, e-mail: taras.gavrilenko@gmail.com. Web: jcyb.ru.

## СОДЕРЖАНИЕ

в. Б. Бетелин, В. А. Галкин	
Математические задачи, связанные с искусственным интеллектом и искусственными нейронны-	
ми сетями	6
Б. В. Крыжановский, Н. Н. Смирнов, В. Ф. Никитин, Я. М. Карандашев,	
М. Ю. Мальсагов, Е. В. Михальченко	
Использование нейронных сетей для моделирования задач горения	15
Н. Н. Смирнов, В. В. Тюренкова, В. Ф. Никитин	
Цифровые модели для решения многомасштабных задач горения	30
Б. В. Крыжановский, Л. Б. Литинский	
Статфизические свойства оптической нейросети, основанной на процессах четырехволнового	
смешения	42
А. Г. Леонов, М. А. Матюшин, М. С. Дьяченко	
Об опыте построения априорной оценки успеваемости студентов в системе Мирера с использо-	
ванием нейронных сетей	49
В. Б. Бетелин, Д. А. Моргун	
О необходимости создания интеллектуальных средств управления системами с критической мис-	
сией	60
В. А. Галкин	
Математические задачи, связанные с трафиком взаимодействующих роботизированных транс-	
портных средств	67
В. Б. Бетелин, В. А. Галкин	
О проблеме снижения размерности сеточных аппроксимаций	75
С. Г. Вольпин, О. В. Ломакина, И. В. Афанаскин, В. А. Юдин	
Обоснование гидродинамической модели пласта-коллектора баженовской свиты	78
В. П. Кощеев	
К задаче построения определителя Якоби	87
Г. Е. Деев, С. В. Ермаков	
R-компьютеры: генезис иззвитие припожения	90

## **CONTENTS**

V. B. Betelin, V. A. Galkin	
Mathematical Problems of Artificial Intelligence and Artificial Neural Networks	6
B. V. Kryzhanovsky, N. N. Smirnov, V. F. Nikitin, Ia. M. Karandashev, M. Yu. Malsagov,	
E. V. Mikhalchenko	
Neural Networks Applications to Combustion Process Simulation	15
N. N. Smirnov, V. V. Tyurenkova, V. F. Nikitin	
Simulation Models for Solving Multiscale Combustion Problems	30
B. V. Kryzhanovsky, L. B. Litinsky	
Statistical Physical Properties of Four-Wave Mixing Optical Neural Network	42
A. G. Leonov, M. A. Matyushin, M. S. Dyachenko	
A Neural Network-Based Approach to A Priori Assessment of the Student Academic Performance in	
the Mirera Digital Learning Platform	49
V. B. Betelin, D. A. Morgun	
On the Need to Create Intelligent Control Systems for Systems with a Critical Mission	60
V. A. Galkin	
Mathematical Problems of Collaborating Robotic Vehicle Traffic	67
V. B. Betelin, V. A. Galkin	
Reducing the Dimensionality of Grid Approximations	75
S. G. Volpin, O. V. Lomakina, I. V. Afanaskin, V. A. Yudin	
Feasibility of the Bazhenov Formation Reservoir Hydrodynamic Model	78
V. P. Koshcheev	
On the Jacobian Construction	87
G. E. Deev, S. V. Ermakov	
B-Computers: Genesis, Evolution, and Applications	90

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-1

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ИСКУССТВЕННЫМ ИНТЕЛЛЕКТОМ И ИСКУССТВЕННЫМИ НЕЙРОННЫМИ СЕТЯМИ

#### **В. Б. Бетелин**<sup>1</sup>, **В. А. Галкин**<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,

- г. Москва, Российская Федерация, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6646-2660, betelin@inbox.ru
- <sup>2</sup> Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,
- г. Сургут, Российская Федерация, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

Аннотация: предложен общий топологический подход для анализа искусственных нейронных сетей на основе симплициальных комплексов и свойств аппроксимации непрерывных отображений их симплициальными приближениями. Выявлены существенные для этого класса задач явления вычислительной неустойчивости, связанной с общими проблемами некорректных задач в гильбертовом пространстве и методами их регуляризации, типичными для обработки Big Data. Сформулированы критерии точности и применимости моделей искусственных нейронных сетей, рассмотрены примеры их реализации на основе теории интерполяции функций. Развитие идей П.Л.Чебышёва о наилучшем приближении служит отправной точкой для широкого класса математических исследований по оптимизации обучающих наборов для построения ИНС.

*Ключевые слова*: искусственные нейронные сети, методы оптимизации, вычислительная неустойчивость, методы регуляризации.

*Благодарности*: работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (проведение фундаментальных научных исследований (47 ГП) по теме 0580–2021–0019, FNEF–2021–0019, per. № 121031300099–5).

Для цитирования: Бетелин В. Б., Галкин В. А. Математические задачи, связанные с искусственным интеллектом и искусственными нейронными сетями. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):6–14. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-1.

## MATHEMATICAL PROBLEMS OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

#### V. B. Betelin<sup>1</sup>, V. A. Galkin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Moscow, Russian Federation, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6646-2660, betelin@inbox.ru
<sup>2</sup> Surgut Branch of Federal State Institute "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Surgut, Russian Federation, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

Abstract: we propose a general topological approach to the analysis of artificial neural networks using simplicial complexes and the approximation of continuous mappings with simplicial ones. The essential properties of numerical instability in such problems were identified. It is associated with ill-posed problems in Hilbert space and regularization methods typically applied to Big Data processing. We formulated the criteria of artificial neural network accuracy and applicability and included some implementation examples based on the interpolation theory. Advancing P.L. Chebyshev's ideas about the best approximation may be an entry point to various mathematical research on artificial neural network training dataset optimization.

Keywords: artificial neural networks, optimization methods, numerical instability, regularization methods.

*Acknowledgements*: this study is a part of the Scientific Research Institute for System Analysis (Russian Academy of Sciences) government contract for basic research (47 GP), research area 0580–2021–0019, FNEF–2021–0019, Reg. No. 121031300099–5.

Cite this article: Betelin V. B., Galkin V. A. Mathematical Problems of Artificial Intelligence and Artificial Neural Networks. *Russian Journal of Cybernetics*. 2021;2(4):6–14. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-1.

Во многочисленных вычислительных экспериментах по распознаванию образов, обработке акустической, видео и текстовой информации были найдены подходы к созданию программного обеспечения для практического решения ряда трудно формализуемых задач. Эти успехи породили огромный поток работ и интерес к созданию полуэмпирических методов, носящих название искусственные нейронные сети (ИНС).

Общий подход, лежащий в основе построения ИНС, состоит в принятии гипотезы возможности создания устройства, которое можно обучить на серии примеров принятию решений. Эта размытая формулировка предполагает наличие некоторой связи между выбранными парами объектов  $(x,y) \in X \times Y$ , определяющей некоторое отношение  $R \subset X \times Y$  (гипотетический закон) [1]. Обычно предполагается, что R является функцией (т.е. каждому значению  $x \in X$ соответствует ровно одно значение  $y \in Y$ ), при этом аргументы X называются причинами, а множество значений Y — следствиями. Схематически ИНС является параллельной системой распределенной обработки информации в виде ориентированного графа, где вершины графа называются обрабатывающими элементами (искусственные нейроны), а связи между ними называются соединениями. Таким образом, ИНС представляет собой граф — систему узлов, соединенных связями и обменивающихся между собой входными-выходными данными (см., например, рисунок).

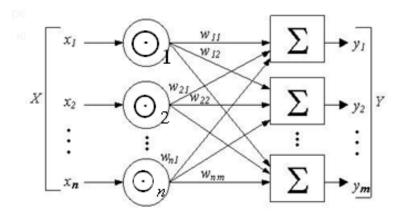


Рис. Пример блок-схемы структуры элементарной ячейки одного слоя ИНС

Каждый узел в сети получает и передает сигналы, которые он преобразовывает через некоторую систему заданных отображений  $\odot$  (т.е. искусственные нейроны, вообще говоря, различные для разных узлов). Далее преобразованные сигналы умножаются на весовые коэффициенты  $w_{i,j}$  в процессе передачи данных по линиям соединения между вершинами i и j графа, а затем полученные значения суммируются при поступлении на сумматоры  $\sum$ , формируя выходную информацию описанного слоя нейронной сети. Полученные данные могут быть повторно подвергнуты аналогичной обработке и т.д. до формирования конечного выходного сигнала  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_m$ .

Такие графы с заданными функциями преобразования сигналов при соответствующей настройке способны реализовывать различные классы математических алгоритмов.

Базовая элементарная ячейка графа ИНС (так называемый один слой ИНС) приведена на рис., где входные данные  $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_n$  некоторым образом преобразуются в выходные данные  $y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}_m$ . Такие ячейки могут комбинироваться, вообще говоря, произвольным образом, когда выходные данные одного слоя передаются соединениями графа на другой слой (включая организацию обратных связей). Граф, составленный из таких ячеек, с дополнительной надстройкой в виде алгоритма преобразования данных в вершинах и на их связях назовем реализацией ИНС.

Настройка ИНС (аналог процедуры автоматизированного программирования структуры ИНС) состоит в подборе семейства искусственных нейронов (преобразований, обозначаемых на рис. значками  $\odot_1, \odot_2, \ldots, \odot_n$  в вершинах графа) и коэффициентов  $w_{i,j}$  умножения сигналов вдоль линий соеди-

нения вершин на основе дополнительно декларируемых принципов (например, оптимизации). Набор обучающих примеров составляет заданное подмножество  $\tilde{R} \subset R$ , где отношение R априори неизвестно. Целью создания ИНС является в некотором смысле «оптимальная реконструкция» неизвестного отношения R на основе заданного «обучающего» набора  $\tilde{R}$ . По своей природе такая постановка задачи является некорректной ввиду существенной множественности ее решений («школьная» задача об отыскании кривой, соединяющей заданный набор точек). Таким образом, необходимым элементом построения ИНС служит введение целевого правила (критерия, функционала и т.п.) F, на основе применения которого выполняется построение «наилучшего» продолжения заданного отношения  $\tilde{R}$  до отношения  $R_F$ , которое аппроксимирует R (например, посредством минимизации функционала F на некотором множестве параметров). Назовем  $R_F$  математической моделью реализации ИНС. Описанная схема обычно применяется для построения продолжения функций, в частности, в задачах интерполяции.

Типичная постановка теории приближенного вычисления значений функции R на множестве аргументов  $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D\subset\mathbb{R}_n$  заключается в выборе оптимального многопараметрического приближения из заданного множества функций  $\bar{R}(x,w_1,w_2,\ldots,w_k)\approx R(x)$ , где  $(w_1,w_2,\ldots,w_k)$  — множество параметров, по которым проводится вышеупомянутая оптимизация. Например, для заданных значений аргументов  $\bar{x}^{(l)}\in D,\ l=1,2\ldots,N$ , требуется выполнение минимальности уклонения нормы  $F(w_1,w_2,\ldots,w_k)=\max_{1\leq l\leq N}||\bar{R}(\bar{x}^{(l)},w_1,w_2,\ldots,w_k)-\bar{y}^{(l)}||$  в предположении, что пары  $(\bar{x}^{(l)},\bar{y}^{(l)}),\ 1\leq l\leq N$ , находятся в заданном отношении  $\bar{R}$ . Такой подход типичен для задач прогноза, регрессии, построения интерполяционных многочленов [2]. Если условие минимума уклонения означает совпадение значений  $\bar{y}^{(l)}=R(\bar{x}^{(l)})=\bar{R}(\bar{x}^{(l)},w_1,w_2,\ldots,w_k),\ 1\leq l\leq N$ , то такой способ построения приближения называется интерполяцией (в этом случае целевой функционал  $F(w_1,w_2,\ldots,w_k)$ ) в точке оптимума принимает наименьшее значение, равное нулю). Отметим, что определение функционала F может быть осуществлено разными способами на основе экспертных оценок выбора метрик (расстояний) на множестве значений Y, определяющих цели решаемых задач. Такого сорта проблемы возникают при планировании экспериментов в естественных науках, в экономике, при построении алгоритмов распознавания образов, при решении обратных задач классификации объектов, при проектировании систем управления, наведения, прицеливания, навигации и т. п. [2].

Остановимся на наиболее изученном примере построения интерполяционных многочленов как прообразе математических проблем, возникающих при создании ИНС.

Пусть на отрезке числовой прямой  $x\in X=[a,b]$  заданы точки  $a\leq \tilde{x}^{(1)}<\tilde{x}^{(2)}<\cdots<\tilde{x}^{(N)}\leq b$  (узлы интерполяции), которым соответствуют значения  $\tilde{y}^{(l)},l=1,2,\ldots,N$ , так что  $\tilde{R}=\{(\tilde{x}^{(1)},\tilde{y}^{(1)}),(\tilde{x}^{(2)},\tilde{y}^{(2)}),\ldots,(\tilde{x}^{(N)},\tilde{y}^{(N)})\}$ . Положим, что аппроксимирующее семейство задается многочленами:

$$\bar{R}(x, w_1, w_2, \dots, w_N) = \sum_{i=1}^{N} w_i x^{i-1}$$
 (1)

с вещественными коэффициентами  $w_i$ . Оптимизационная задача об отыскании неопределенных коэффициентов  $w_i$  на основе обращения в нуль значений функционала:

$$F(w_1, w_2, \dots, w_k) = \max_{1 \le l \le N} |\bar{R}(\tilde{x}^{(l)}, (w_1, w_2, \dots, w_k) - \tilde{y}^{(l)}|)$$

в этом случае приводит к известной системе линейных алгебраических уравнений с определителем Вандермонда, а соответствующий интерполяционный многочлен (1) в форме Лагранжа имеет следующий стандартный вид [2]:

$$R_F(x) = \sum_{i=1}^N \tilde{y}^{(i)} \frac{\omega_N(x)}{\omega_N'(\tilde{x}^{(i)})(x - \tilde{x}^{(i)})}, \qquad \omega_N(x) = \prod_{i=1}^N (x - \tilde{x}^{(i)}).$$
 (2)

Таким образом, в соответствии с блок-схемой на рис. интерполяционный многочлен (2) можно считать реализацией ИНС с одним входным скалярным входом  $x \in \mathbb{R}$  и скалярным выходом  $y = R_F(x) \in \mathbb{R}$ . При этом искусственные нейроны в N вершинах однослойной ИНС получают входной сигнал x, преобразовывают его по формулам, которые назовем нейронами Лагранжа:

$$\odot_i(x) = \frac{\omega_N(x)}{\omega_N'(\tilde{x}^{(i)})(x - \tilde{x}^{(i)})}, \qquad 1 \le i \le N.$$

Выходные сигналы с каждого искусственного нейрона Лагранжа  $\odot_i(x)$  умножаются на коэффициенты  $w_i = \tilde{y}^{(i)}$  и поступают на сумматор  $\sum$ , формируя по формуле (2) выходной сигнал y. (Альтернативной реализацией такой ИНС может считаться искусственный нейрон, напрямую заданный формулой (2).)

Отметим важные понятия для более общих ИНС, которые ассоциируются с рассмотренным примером:

1. Емкость памяти ИНС, определяемая объемом обучающего набора:

$$\tilde{R}_N = \{ (\tilde{x}^{(1)}, \tilde{y}^{(1)}), (\tilde{x}^{(2)}, \tilde{y}^{(2)}), \dots, (\tilde{x}^{(N)}, \tilde{y}^{(N)}) \}.$$

- 2. Точность ИНС по приближению заданного класса аппроксимируемых отношений R. Достижимость поставленных целей.
  - 3. Скорость обучения ИНС на основе заданного алгоритма F.
- 4. «Гибкость» ИНС по отношению к перенастройке ее структуры (а именно, к динамическому изменению набора функций искусственных нейронов  $\odot_i$ , правил выбора весовых коэффициентов  $w_i$ , обучающего набора  $\tilde{R}_N$  и т.п.).
  - 5. Быстродействие ИНС.
  - 6. Устойчивость получаемых выходных данных при изменениях входных данных.
  - 7. Реализуемость вычислительных процедур на искусственных нейронах, их надежность.
  - 8. Зависимость точности и быстродействия ИНС от ее размерности.
- 9. Возможность автоматического понижения размерности ИНС в процессе эксплуатации с целью оптимизации ее характеристик.
  - 10. Отказоустойчивость, резервирование функций и помехозащищенность ИНС.
- 11. Совместимость с другими ИНС за счет расширения структуры на основе сращивания их графов и взаимного обмена данными.
- 12. Топологические инварианты структуры ИНС и гомотопическая эквивалентность различных реализаций ИНС.

Отметим, что содержание п. 11 относится к комплексу, составленному из ИНС различной природы, который можно охарактеризовать как приближение систем искусственного интеллекта (ИИ).

Что касается возникающих проблем с точностью ИНС при неограниченном наращивании объема обучающей совокупности  $\tilde{R}$ , то здесь показательными являются примеры К.Д.Т. Рунге [3] и С.Н. Бернштейна [4] для интерполяционных многочленов с неограниченным увеличением количества узлов интерполяции.

**Пример 1. (К.Д.Т. Рунге, 1901 г.)** Рассмотрим на отрезке X = [-1,1] интерполяцию функции (построение ИНС):

$$R(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

по обучающему набору  $\tilde{R} = \{(\tilde{x}^{(1)}, \tilde{y}^{(1)}), (\tilde{x}^{(2)}, \tilde{y}^{(2)}), \dots, (\tilde{x}^{(N)}, \tilde{y}^{(N)})\}$ , где  $\tilde{x}^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq N$  образуют равномерную сетку на X, а  $\tilde{y}^{(i)} = R(\tilde{x}^{(i)})$ . Тогда при неограниченном увеличении числа узлов интерполяции (число искусственных нейронов в ИНС  $N \to \infty$ ) последовательность аппроксимаций (2) расходится на интервале  $0.726 \dots \leq |x| \leq 1$ . Таким образом, имеем:

$$\lim_{N\to\infty} \max_{-1\leq x\leq 1} |R(x)-R_F(x)|\to\infty.$$

Следует подчеркнуть, что аппроксимируемая функция Rявляется аналитической в окрестности действительной оси. Особенности типа полюса первого порядка у аналитического продолжения функции R на комплексную плоскость находятся в точках  $\pm \frac{1}{5}i$ .

**Пример 2. (С.Н. Бернштейн, 1912 г.)** На отрезке X = [-1,1] рассмотрим интерполяцию функции (построение ИНС):

$$R(x) = |x|$$
.

Тогда последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа  $R_F$  (2), построенных на равномерных сетках при условии, что  $\tilde{x}^{(1)} = -1$ ,  $\tilde{x}^{(N)} = 1$ , не стремится при неограниченном возрастании объема  $N \to \infty$  обучающего набора  $\tilde{R}_N = \{(\tilde{x}^{(1)}, \tilde{y}^{(1)}), (\tilde{x}^{(2)}, \tilde{y}^{(2)}), \dots, (\tilde{x}^{(N)}, \tilde{y}^{(N)})\}$  к значениям функции R(x) = |x| ни в одной точке отрезка X = [-1,1], отличной от точек x, равных трем значениям -1; 0; 1.

В. В. Ветелип, В. А. Галкип
Математические задачи, связанные с искусственным интеллектом и искусственными нейпонными сетями

Более того, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1. (Г. Фабер [5].)** Для любой интерполяционной таблицы размерности N найдутся непрерывная функция и точка  $x \in X = [a,b]$  такие, что интерполяционные многочлены (2) не сходятся к указанной функции в точке x при  $N \to \infty$ .

Примеры Рунге, Бернштейна и общий результат Фабера указывают на возможность глубокого заблуждения, что неограниченное наращивание нейронов в ИНС и большие объемы данных  $N\gg 1$  (Big Data), положенные в основу обучающих наборов  $\tilde{R}_N$ , могут обеспечить ее эффективность в рамках ИИ. То же относится ко многим утверждениям о построении так называемых «цифровых двойников» за счет безграничного наращивания обучающих наборов данных  $\tilde{R}_N=\{(\tilde{x}^{(1)},\tilde{y}^{(1)}),(\tilde{x}^{(2)},\tilde{y}^{(2)}),\dots,(\tilde{x}^{(N)},\tilde{y}^{(N)})\}.$ 

Указанные замечания относятся к общей фундаментальной проблеме анализа вычислительной устойчивости ИНС при наращивании объемов обучающих наборов и как следствие — границ реализуемости и безопасной применимости систем ИИ, построенных на комплексах взаимодействующих ИНС.

Подчеркнем, что классическая теорема Вейерштрасса [5] о плотности множества многочленов в пространстве непрерывных функций на компакте позволяет утверждать существование сходящихся ИНС, построенных на базе многочленов (1), но теорема Фабера, а также примеры К.Д.Т. Рунге и С.Н. Бернштейна указывают на риски возникновения значительных ошибок при применении ИНС, построенных на базе обучающих множеств  $\tilde{R}_N$  при  $N\gg 1$ .

Отметим, что на практике при построении ИНС не используются нейроны Лагранжа. В рамках вычислительных экспериментов подобран ряд искусственных нейронов, однако обоснованность их применения требует будущего детального исследования и ответов на вопросы относительно свойств ИНС, указанные в пп. 1–12. Примером популярных функций инициализации искусственного нейрона

в вычислительных экспериментах является 
$$\odot_a(x) = x\Theta(x-a)$$
,  $a \in \mathbb{R}$ , где  $\Theta(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \\ \end{array} \right.$ 
— функция Хевисайда (индикатор-функция множества неотрицательных чисел). По сути, это напра

— функция Хевисайда (индикатор-функция множества неотрицательных чисел). По сути, это напрямую связано с реализацией простейшего интерполяционного кусочно-линейного сплайна  $R_F$  [6] на заданных значениях  $\tilde{R}_N = \{(\tilde{x}^{(1)}, \tilde{y}^{(1)}), (\tilde{x}^{(2)}, \tilde{y}^{(2)}), \dots, (\tilde{x}^{(N)}, \tilde{y}^{(N)})\}$  функции  $R(\tilde{x}^{(i)}) = \tilde{y}^{(i)}$ , где на каждом участке линейности  $R_F$  справедливо соотношение:

$$R_F(x) = \tilde{y}^{(i)} + \frac{\tilde{y}^{(i+1)} - \tilde{y}^{(i)}}{\tilde{x}^{(i+1)} - \tilde{x}^{(i)}}(x - \tilde{x}^{(i)}), \quad \tilde{x}^{(i)} \le x \le \tilde{x}^{(i+1)}.$$

Очевидно, что имеет место формула:

$$R_F(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \left( \tilde{y}^{(i)} + \frac{\tilde{y}^{(i+1)} - \tilde{y}^{(i)}}{\tilde{x}^{(i+1)} - \tilde{x}^{(i)}} \odot_{\tilde{x}^{(i)}} (x) \right) \left( 1 - \Theta(x - \tilde{x}^{(i+1)}) \right) \Theta(x - \tilde{x}^{(i)}), \tag{3}$$

определяющая симплициальную (непрерывную кусочно-линейную) аппроксимацию  $R_F(x)$  отображения Rна симплициальном комплексе  $(\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \dots, \tilde{x}^{(N)})$ . Формулы (3) имеют естественное обобщение на многомерные симплициальные комплексы [7].

Важно отметить, что симплициальные аппроксимации многомерных непрерывных отображений на симплициальных компактных комплексах имеют четко выраженную структуру ИНС (которую назовем симплициальной ИНС), представленную на рис. Процедура барицентрического подразделения симплициальных комплексов [7] на компактах в сочетании с равномерной непрерывностью отображений на них позволяет утверждать, что таким образом построенные симплициальные ИНС  $R_F$  равномерно сходятся к R на компактах при диаметре  $\delta_N > 0$  барицентрических подразделений комплекса, стремящемся к нулю:

$$||R_F - R||_C \to 0$$
,  $N \to \infty$ ,  $\delta_N \to 0$ .

Подчеркнем, что скорость сходимости симплициальной ИНС на комплексе K для произвольных непрерывных отображений R определяется модулем непрерывности  $\omega_R(\delta) = \sup_{||u-v|| < \delta} ||R(u)-R(v)||_{C(K)}, \, \delta > 0.$ 

Нетрудно убедиться, что погрешность приближения  $||R_F - R||_C$  на симплициальном комплексе K, являющемся компактом в  $\mathbb{R}_n$ , оценивается сверху величиной  $\omega_R(\delta)$ , где  $\delta>0$  — точная верхняя грань диаметра симплексов в комплексе K=D, на котором определено отображение R со значениями в

 $\mathbb{R}_m$ . Действительно, на каждом симплексе T, входящем в симплициальный комплекс K, справедлива формула:

$$R_F(x) = \sum_{i=0}^n \mu_i R(a_i) x = \sum_{i=0}^n \mu_i a_i \in T, \mu_i \ge 0, \qquad \sum_{i=0}^n \mu_i = 1,$$

где  $\mu_i$  — барицентрические координаты точки x в симплексе T, натянутом на вершины  $a_i$ ,  $0 \le i \le n$ , n — размерность симплекса T. Таким образом, поскольку диаметр симплекса T не превосходит  $\delta > 0$ , то:

$$||R(x) - R_F(x)||_{\mathbb{R}_m} \le \sum_{i=0}^n \mu_i ||R(x) - R_F(a_i)||_{\mathbb{R}_m} \le \omega_R(\delta).$$

Следовательно, получается оценка сверху для объема N обучающего набора  $\tilde{R}_N$  симплициальной ИНС:

$$N \ge (n+1)\operatorname{vol}(K)\delta^{-1}$$
,

где vol(K) — оценка объема симплициального комплекса K. Отметим, что в сочетании с заданной точностью ИНС  $\varepsilon$ , выраженной через модуль непрерывности  $\omega_R(\delta)$ , получаем условие:

$$\varepsilon \approx \omega_R \left( \frac{(n+1)\mathrm{vol}(K)}{N} \right).$$
 (4)

В частности, для гладкого отображения R погрешность приближения  $R_F$  на комплексе K пропорциональна величине  $N^{-1}$ . Однако в большинстве практических задач разумная априорная информация о модуле непрерывности  $\omega_R$  отсутствует, что приводит к возможности грубых ошибок аппроксимации при интуитивном выборе объема N обучающего множества  $\tilde{R}_N$ . Ясно, что в силу этих причин не существует универсальной по точности симплициальной ИНС на заданном объеме N обучающего набора  $\tilde{R}_N$ . Разумной является постановка задачи о точности симплициальных ИНС на классах непрерывных отображений в зависимости от априорной информации о модуле непрерывности  $\omega_R(\delta)$ .

Отметим также, что в силу монотонного возрастания  $\omega_R(\delta)$  существенное влияние на величину погрешности аппроксимации в формуле (4) оказывает размерность n пространства аргументов  $x \in K$ . Это имеет значение для входных данных большой размерности  $n \gg 1$ , в частности, эта ситуация типична при обработке видеоинформации и распознавании образов.

Следует подчеркнуть, что эффективность рассматриваемых ИНС обусловлена тем, что «предсказываемое» значение функции R(x) обеспечивается «окружением» точки x внутри симплекса  $T \in K$  достаточно малого диаметра  $\delta$ , в вершинах которого заданы обучающие значения из  $R_N$ , которые за счет линейной интерполяции распространяются на точку x. При этом ее барицентрические координаты  $\{\mu_i\}$  в точности являются весовыми коэффициентами связей в симплициальной ИНС, соответствующей рис. Естественно, что по построению ИНС в силу приведенных конструктивных особенностей принципиально не могут быть использованы для разумных с точки зрения точности постановок задач прогноза, выходящих за границы комплекса K (экстраполяции). Для этих целей необходимо рассмотрение обучающих наборов на более широких комплексах  $K' \supset K$ , что, несомненно, требует экспертных оценок Человека.

П.Л. Чебышёвым при рассмотрении задачи о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля, была решена задача о минимизации ошибки интерполяции заданного класса функций за счет расположения узлов интерполирования по корням многочленов Чебышёва [8]. Очевидно, что это служит отправной точкой для широкого класса исследований по оптимизации выбора обучающих наборов для построения ИНС.

Важнейшим аспектом практического применения ИНС является существенное снижение объема *N*обучающего множества. На этом пути эффективные решения связаны с применением процедуры последовательного усреднения аппроксимаций на основе ЗБЧ (закона больших чисел П.Л. Чебышёва), дающего существенное ускорение сходимости частичных сумм в теории тригонометрических рядов Фурье [9]. Аналогичный эффект связан с теоремой Мазура [1], позволяющей за счет процедуры усреднения превратить слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся. Близкое явление имеет место в методе Ричардсона ускорения сходимости разностных схем на грубых сетках [10].

Важный пример ускорения сходимости демонстрирует усреднение, примененное к бесконечной последовательности  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  ортонормированных векторов в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением, равным символу Кронекера:

$$(e_i,e_j)_H=\delta_{i,j}.$$

Очевидно, что в силу равенства Парсеваля последовательность  $e_i$  слабо сходится к нулю при  $i \to \infty$ , но при этом она не имеет предела в норме пространства H. В то же время процедура вычисления среднего арифметического значений  $e_i$ :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

обеспечивает сильную сходимость последовательности  $S_n \to 0$ ,  $n \to \infty$  (в норме пространства H). По сути, именно этот прием используется для обоснования плотности множества тригонометрических многочленов на компактах (и, соответственно, алгебраических многочленов) в пространстве непрерывных функций в норме C [9]). Очевидно, что такой подход может быть положен в основу создания малоразмерных симплициальных  $UHC^1$ .

В частности, на этой базе можно рассматривать подход к построению приближенных решений системы Навье-Стокса для несжимаемой жидкости на основе серии точных решений [11]. Очевидно, что точные решения являются в этом случае обучающим множеством для соответствующей ИНС.

Отметим, что так называемые многослойные ИНС представляют собой суперпозицию нескольких симплициальных ИНС, в которых могут реализовываться также обратные связи и т.п. Вопросы их декомпозиции, точности, эффективности в настоящее время являются, по большей мере, областью инженерных вычислительных экспериментов.

Важным моментом для будущих исследований математической природы ИНС является отыскание связанных с ними топологических инвариантов (гомотопических групп) и отыскание условий эквивалентности структуры различных математических моделей, реализующих ИНС.

Предложенная конструкция построения вышеупомянутых симплициальных ИНС, как и большинство публикаций по разработке ИНС, основанных на блок-схеме (рис.), идейно связана с работами А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда [13] о представлении непрерывных функций. В 1957 г. ими была доказана теорема (напрямую относящаяся к 13-й проблеме Д. Гильберта), что любая непрерывная функция R многих переменных может быть представлена в виде суперпозиции операций сложения и конечного набора функций одной переменной.

**Теорема 2. (А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд.)** Пусть  $R:[0,1]^n \to \mathbb{R}$  является произвольной непрерывной функцией п переменных  $x_1, x_2, \ldots, x_n$ . Тогда она может быть представлена в следующем виде:

$$R(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \Phi_i \left( \sum_{k=1}^n \psi_{i,k}(x_k) \right),$$

где все  $\Phi_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  и  $\psi_{i,k}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  являются непрерывными функциями одной переменной, при этом внутренние функции  $\psi_{i,k}$  выбираются независимо от вида R.

Этот результат послужил отправной точкой для исследований [14–16] по разработке методов глубокого обучения на базе ИНС.

ИНС, основанные на интерполяции данных, являются исключительными и удобными с точки зрения их детального исследования, теоретического анализа, поскольку минимум оптимизирующего функционала приводит к точно решаемым задачам, на которых можно исследовать принципиально важные проблемы построения и функционирования ИНС.

На практике размерность пространства входных данных существенно больше размерности выходных данных. Типичное использование ИНС нацелено на «сжатие» обрабатываемого потока больших объемов входных данных с целью их классификации, распознавания объектов, видео и акустической информации и т.п.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Общая идея существенного снижения размерности вычислительных методов предложена в докладе акад. В.Б. Бетелина и проф. В.А. Галкина «О проблеме снижения размерности сеточных аппроксимаций» на заседании Президиума РАН 16.02.2021, см. [12].

Процедура сжатия больших объемов данных может быть рассмотрена как действие компактного непрерывного оператора R в гильбертовом пространстве H, т.е.  $R:H\to H$ . Соответственно, процедуру «сжатия» входной информации под действием оператора R можно трактовать как то, что ограниченные множества входных данных Big Data x в бесконечномерном гильбертовом пространстве H преобразуются ИНС в предкомпактные подмножества выходных данных  $y\in H$  (почти конечные множества, т.е. хорошо аппроксимируемые конечными  $\varepsilon$ -сетями). Задачи распознавания образов, задачи их классификации можно сформулировать как отыскание решения  $x\in H$  обратной задачи:

$$R(x) = y \tag{5}$$

на основе полученных данных  $y \in H$ , лежащих в предкомпактном множестве. Существенной для этого класса задач является теорема Бэра [9] о невозможности представления полного метрического пространства в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств. Центральной проблемой для отыскания решений обратной задачи (5) с компактным непрерывным оператором R на гильбертовом пространстве H является либо отсутствие решения уравнения (5) (т.е. не при всех значениях  $y \in H$ существует решение уравнения (5)), либо отсутствие свойства непрерывности у обратного оператора  $R^{-1}$  на образе  $R(H) \subset H$  — принципиальная вычислительная неустойчивость решений задачи (5).

**Теорема 3.** Пусть  $R: H_1 \to H_2$  является непрерывным компактным отображением на гильбертовых пространствах  $H_1$ ,  $H_2$ . Пусть на образе  $R(H_1) \subset H_2$  определено обратное отображение $R^{-1}: R(H_1) \to H_1$ . Тогда множество точек  $y \in H_2$ , для которых не существует решение уравнения (5), является всюду плотным в  $H_2$ , а оператор  $R^{-1}: R(H_1) \to H_1$  не является непрерывным ни в каком открытом шаре в индуцированной метрике пространством  $H_2$  на образе  $R(H_1)$ .

Доказательство. Выберем произвольную точку  $y_0 \in R(H_1)$  и для произвольного положительного числа  $\varepsilon$  рассмотрим шар  $\bar{B}_{\varepsilon}(y_0) = \{y \in H_1 : ||y-y_0||_{H_1} \le \varepsilon$ . Следуя рассуждениям [9] для обобщенного уравнения Фредгольма 1-го рода, покажем наличие в этом шаре точек y, в которых уравнение (5) не имеет решения. Отметим, что пересечение  $\bar{B}_{\varepsilon}(y_0) \cap R(H_1) \neq \bar{B}_{\varepsilon}(y_0)$ . Действительно, предполагая противное, получаем равенство  $\bar{B}_{\varepsilon}(y_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{R(\bar{B}_n(R^{-1}(y_0)) \cap \bar{B}_{\varepsilon}(y_0)\}$ . В силу компактности отображения  $R: H_1 \to H_2$  получаем компактность каждого множества под знаком этого объединения. Но компактные подмножества являются нигде не плотными в гильбертовом пространстве  $H_2$ . Поскольку  $\bar{B}_{\varepsilon}(y_0)$  является полным метрическим пространством в метрике, индуцированной объемлющим гильбертовым пространством  $H_2$ , то в силу теоремы Бэра [9]  $\bar{B}_{\varepsilon}(y_0)$  не может быть представлено в виде объединения указанных компактных множеств. Таким образом, в произвольном шаре из  $H_2$  с центром в каждой точке образа  $y_0 \in R(H_1)$  находятся точки, для которых не существует решение уравнения (5). Следовательно, множество точек неразрешимости этого уравнения всюду плотное в  $H_2$ .

Покажем теперь, что сужение  $R^{-1}:R(H_1)\to H_1$  не может быть непрерывным в каком-либо открытом шаре в индуцированной метрике. Предполагая противное, получаем, что существуют такая точка  $y_0\in R(H_1)$  и открытый шар в индуцированной метрике из  $H_2$  на  $R(H_1)$ , где отображение  $R^{-1}:R(H_1)\to H_1$  является непрерывным. Но тогда в гильбертовом пространстве  $H_1$  можно указать открытый шар  $B_\delta,\,\delta>0$ , с центром в точке  $R^{-1}(y_0)$ , который гомеоморфно отображается на компактную окрестность точки  $y_0$ . Открытый шар в гильбертовом пространстве не является компактным множеством [9]. Следовательно, оператор  $R^{-1}:R(H_1)\to H_1$  не является непрерывным на всюду плотном подмножестве в индуцированной метрике из  $H_2$  на  $R(H_1)$ . Теорема доказана.

Отметим, что для линейных операторов R, удовлетворяющих условиям этой теоремы, отсутствие непрерывности у обратного оператора  $R^{-1}$  имеет место в каждой точке образа  $R(H_1) \subset H_2$  [9]. Поскольку это явление справедливо на всюду плотном во множестве выходных данных  $y \in R(H_1)$ , то обработка больших потоков данных на основе ИНС с целью классификации и распознавания входных данных x, основанная на решении задачи (5) с компактным оператором R, является всегда некорректной задачей и устойчивое получение аппроксимации решения x дополнительно требует применения методов регуляризации [17]. В частности, это явление типично для аппаратной цифровой обработки данных на основе частотной фильтрации сигналов R с подавлением высокочастотной компоненты входного сигнала  $x \in H_1 = L_2[a,b]$ . Положим  $R(x) = (k_1c_1,k_2c_2,\ldots,k_nc_n,\ldots)$ , где вектор  $(c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots) \in l_2 = H_2$  состоит из коэффициентов разложения в ряд Фурье вектора x по некоторой

полной ортонормированной системе в  $L_2[a,b]$ , а заданная последовательность  $k_n \to 0$ ,  $k_n \neq 0$  определяет частотный фильтр входного сигнала x. Очевидно, фильтр  $R:L_2[a,b]\to l_2$  является компактным оператором и, соответственно, восстановление исходного образа (сигнала) x на основе решения задачи (5) для приближенных (зашумленных) данных  $y \in l_2$  является некорректной задачей, у которой либо отсутствует решение, либо малые погрешности данных приводят к значительным ошибкам решения.

Таким образом, классы задач, основанные на применении ИНС как средства аппроксимации отображений и построения решений обратных задач с компактным оператором, обнаруживают общее математическое свойство — вычислительную неустойчивость при обработке больших массивов данных. Эти проблемы аналогичны также для задач «восстановления» образов по «цифровым двойникам», поскольку имеют ту же математическую природу.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. Т. 1. М: ИЛ; 1962.
- 2. Бахвалов Н. С. Численные методы. М: Наука; 1973.
- 3. Runge K. Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. *Zeitschrift für Matematik und Physik*. 1901;46:224–243.
- 4. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 1-4. М., 1952-1964.
- 5. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука; 1977.
- 6. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука; 1988.
- 7. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука; 1973.
- 8. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М.: ГИФМЛ; 1962.
- 9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука; 1972.
- 10. Николаев Е. С., Самарский А. А. Выбор итерационных параметров в методе Ричардсона.  $\mathcal{K}BM\ u\ M\Phi$ . 1972;12:960–973.
- 11. Бетелин В. Б., Галкин В. А., Дубовик А. О. Точные решения системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в случае задач, связанных с нефтегазовой отраслью. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020;495:13–16.
- 12. Новости ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. Режим доступа: https://www.niisi.ru/news.htm.
- 13. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. *ДАН СССР*. 1957;114(5):953–956.
- 14. Hecht-Nielsen R. Kolmogorov's Mapping Neural Network Existence Theorem. *Proceedings of the International Conference on Neural Networks*. New York: IEEE Press; 1987;III:11–14.
- 15. Funahashi K. On the Approximate Realization of Continuous Mappings by Neural Networks. *Neural Networks*. 1989;2(3):183–192.
- 16. Cybenko G. Approximation by Superposition of a Sigmoidal Function. *Math. Control, Signals and Systems*. 1989;2:303–314.
- 17. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука; 1986.

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-2

#### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ГОРЕНИЯ

```
Б. В. Крыжановский ^{1,a}, Н. Н. Смирнов ^{1,2,\delta}, В. Ф. Никитин ^{1,2,\epsilon}, Я. М. Карандашев ^{1,\epsilon}, М. Ю. Мальсагов ^{1,\delta}, Е. В. Михальченко ^{1,2,e}
```

<sup>1</sup> Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

<sup>a</sup> ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0901-6370, kryzhanov@mail.ru 
<sup>6</sup> ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6280-1522, mech.math.msu@inbox.ru

<sup>6</sup> ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8944-637X, vfnikster@gmail.com

 $^{z}\ ORCID:\ http://orcid.org/0000-0001-8483-072X,\ karandashev@niisi.ras.ru$ 

<sup>d</sup> ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7962-3387, malsagov@niisi.ras.ru

e ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9473-7932, mikhalchenkolena@yandex.ru

Аннотация: моделирование горения является ключевым аспектом полномасштабного трехмерного моделирования современных и перспективных двигателей для авиационно-космических силовых установок. В данной работе изучается возможность решения задач химической кинетики с использованием искусственных нейронных сетей. С помощью классических численных методов были построены наборы обучающих данных. Выбирая среди различных архитектур многослойных нейронных сетей и настраивая их параметры, мы разработали достаточно простую модель, способную решить эту проблему. Полученная нейронная сеть работает в рекурсивном режиме и может предсказывать поведение химической многовидовой динамической системы за много шагов.

*Ключевые слова*: химическая кинетика, моделирование горения, искусственные нейронные сети, многослойные сети, рекурсивный режим.

*Благодарности*: работа выполнена за счет субсидии, выделенной ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН на выполнение государственного задания № 0580-2021-0021 (рег. № 121031300100-8) и № 0580-2021-0003 (рег. № 121031300111-4).

Для цитирования: Крыжановский Б. В., Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф., Карандашев Я. М., Мальсагов М. Ю., Михальченко Е. В. Использование нейронных сетей для моделирования задач горения. Успехи кибернетики. 2021;2(4):15–29. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-2.

#### NEURAL NETWORKS APPLICATIONS TO COMBUSTION PROCESS SIMULATION

B. V. Kryzhanovsky<sup>1,a</sup>, N. N. Smirnov<sup>1,2,b</sup>, V. F. Nikitin<sup>1,2,c</sup>, Ia. M. Karandashev<sup>1,d</sup>, M. Yu. Malsagov<sup>1,e</sup>, E. V. Mikhalchenko<sup>1,2,f</sup>

<sup>1</sup> Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

a ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0901-6370, kryzhanov@mail.ru

<sup>b</sup> ORCID: http://orcid.org0000-0001-6280-1522, mech.math.msu@inbox.ru

<sup>c</sup> ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8944-637X, vfnikster@gmail.com

<sup>d</sup> ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8483-072X, karandashev@niisi.ras.ru

e ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7962-3387, malsagov@niisi.ras.ru

f ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9473-7932, mikhalchenkolena@yandex.ru

Abstract: combustion process simulations are the key aspect enabling full-scale 3D simulations of advanced aerospace engines. This work studies solving chemical kinetics problems with artificial neural networks. The training datasets were generated by classical numerical methods. Choosing a multi-layer neural network architecture and fine-tuning its parameters, we developed a simple model that can solve the problem. The neural network obtained works is recursive, and by running many iterations it can predict the behavior of a chemical multimodal dynamic system.

*Keywords*: chemical kinetics, combustion simulation, artificial neural networks, multi-layer networks, recursive approach.

Acknowledgements: the work was financially supported by SRISA under the government programs No. 0580-2021-0021 (reg. No. 121031300100-8) and No. 0580-2021-0003 (reg. No. 121031300111-4).

Cite this article: Kryzhanovsky B. V., Smirnov N. N., Nikitin V. F., Karandashev Ia. M., Malsagov M. Yu., Mikhalchenko E. V. Neural Networks Applications to Combustion Process Simulation. *Russian Journal of Cybernetics*. 2021;2(4):15–29. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-2.

#### Введение

Во многих случаях задача расчета газодинамических процессов в двигателях, силовых установках включает моделирование физических и химических взаимодействий. В полномасштабном трехмерном моделировании современных и перспективных ракетных двигателей часто используются топлива,
которые описываются подробными химическими механизмами, включающими сотни, а иногда и тысячи элементарных реакций между десятками и сотнями компонент. Объединение вычислительной газодинамики и моделирование горения является сложной вычислительной задачей из-за необходимости
объединения нелинейных уравнений химической кинетики с уравнениями газодинамики и явлениями
переноса. Узким местом всего подхода является расчет химической кинетики, который требует интеграции в решение трехмерных газодинамических задач стадии решения жесткой системы обыкновенных
дифференциальных уравнений в численный процесс с мелким шагом по времени. Прямая интеграция
подробных химических механизмов с большим числом компонент и реакций в трехмерные газодинамические задачи в настоящее время ограничена доступными вычислительными ресурсами [1–4].

Чтобы сократить время вычислений, многие программные коды используют сокращенные кинетические механизмы. Существуют различные методы получения редуцированных механизмов из подробных данных. Вот их краткий перечень: вычислительное одиночное варьирование (CSP, Computational Singular Perturbation) [5]; внутренние низкоразмерные многообразия (ILDM, Intrinsic Low Dimensional Manifolds) [6]; уровень значимости (LOI, Level of Importance) [7]; программа компьютерного сокращения механизма (CARM, Computer Assisted Reduction Mechanism Code) [8–9]; ограниченное равновесие, определяемое интенсивностью реакций (RCCE, Rate Controlled Constrained Equilibrium) [10–11]; направленный граф отношений (DRG, Directed Relation Graph) [12]. При использовании сокращенных механизмов необходимо выбрать правильный механизм для задачи рассматриваемого, чтобы соблюсти ограничения механизмов в выбранных диапазонах параметров [13]. Но даже при значительном сокращении кинетический шаг использует значительную часть общего времени вычислений.

Другими способами сокращения времени вычислений являются методы, в которых термохимическое состояние пространства вычисляется во время моделирования и сохраняется в таблицах для дальнейшего повторного использования [14–15].

В настоящее время подход с использованием нейронных сетей является многообещающим для ускорения такого рода вычислений. Методы машинного обучения получили широкое распространение благодаря многочисленным достижениям в алгоритмах и доступности вычислительных мощностей. Существует множество работ по применению этой техники к задачам химической кинетики. В [16] моделирование методом больших вихрей (LES) метано-водородного пламени, стабилизированного обтекаемым телом, было выполнено с использованием двух методов химического представления, а именно традиционной техники структурированных таблиц и искусственных нейронных сетей. В работе [17] представлена методика составления таблиц механизмов горения с использованием искусственных нейронных сетей. Искусственные нейронные сети обучались с использованием выборок, созданных на основе абстрактной задачи, таким образом, чтобы они покрывали фазовое пространство семейства задач горения. В [18] был предложен подход к составлению таблиц химии, основанный на равновесии с управляемой скоростью реакций и искусственными нейронными сетями, с дальнейшим применением этого метода к моделированию пламени в смеси СН<sub>4</sub> / Н<sub>2</sub> / N<sub>2</sub>. Для обучения, тестирования и моделирования искусственных нейронных сетей использовалась самоорганизующаяся карта — концепция многослойного персептрона для выполнения задач распознавания образов и прогнозирования временной эволюции ведущих видов.

В настоящей работе мы заменили численное дифференцирование жесткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений нейросетевым решением. Получающаяся в результате нейронная сеть может, работая в рекурсивном режиме, предсказывать на много шагов вперед развитие химической

системы, состоящей из большого числа компонент. Изменив нормировку данных и немного архитектуру сети, мы смогли не только повысить точность и надежность нейронной сети, но и уменьшить вычислительные затраты.

#### Математическая модель

В качестве реагирующей смеси рассматривалась смесь идеальных газов, описанных с помощью уравнения Клапейрона-Менделеева. Его термодинамическое состояние определяется температурой, давлением, плотностью и концентрацией веществ. Термодинамическое состояние смеси определяется молярными плотностями компонент и температурой, другие параметры рассчитываются на их основе с помощью своих определений и с применением уравнения состояния.

В таблице 1 приведены реакции из кинетического механизма GriMech 3.0 (1999), подсистема для горения на воздухе водорода без реакций окисления азота и взаимодействия между азотом и водородом. Эти реакции исключены из-за их достаточно медленных скоростей и, как следствие, слабого влияния на процесс распространения пламени. Азот играет роль разбавителя; он также участвует в трехмолекулярных реакциях как фактор, влияющий на скорость последних. В механизме также учитывается аргон, он нейтрален вместе с азотом. Рассматриваемая проблема горения включает всего 10 видов, два из которых нейтральные: азот (N2), аргон (Аг) и 8 видов изменяемых компонент: Н<sub>2</sub>, О<sub>2</sub>, Н<sub>2</sub>О, ОН, НО<sub>2</sub>, Н<sub>2</sub>О<sub>2</sub>, Н, О. Между ними существует 28 химических реакций, показанных в таблице 1, в некоторых из них участвуют аналогичные входящие и выходные компоненты, помимо третьего тела, но используются разные внутренние пути, что приводит к разной скорости реакции. Если мы объединим эти дубликаты, механизм будет включать 20 различных реакций. Их номенклатура в крайнем левом столбце таблицы обозначает это, отмечая дубликаты дополнительными буквами. Единицы измерения в таблице: см, моль, К, калории. У реакций распада есть два выражения для коэффициентов скорости: предельный коэффициент высокого давления  $k_{high}$  и низкого давления  $k_{low}$ . Для этих реакций коэффициенты  $\alpha$ ,  $T^{***}$ ,  $T^*$ ,  $T^{**}$  взяты из Троу [20]. Выражение для [M] обозначает эффективную молярную плотность третьего тела, участвующего в выражении скорости реакции; это линейная комбинация молярных плотностей компонент с определенными весовыми коэффициентами, по умолчанию эти коэффициенты являются единицами. Если вместо этих коэффициентов есть явные нули, это означает, что реакция с этими компонентами в качестве третьих тел идет другим путем, и выражение для ее скорости отличается от общей формы. Другие обозначения в таблице 1: T — температура,  $R_G$  — универсальная газовая постоянная. Все реакции обратимы, и коэффициент скорости обратной реакции рассчитывается с использованием прямого коэффициента скорости, деленной на константу равновесия, которая зависит только от термодинамических свойств компонент, участвующих в

Динамика системы описывается системой обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, как линейных, так и нелинейных, следующим образом:

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} = \sum_{r=1}^{N_R} \nu_{rk} \omega_r \left( T, X_1, \dots, X_{N_C} \right), \ k \notin S, \tag{1}$$

$$X_{j} = X_{j0} + \sum_{k \notin S} \lambda_{jk} (X_{k} - X_{k0}), \ j \in S,$$
 (2)

$$E(T, X_1, \dots, X_{N_C}) = R_G T \sum_{k=1}^{N_C} (\hat{H}_k(T) - 1) X_k = E_0.$$
(3)

Здесь  $X_k$  — молярные плотности компонент (молей на единицу объема; исходное состояние обозначается  $X_{k0}$ ), T — температура,  $\nu_{rk}$  — алгебраические стехиометрические коэффициенты,  $N_C$  — количество компонент,  $N_R$  — число реакций,  $\omega_r$  — интенсивность реакции (молей на единицу объема),  $\lambda_{jk}$  — константы, зависящие от стехиометрических коэффициентов, отвечающих за законы сохранения элементов, E — внутренняя энергия смеси на единицу объема ( $E_0$  — начальное значение),  $\hat{H}_k(T)$  — безразмерные энтальпии частиц в зависимости от температуры, полученные из данных термодинамической таблицы, S — набор показателей представителей элементов среди компонент, который выбирается следующим образом:  $S = \{H_2, O_2, N_2, Ar\}$ . Все компоненты, кроме этого набора, здесь и ниже называются независимыми, а компоненты этого набора называются зависимыми.

Таблица 1 Химические реакции и выражения скоростей для механизма GriMech 3.0 (1999)

No.	Реакция	Коэффициент прямой реакции		
1.	$O + O + M = O_2 + M$	$1.2 \cdot 10^{17} \cdot T^{-1}$		
	$[M] = 2.4[H_2] + 15$	$0.4[{\rm H_2O}] + 0.83[{\rm Ar}] + 1.0[{\rm others}]$		
2.	O + H + M = OH + M	$5.0 \cdot 10^{17} \cdot T^{-1}$		
	$[M] = 2.0[H_2] + 6$	$0.0[H_2O] + 0.7[Ar] + 1.0[others]$		
3.	$O + H_2 = H + OH$	$3.87 \cdot 10^4 \cdot T^{2.70} \cdot \exp\left(-6260/R_G T\right)$		
4.	$O + HO_2 = OH + O_2$	$2.0 \cdot 10^{13}$		
5.	$O + H_2O_2 = OH + HO_2$	$9.63 \cdot 10^6 \cdot T^{2.0} \cdot \exp\left(-4000/R_G T\right)$		
6a.	$H + O_2 + M = HO_2 + M$	$2.8 \cdot 10^{18} \cdot T^{-0.86}$		
	$[M] = 0.0[O_2] + 0.0[H_2]$	$_{2}O] + 0.0[N_{2}] + 0.0[Ar] + 1.0[others]$		
6b.	$H + O_2 + O_2 = HO_2 + O_2$	$2.08 \cdot 10^{19} \cdot T^{-1.24}$		
6c.	$H + O_2 + H_2O = HO_2 + H_2O$	$1.126 \cdot 10^{19} \cdot T^{-0.76}$		
6d.	$H + O_2 + N_2 = HO_2 + N_2$	$2.60 \cdot 10^{19} \cdot T^{-1.24}$		
6e.	$H + O_2 + Ar = HO_2 + Ar$	$7.0 \cdot 10^{17} \cdot T^{-0.8}$		
7.	$H + O_2 = O + OH$	$2.65 \cdot 10^{16} \cdot T^{-0.67} \cdot \exp\left(-17041/R_G T\right)$		
8a.	H + H + M = H2 + M	$10^{18} \cdot T^{-1.0}$		
	$[M] = 0.0[H_2] + 0.$	$0[H_2O] + 0.63[Ar] + 1.0[others]$		
8b.	$H + H + H_2 = H_2 + H_2$	$9.0 \cdot 10^{16} \cdot T^{-0.6}$		
8c.	$H + H + H_2O = H_2 + H_2O$	$6.0 \cdot 10^{19} \cdot T^{-1.25}$		
9.	H + OH + M = H2O + M	$2.2 \cdot 10^{22} \cdot T^{-2.0}$		
	$[M] = 0.73[H_2] + 3.65[H_2O] + 0.38[Ar] + 1.0[others]$			
10.	$H + HO_2 = H_2O + O$	$3.97 \cdot 10^{12} \cdot \exp\left(-671/R_G T\right)$		
11.	$H + HO_2 = H_2 + O_2$	$4.48 \cdot 10^{13} \cdot \exp\left(-1068/R_GT\right)$		
12.	$H + HO_2 = OH + OH$	$8.40 \cdot 10^{13} \cdot \exp\left(-635/R_GT\right)$		
13.	$H + H_2O_2 = HO_2 + H_2$	$1.21 \cdot 10^7 \cdot T^2 \cdot \exp\left(-5200/R_G T\right)$		
14.	$H + H_2O_2 = H_2O + OH$	$10^{13} \cdot \exp\left(-3600/R_G T\right)$		
15.	$OH + H_2 = H + H_2O$	$1.16 \cdot 10^8 \cdot T^{1.51} \cdot \exp\left(-3430/R_G T\right)$		
16.	$OH + OH + M = H_2O_2 + M$	$k_{high} = 7.4 \cdot 10^{13} \cdot T^{-0.37}$		
		$k_{low} = 2.3 \cdot 10^{18} \cdot T^{-0.9} \cdot \exp(+1700/R_G T)$		
	$\alpha = 0.7346, T^{***}$	$= 94.0, T^* = 1756, T^{**} = 5182$		
	$[M] = 2.0[H_2] + 6.0[H_2O] + 0.7[Ar] + 1.0[others]$			
17.	$OH + OH = H_2O + O$	$3.57 \cdot 10^4 \cdot T^{2.40} \cdot \exp\left(+2110/R_GT\right)$		
18.	$OH + HO_2 = H_2O + O_2$	$1.45 \cdot 10^{13} \cdot \exp(+500/R_G T)$		
19a.	$OH + H_2O_2 = HO_2 + H_2O$	$2.00 \cdot 10^{12} \cdot \exp\left(-427/R_G T\right)$		
19b.	$OH + H_2O_2 = HO_2 + H_2O$	$1.7 \cdot 10^{18} \cdot \exp\left(-29410/R_GT\right)$		
20a.	$HO_2 + HO_2 = O_2 + H_2O_2$	$1.3 \cdot 10^{11} \cdot \exp\left(+1630/R_GT\right)$		
20b.	$HO_2 + HO_2 = O_2 + H_2O_2$	$4.2 \cdot 10^{14} \cdot \exp\left(-12000/R_G T\right)$		

Система (1) соответствует химической кинетической динамике для независимых частиц. Система (2) соответствует закону сохранения элементов в химических реакциях, она связывает молярные плотности зависимых частиц с независимыми посредством линейных выражений, так что массы каждого элемента не меняются. Система (3) — это условие сохранения внутренней энергии смеси. Модель рассчитана на условия сохранения внутренней энергии и плотности смеси; первое условие (3) явно, а второе условие является следствием сохранения элемента (2), и оно выполняется неявно.

Начальные условия для динамической системы (1)–(3) задаются молярной плотностью частиц и температурой; по ним вычисляется начальная внутренняя энергия:

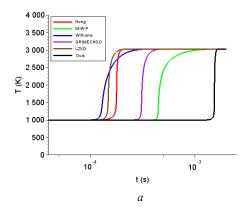
$$X_k = X_{k0}, T = T_0, E_0 = R_G T_0 \sum_{k=1}^{N_C} \left( \hat{H}_k (T_0) - 1 \right) X_{k0}, t = 0.$$
(4)

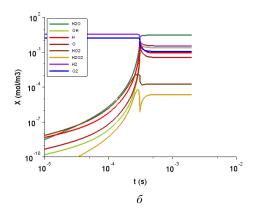
#### Тест самовоспламенения

Задача, сформулированная уравнениями (1)–(4), имеет единственное решение, полученное численно с использованием метода Новикова для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений [21]. Его решение моделирует самовоспламенение горючей смеси водорода с воздухом, предварительно нагретого, чтобы обеспечить быстрый процесс воспламенения в адиабатических и сохраняющих объем условиях. Исходное состояние:  $T_0 = 1000 \text{ K}$ ,  $p_0 = 1 \text{ бар}$ , молярные концентрации  $[H_2]: [O_2]: [N_2] = 2: 1: 4$ . Для получения исходных молярных плотностей из этих значений использовалось следующее выражение:

$$X_{k0} = \frac{p_0 C_{k0}}{R_G T_0 \sum_{i=1}^{N_C} C_{i0}},$$
(5)

где  $C_{k0}$  являются ненормированными молярными концентрациями, то есть числами в выражении с соотношением концентраций. На рисунке 1 показаны результаты теста для этих начальных условий: на левом графике 1a — изменение температуры во времени для различных кинетических механизмов, среди которых имеется и GriMech, а правый график 16 представляет развитие молярных долей для компонент в случае кинетического механизма GriMech, данные кинетики которого приведены в таблице 1.





**Рис. 1.** а) тест самовоспламенения в водородно-воздушной смеси, температура в зависимости от времени, различные кинетические механизмы; б) развитие концентраций молярных долей во времени для кинетики GriMech 3.0 (1999)

Шкала времени на рис. 1 логарифмическая, и рис. 1а показывает, что для различных кинетических механизмов время самовоспламенения (то есть задержка момента резкого роста температуры) изменяется на порядок. Кинетический механизм GriMech показан фиолетовым цветом на рисунке 1а, а время самовоспламенения у него среднее по сравнению с другими. Правая часть рисунка 1 показывает, что сначала концентрации свободных радикалов растут экспоненциально, достигают некоторого

критического значения и запускают быстрый процесс воспламенения при значительном изменении концентраций топлива и окислителя. После этого система приходит в состояние химического равновесия.

Такой характер динамики самовоспламенения демонстрирует цепной характер кинетического механизма, то есть процесс начинается с образования и накопления радикалов, а затем цепочки превращений резко обрываются, приводя к конечным продуктам. Первоначально основной реакцией, приводящей к образованию радикальных частиц, является  $H_2 + O_2 = H + HO_2$  (обратный путь реакции 11 в таблице 1). Это видно по разнице между концентрациями радикалов ОН и  $HO_2$ : несколько порядков на начальном этапе их накопления.

#### Нейронная сеть: описание данных

Для обучения сети требуется большой набор данных, поэтому численное решение системы (1)–(3) было обработано для большого набора исходных данных [22]. Численная реализация основана на методе Новикова [21] из класса методов Розенброка для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений; существующая система алгебраических и дифференциальных уравнений была адаптирована для метода, который первоначально описывает только дифференциальную систему. Важной частью численной реализации является полуаналитический метод вычисления якобиана правой части системы уравнений. Установка начальных условий  $(p_0, T_0, X_{k0})$  велась произвольно.

В таблице 2 приведен фрагмент результата численного решения системы дифференциальных уравнений (1)–(3). Он представляет начальное состояние химической системы в нулевой момент времени, а также динамику развития системы через равные промежутки времени. Отметим некоторые неблагоприятные особенности полученных данных. Процесс самовоспламенения быстрый, поэтому и за короткий срок температура и молярные плотности компонент переходят в состояние равновесия, тем самым сокращая объем данных для обучения. Сами концентрации компонент варьируются в разных диапазонах, иногда принимая довольно небольшие значения. Например,  $T=2000~{\rm K}$ , молярная плотность некоторого нестабильного радикала (H, OH и т. д.) может оказаться  $10^{-23}~{\rm моль/м}^3$ , и стабильные компоненты (H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>) могут быть по крайней мере 1.53 моль/м<sup>3</sup>. При этом азот и аргон в течение всего процесса совершенно не меняют своих значений.

Образец ненормализованных данных

Таблица 2

t, µs	T, K	$H_2$	$O_2$	H <sub>2</sub> O	ОН	$HO_2$	$H_2O_2$	Н	О	$N_2$	Ar
0	1484.000	1.539	1.026	0.000	0.616	0.616	0.821	0.616	0.308	1.436	1.129
1	1565.928	1.548	1.052	0.066	0.607	0.617	0.767	0.580	0.303	1.436	1.129
2	1662.566	1.557	1.079	0.157	0.571	0.643	0.689	0.546	0.298	1.436	1.129
3	1777.822	1.565	1.107	0.279	0.507	0.695	0.582	0.512	0.293	1.436	1.129
4	1909.072	1.573	1.138	0.425	0.420	0.766	0.454	0.476	0.288	1.436	1.129
5	2043.755	1.581	1.173	0.574	0.333	0.831	0.325	0.441	0.282	1.436	1.129
6	2167.177	1.588	1.213	0.705	0.267	0.869	0.220	0.407	0.275	1.436	1.129
7	2272.697	1.593	1.255	0.807	0.226	0.873	0.145	0.376	0.268	1.436	1.129
8	2360.898	1.597	1.299	0.884	0.207	0.852	0.097	0.350	0.260	1.436	1.129

При таком разбросе данных ни одна нейронная сеть не может быть обучена должным образом и хорошо работать. Стандартный подход в такой ситуации — вычислить среднее значение и дисперсию по всей обучающей выборке и нормализовать к ним все данные. Однако в данном случае значения молярных плотностей положительны и имеют диапазоны значений, различающиеся на несколько порядков, поэтому мы предпочли использовать логарифмическое масштабирование. В результате мы применили различные типы нормализации температуры и молярной плотности:

$$\begin{cases}
\tilde{T} = \frac{T}{100} \\
\tilde{X}_k = \begin{cases}
X_k/\varepsilon, & X_k \le \varepsilon \\
1 + \ln(X_k/\varepsilon), & X_k > \varepsilon
\end{cases}
\end{cases}$$
(6)

Таблица 3

Таблииа 4

			`
Статистические	своиства	ненормализованных	: данных

	Minimal value	Maximal value	Average	Deviation		
Temperature	1000	3673.9132	2594.9325	434.9893		
$H_2$	0.0537	5.3122	0.9234	0.6021		
$O_2$	0.0789	6.5225	1.8614	0.8277		
H <sub>2</sub> O	0	5.376	1.8453	0.7456		
ОН	0	3.0753	0.5862	0.2847		
$HO_2$	0	3.2864	0.0849	0.1958		
$H_2O_2$	0	2.9112	0.0551	0.1976		
Н	0	3.5606	0.6016	0.3827		
О	O 0		0 3.2738		0.4819	0.289
$N_2$	0.0744	4.7689	1.0154	0.5869		
Ar	Ar 0.0681		1.0076	0.5838		

Статистические свойства нормализованных данных

		Maximal value		
	Minimal value		Average	Deviation
Temperature	10	36.7391	25.9493	4.3499
$H_2$	21.1009	25.6959	23.7406	0.658
$O_2$	21.4867	25.9011	24.5378	0.4937
H <sub>2</sub> O	0	25.7078	24.5289	0.7361
ОН	0	25.1493	23.1813	1.2997
$HO_2$	0	25.2157	18.7431	2.5412
$H_2O_2$	0	25.0944	15.0357	3.7273
Н	0	25.2958	23.2302	1.0573
О	0	25.2118	22.9787	1.1684
$N_2$	21.427	25.588	23.8247	0.7329
Ar	21.3388	25.5174	23.8162	0.7331

В таблицах 3 и 4 показаны некоторые статистические свойства набора обучающих данных до и после процесса нормализации. Видно, что нам удалось значительно уравнять среднее значение и диапазоны данных с исходным состоянием. Отклонение по-прежнему различается для разных данных, и мы надеемся найти лучшее решение для этого в будущем. Константа  $\varepsilon=10^{-10}$  была выбрана для сближения средних значений нормированной температуры и концентраций.

На рис. 2 показан пример изменения температуры и молярной плотности во время развития химической системы. Зависимости часто немонотонны, изменения происходят за короткий промежуток времени, а затем либо достигают асимптоты, либо изменяются очень медленно. То есть структура прогнозируемых данных сложна и варьируется даже после нормализации. На выходе нейронной сети мы должны получить состояние химической системы в следующий момент времени. Тем самым выходом сети будет 11-мерный вектор  $Y=(T,X_1,\ldots,X_{10})$ . Однако этот размер слишком мал для ввода нейронной сети, то есть состояния системы в предыдущий момент. Для получения наилучшего результата необходимо подать на вход сети максимально информативные данные. Поэтому было решено формировать входной вектор из 9 предыдущих состояний системы, учитывая историю развития процесса. Таким образом, размерность входного вектора была расширена до значения 99:  $X=\left(T^1,X_1^1,\ldots,X_{10}^1,\ldots,T^9,X_1^9,\ldots,X_{10}^9\right)$ .

Наконец, все сгенерированные данные были разделены на три набора данных: обучение, проверка и тестирование. Набор обучающих данных — это данные, на которых обучается нейронная сеть; набор данных проверки используется для управления процессом обучения; набор тестовых данных —

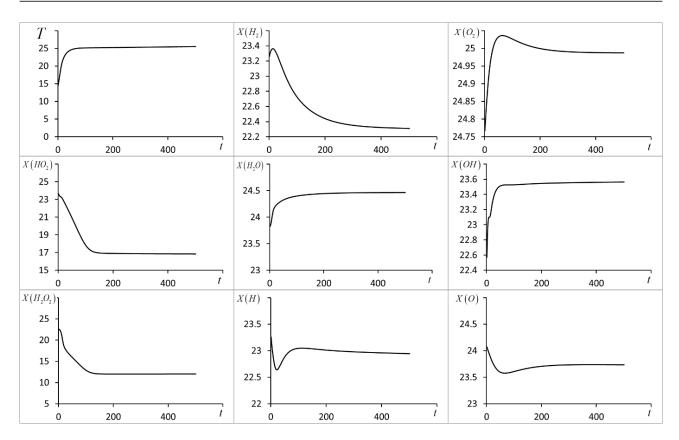


Рис. 2. Пример развития системы во времени после нормализации данных

это окончательная оценка обученной сети. В таблице 5 обобщена информация о размерах и измерениях наборов данных.

Структура сгенерированных данных

Таблица 5

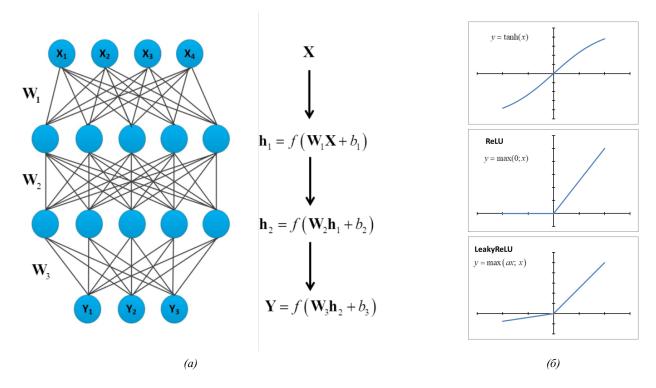
Training sample		aining sample Validation sample		Test sample	
X	(2,000,000; 99)	X	(200,000; 99)	X	(400,000; 99)
Y	(2,000,000; 11)	Y	(200,000; 11)	Y	(400,000; 11)

#### Описание нейронной сети и результаты ее работы

Искусственная нейронная сеть — это система, состоящая из множества простых элементов (нейронов), связанных между собой, в основном, однотипных. Нейроны часто делятся на группы и слои, связи между которыми и внутри которых задаются весовыми коэффициентами. На рисунке 3a показан пример полностью подключенной сети прямого распространения. Он состоит из входного слоя X, выходного слоя Yи два скрытых слоя  $h_i$ , отношения между слоями определяются весами  $W_i$ .

Нейронные сети не программируются в обычном понимании этого слова, они обучаются. Обучение — одно из главных преимуществ нейронных сетей перед традиционными алгоритмами. Технически обучение заключается в нахождении коэффициентов связей (или весов) между нейронами. В процессе обучения нейронная сеть определяет сложные зависимости между входными и выходными данными, а также выполняет обобщение. Это означает, что в случае успешного обучения сеть способна вернуть правильный результат на основе данных, которые отсутствовали в обучающей выборке, а также неполных, зашумленных или частично искаженных данных.

На рисунке 3а показано, какие вычисления производятся при прохождении данных по сети. Входной сигнал от всех нейронов предыдущего слоя X умножается на матрицу весовых коэффициентов, которые определяют связи нейрона следующего слоя с предыдущим слоем, затем смещение добавлениемb. Результат проходит через некоторую нелинейную функцию f(\*), и сигнал получается



**Рис. 3.** (а) пример полносвязной нейронной сети и вычислений; (б) примеры функций активации: гиперболический тангенс; выпрямленные линейные блоки (ReLU); параметрический ReLU (LeakyReLU)

на нейроне следующего слоя. Теперь эти состояния нейронов первого слоя, а  $h_1$  аналогично переносятся на другой слой  $h_2$ , становясь вкладом. От слоя к слою входной сигнал передается от входа сети к ее выходуY. Выходной сигнал сети сравнивается с желаемым эталонным значением  $\tilde{Y}$ , вычисляется ошибка, затем параметры веса и смещения корректируются соответствующим образом, чтобы уменьшить ошибку сети.

Важной частью любой сети является функция активации f(\*), которая привносит нелинейность при передаче данных от уровня к уровню. Без нее нейронные сети просто выполняли бы линейное преобразование и было бы невозможно построить эффективную многослойную систему. На рисунке 3б показаны некоторые из наиболее часто используемых функций активации.

#### Архитектура нейронной сети 1

Архитектура нейронной сети 1 показана на рисунке 4. Входом сети является вектор размерности 99, то есть состояние химической системы в 9 последовательных временных точках. Затем ввод передается через 9 одинаковых блоков, состоящих из нескольких слоев. За блочной системой следует полностью связанный слой из 130 нейронов с линейной функцией активации, а затем еще один слой того же типа с 9 нейронами. Фактически выходной сигнал этого слоя уже является выходным состоянием системы за исключением двух нейтральных компонент, то есть азота и аргона. Поскольку азот и аргон не меняют своего состояния в процессе, значения концентрации этих веществ могут быть сразу же переданы на выход сети, что делает обходной слой из 2 нейронов. Слой конкатенации объединяет сетевой выход и нейтральные компоненты, и мы получаем состояние системы в следующий момент времени. Теперь рассмотрим структуру блоков. Блок состоит из трех полностью связанных слоев, в первом слое 256 нейронов; второй слой состоит из 128 нейронов, а третий состоит из 99 нейронов с точки зрения размерности входного вектора. Одна из параметрических версий ReLU функция LeakyReLU с параметром а = 0.15, он используется как функция активации. Выход третьего полносвязного слоя покомпонентно добавляется ко входу всего блока, остаточной связи [23]. Результат передается дальше по основной сети.

Таким образом была построена многослойная нейронная сеть прямой передачи с остаточными связями. Всего в ней 29 полностью связанных слоев и почти 600 000 параметров для обучения.

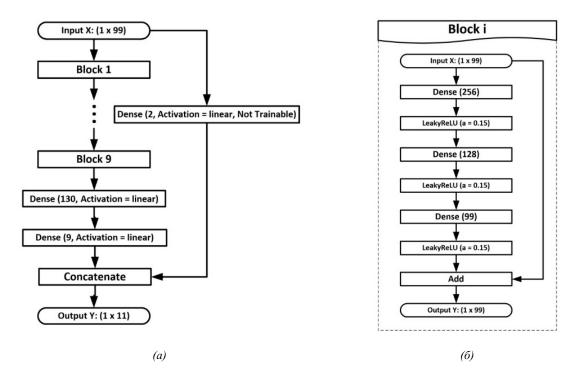


Рис. 4. Архитектура сети 1: (а) основная модель; (б) одноблочная структура

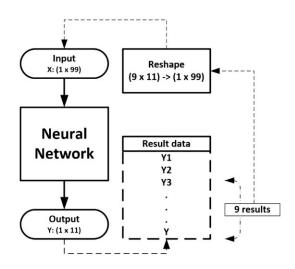


Рис. 5. Сетевой алгоритм

В результате обработки эта нейронная сеть предсказывает состояние химической системы из предыдущих девяти. Следовательно, если нам необходимо получить динамику развития процесса во времени, необходимо циклически обновлять сетевой ввод. Данный алгоритм представлен на рисунке 5.

Первые состояния получаются путем решения системы дифференциальных уравнений (1)–(3) каким-либо вычислительным методом. Затем формируется входной вектор и подается в нейронную сеть. Полученный результат добавляется в итоговый отчет, откуда выбираются последние состояния системы и снова поступают на сетевой вход. Этот цикл повторяется столько раз, сколько потребуется.

Главный недостаток этого алгоритма — накопление ошибок. На каждом этапе сеть выдает результат с некоторой неточностью. Независимо от того, насколько мала ошибка, она передается на следующий шаг, причем искаженный входной сигнал применяется к сетевому входу. Это означает, что выходной сигнал сети будет все больше и больше отклоняться от идеального результата с каждым цик-

лом. Предпоследний полностью связанный слой (130 нейронов) частично борется с этой проблемой, но тем не менее полностью ее не решает.

#### Результаты для нейронной сети 1

Сеть была обучена на карте RTX2070 8Gb. Результат работы сети по ранее описанной схеме (рис. 5) показан на рис. 6. Маркеры представляют результаты нейронной сети, а сплошная линия — эталонные значения, которые должна была получить сеть. Напомним, что обучающие данные состояли из 10 000 процессов с 200 временными шагами наблюдения. Рисунок 7 показывает, что обученная сеть хорошо предсказывает развитие процесса горения даже на 1000 шагов. В этом примере ошибки прогноза были следующими:

$$MAE = 0.017,$$
  
 $MSE = 0.0014.$ 

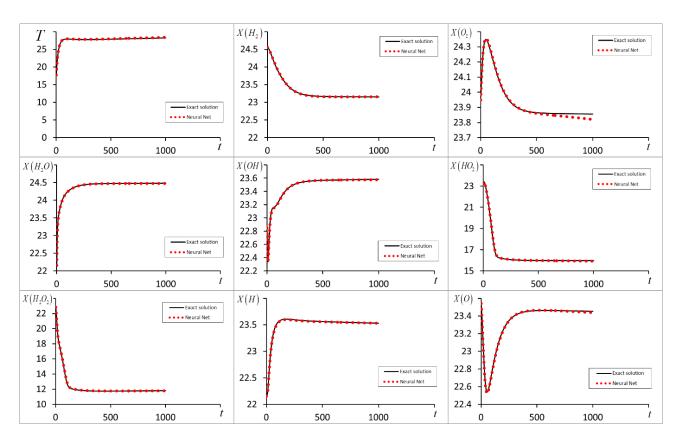


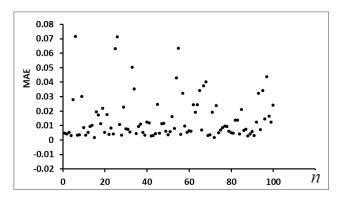
Рис. 6. Результаты обработки нейронной сетью 1 за 1000 последовательных шагов

Конечно, нужно понимать, что нейронная сеть еще не всегда работает так эффективно. График для  $O_2$  показывает сильное отклонение прогноза после 600-го шага. Для уверенной и стабильной работы сети желательно увеличить обучающую выборку в 10-100 раз.

Если повторить численный эксперимент с обученной сетью 100 раз и усредненными ошибками, мы получим:  $\langle MAE \rangle = 0.015$ ,  $\langle MSE \rangle = 0.0016$ .

На рис. 7 показаны ошибки для различных вычислительных экспериментов. За исключением случайных выбросов, сеть дает довольно хорошие результаты. Выбросы связаны с плохой обучающей выборкой, которая, по-видимому, не включает в себя ни одного типичного случая.

Структура нейронной сети довольно проста, хотя и имеет большие размеры. Все вычисления ограничиваются умножением матрицы на вектор и вычислением функции активации. Таким образом, вычислительная сложность алгоритма может быть легко оценена. Чтобы пройти по сети от входного уровня к выходному, потребуется  $\approx 1.3 \cdot 10^6$  операции сложения и умножения. И это последняя вычислительная сложность. Добавление других веществ в химическую систему увеличит количество компонент и химических реакций. Количество дифференциальных уравнений увеличится, а значит, сложность проблемы возрастет. Время работы стандартных вычислительных методов будет увеличиваться экспоненциально. В этом случае в нейросети изменится только размерность входного и выход-



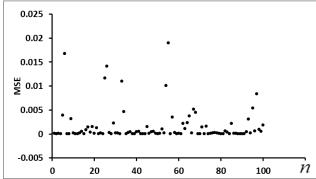


Рис. 7. Колебания ошибки прогноза в различных экспериментах

ного слоев, а общее количество вычислений практически не изменится. Да, потребуется обучающая выборка большего размера, и сеть будет обучаться дольше, но в конечном итоге обученная модель решит проблему так же быстро с большим количеством реагентов.

#### Архитектура нейронной сети 2

Архитектура нейронной сети представлена на рисунке 2. Входом сети является вектор размерности 11, то есть состояние химической системы (температура и молярные плотности веществ). Дальше вход передается через несколько одинаковых блоков, состоящих из нескольких слоев. Затем результат покомпонентно складывается с входом и передается на выход сети.

Рассмотрим структуру блоков. Блок состоит из трех полносвязных слоев, в первом слое 256 нейронов, второй состоит из 128 нейронов, а третий по размерности входного вектора — из 11 нейронов. В качестве функции активации используется одна из параметрических версий ReLU — LeakyReLU, с параметром a = 0.15 (LeakyReLU). Выход третьего полносвязного слоя покомпонентно складывается со входом всего блока. Результат передается дальше по основной сети.

Таким образом, получилась нейронная многослойная сеть прямого распространения с обходными связями. Число блоков можно менять, чтобы добиться большей точности и надежности либо скорости работы. Вычислительная сложность блока составляет порядка 74 000 операций.

В результате своей работы данная нейронная сеть предсказывает состояние химической системы по предыдущему. Поэтому, если требуется получить динамику развития процесса во времени, необходимо циклично обновлять вход сети, подавая полученный выход на вход. Основным недостатком такого алгоритма является нарастание ошибки. Сеть на каждом шагу выдает результат с некоторым отклонением, неточный результат. Какой бы маленькой ни была ошибка, она приводит к тому, что на следующем шаге на вход сети подается искаженный вход. А значит, выход сети с каждым циклом будет все больше отклоняться от идеального результата. Увеличение числа блоков в сети и остаточная связь позволяют частично бороться с этой проблемой и получать качественный результат приблизительно на 1000 шагов.

#### Результаты для нейронной сети 2

Результат работы сети с девятью блоками представлен на рисунке 9. Маркерами изображены результаты нейронной сети, а сплошная линия – эталонные значения, которые сеть должна была получить. На рисунке видно, что обученная сеть неплохо может предсказывать развитие процесса горения на 1000 шагов, без заметного нарастания ошибки при циклическом процессе работы. В данном примере ошибки прогноза оказались следующими:

$$MAE = 0.0014,$$
  
 $MSE = 4.415 \cdot 10^{-6}.$ 

Это всего один пример. Если запускать сеть 2 для различных стартовых конфигураций химической системы, то результат будет разниться. На рисунке 10 показано, как менялась среднеквадратичная ошибка при 200 случайных экспериментах. Как видно из рисунка, большая часть экспериментов дает хороший результат, ошибка близка к нулю. Но случаются выбросы, которые говорят, что происходят еще нехарактерные процессы, которым сеть не обучилась. Скорее всего, это связанно с тем, что

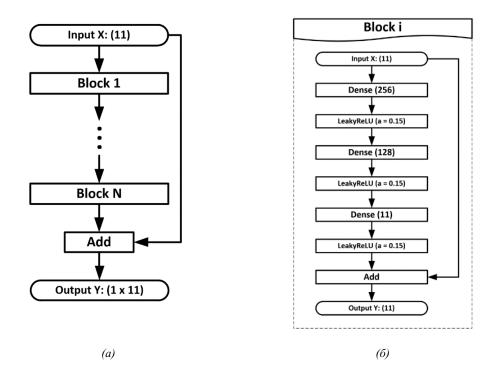


Рис. 8. Архитектура сети 2: (а) основная модель; (б) одноблочная структура

обучающая выборка недостаточно репрезентативна, то есть в ней отсутствуют некоторые ключевые процессы. Так как обучающие примеры генерировались случайным образом, то единственный способ уменьшить такие отклонения — это увеличить число обучающих примеров.

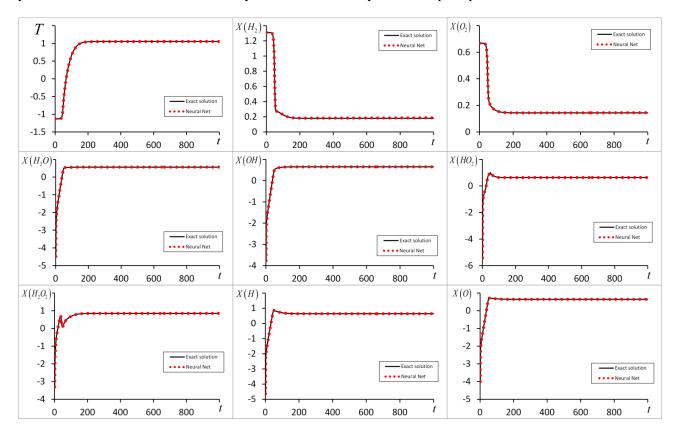


Рис. 9. Результат работы нейронной сети 2 (9 блоков) в течение 1000 шагов

В таблице 6 показано, как меняется ошибка работы сети от числа блоков. Усреднение прово-

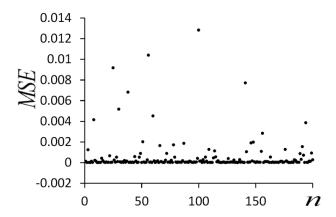


Рис. 10. Работа нейронной сети 2 с 9 блоками. 200 случайных экспериментов

дилось по 100 экспериментам. Нейронные сети обучались на одном и том же наборе. Как видно из таблицы, увеличение числа блоков заметно улучшает качество ее работы: уменьшается ошибка и диапазон отклонений. Однако надо понимать, что бездумное увеличение глубины сети имеет недостаток: увеличивается вычислительная сложность алгоритма. Как упоминалось выше, каждый блок требует около 70 000 операций сложения и умножения, а значит, девятиблочная сеть потребует порядка вычислительных операций только для вычисления одного состояния сети.

Структура сгенерированных данных

Таблица	6

Число блоков	MSE .
3	$0.0064 \pm 0.0280$
4	$0.0017 \pm 0.0088$
5	$0.0013 \pm 0.0040$
6	$0.0012 \pm 0.0034$
7	$0.0008 \pm 0.0024$
8	$0.0006 \pm 0.0018$
9	$0.0005 \pm 0.0016$
11	$0.0004 \pm 0.0011$

#### Выводы

В статье рассматривается возможность решения задачи химической кинетики с помощью искусственных нейронных сетей. Перечисляя и настраивая различные архитектуры многослойных нейронных сетей, можно получить относительно простую модель, способную решить проблему. Полученная нейронная сеть может предсказывать развитие химической системы, состоящей из большого числа компонент, на много шагов вперед, работая в рекурсивном режиме. Более того, вычислительная сложность модели практически не зависит от количества веществ, участвующих в реакции. Моделирование нейронной сети может частично или полностью заменить дорогостоящие вычислительные методы численного моделирования при сохранении количественно точных результатов.

Возможно использование моделей на основе нейронных сетей сверточного типа. Такой подход должен улучшить качество решения и увеличить скорость работы модели, а также позволяет получить гибридные методы на основе сеточных методов, явных или неявных численных схем и нейросетевого подхода для повышения точности решений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pantano C. Direct Simulation of Non-Premixed Flame Extinction in a Methane–Air Jet with Reduced Chemistry. *J. Fluid Mech.* 2004;514:231–270. DOI: 10.1017/S0022112004000266.

- 2. Smirnov N. N., Betelin V. B., Nikitin V. F., Stamov L. I., Altoukhov D. I. Accumulation of Errors in Numerical Simulations of Chemically Reacting Gas Dynamics. *Acta Astronautica*. 2015;117:338–355. DOI: 10.1016/j.actaastro.2015.08.013.
- 3. Smirnov N. N., Betelin V. B., Nikitin V. F., Phylippov Y. G., Koo J. Detonation Engine Fed by Acetylene–Oxygen Mixture. *Acta Astronautica*. 2014;104:134–146. DOI: 10.1016/j.actaastro.2014.07.019.
- 4. Smirnov N. N., Penyazkov O. G., Sevrouk K. L., Nikitin V. F., Stamov L. I., Tyurenkova V. V. Onset of Detonation in Hydrogen-Air Mixtures due to Shock Wave Reflection inside a Combustion Chamber. *Acta Astronautica*. 2018;149:77–92. DOI: 10.1016/j.actaastro.2018.05.024.
- 5. Lam S., Goussis D. Understanding Complex Chemical Kinetics with Computational Singular Perturbation. *Symp. (Int.) Combust.* 1989;22(1):931–941. DOI: 10.1016/S0082-0784(89)80102-X.
- 6. Maas U., Pope S. B. Simplifying Chemical Kinetics: Intrinsic Low-Dimensional Manifolds in Composition Space. *Combust. Flame*. 1992;88(3–4):239–264. DOI: 10.1016/0010-2180(92)90034-M.
- 7. Lovas T. Automatic Generation of Skeletal Mechanisms for Ignition Combustion Based on Level of Importance Analysis. *Combust. Flame.* 2009;156(7):1348–1358. DOI: 10.1016/j.combustflame.2009.03.009.
- 8. Chen J. Y. Development of Reduced Mechanisms for Numerical Modeling of Turbulent Combustion. *Workshop on "Numerical Aspects of Reduction in Chemical Kinetics"*, CERMICS-ENPC Cite Descartes Champus sur Marne, France. 1997.
- 9. Sung C., Law C., Chen J.-Y. An Augmented Reduced Mechanism for Methane Oxidation with Comprehensive Global Parametric Validation. *Symp. (Int.) Combust.* 1998;27(1):295–304. DOI: 10.1016/S0082-0784(98)80416-5.
- 10. Jones W. P., Rigopoulos S. Reduced Chemistry for Hydrogen and Methanol Premixed Flames via RCCE. *Combust. Theor. Model.* 2007;11:755–780. DOI: 10.1080/13647830701206866.
- 11. Koniavitis P., Rigopoulos S., Jones W. P. A Methodology for Derivation of RCCE-reduced Mechanisms via CSP. *Combust. Flame*. 2016;183:126–143. DOI: 10.1016/j.combustflame.2017.05.010.
- 12. Lu T., Law C. K. Toward Accommodating Realistic Fuel Chemistry in Large-Scale Computations. *Prog. Energy Combust. Sci.* 2009;35(2):192–215. DOI: 10.1016/j.pecs.2008.10.002.
- 13. Mikhalchenko E. V., Nikitin V. F., Goryachev V. D. Simulation of the Operation of a Detonation Engine. *Lecture Notes in Mechanical Engineering.* 2021. (In press.)
- 14. Pope S. B. Computationally Efficient Implementation of Combustion Chemistry Using in situ Adaptive Tabulation. *Combust. Theory Modell.* 1997;1(1):41–63. DOI: 10.1080/713665229.
- 15. Tonse S. R., Moriarty N. W., Brown N. J., Frencklach M. PRISM: Piecewise Reusable Implementation of Solution Mapping. An Economical Strategy for Chemical Kinetics. *Israel J. Chem.* 1999;39(1):97–106.
- 16. Ihme M., Schmitt C., Pitsch H. Optimal Artificial Neural Networks and Tabulation Methods for Chemistry Representation in LES of a Bluff-Body Swirl-Stabilized Flame. *Proceedings of the Combustion Institute*. 2009;32:1527–1535. DOI: 10.1016/J.PROCI.2008.06.100.
- 17. Franke L. L., Chatzopoulos A. K., Rigopoulos S. Tabulation of Combustion Chemistry via Artificial Neural Networks (ANNs): Methodology and Application to LES-PDF Simulation of Sydney Flame L. *Combustion and Flame*. 2017;185:245–260. DOI: 10.1016/j.combustflame.2017.07.014.
- 18. Chatzopoulos A. K., Rigopoulos S. A Chemistry Tabulation Approach via Rate-Controlled Constrained Equilibrium (RCCE) and Artificial Neural Networks (ANNs), with Application to Turbulent Non-Premixed CH4/H2/N2 Flames. *Proceedings of the Combustion Institute*. 2013;34:1465–1473. DOI: 10.1016/j.proci.2012.06.057.
- 19. GRI-Mech Version 3.0 7/30/99 CHEMKIN-II format.
- 20. CHEMKIN. A Software Package for the Analysis of Gas-Phase Chemical and Plasma Kinetics. *CHE-036-1. Chemkin Collection Release 3.6.* Reaction Design, September 2000.
- 21. Новиков Е. А. Исследование (m,2)-методов решения жестких систем. *Вычислительные технологии*. 2007;12(5):103-115.
- 22. Betelin V. B., Nikitin V. F., Mikhalchenko E. V. 3D Numerical Modeling of a Cylindrical RDE with an Inner Body Extending out of the Nozzle. *Acta Astronautica*. 2020;176:628–646. DOI: 10.1016/j.actaastro.2020.03.051.
- 23. He K., Zhang X., Ren S., Sun J. Deep Residual Learning for Image Recognition. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2016. DOI: 10.1109/CVPR.2016.90.

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-3

#### ЦИФРОВЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМАСШТАБНЫХ ЗАДАЧ ГОРЕНИЯ

#### Н. Н. Смирнов, В. В. Тюренкова, В. Ф. Никитин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация

Аннотация: разработка алгоритмической компоновки и программ для расчета многомасштабных процессов горения является актуальной междисциплинарной темой фундаментальных исследований, которая объединяет методы информационных технологий, механики многокомпонентных сплошных сред, химии и математического моделирования. Задача разработки алгоритмической компоновки и подбора программ для расчета многомасштабных процессов горения набирает актуальность с каждым годом в связи как с интенсивным развитием вычислительных методов и моделей, так и с увеличением современных возможностей суперкомпьютерных вычислений.

Практическая применимость разрабатываемых вычислительных моделей и методов охватывает проблемы энергетики, двигателестроения, взрывопожаробезопасности, а также интенсификации добычи полезных ископаемых с применением методов термохимического воздействия на пласт.

Основными проблемами, возникающими в процессе моделирования, являются: а) многомасштабность, не позволяющая проводить моделирование всех задействованных процессов на единых даже масштабируемых сетках; б) жесткость и большая размерность системы дифференциальных уравнений для описания химической кинетики, решение которой может занимать 80% процессорного времени. Данная статья представляет обзор уже проведенных исследований в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН и анализ трудностей, с которыми столкнулись исследователи. В статье содержатся новые предложения по преодолению вычислительных трудностей и намечены пути их реализации.

Возможность решения проблем в части многомасштабности видится в применении подходов многоуровневого моделирования, при котором детальное решение задачи более мелкого масштаба обрабатывается и вносится в качестве элемента модели более крупного масштаба. Для решения проблемы сокращения времени интегрирования уравнений многостадийной химической кинетики актуальным трендом является применение нейросетевых подходов и методов в рамках разрабатываемых вычислительных моделей. Этот подход в настоящее время развивается сотрудниками отдела вычислительных систем совместно с коллективом Центра оптико-нейронных технологий ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

*Ключевые слова*: вычислительное моделирование, горение, многофазные среды, нейросети. *Благодарности*: работы, выполненные в МГУ, были поддержаны РФФИ (грант 20-03-00297).

*Для цитирования*: Смирнов Н. Н., Тюренкова В. В., Никитин В. Ф. Цифровые модели для решения многомасштабных задач горения. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):30–41. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-3.

#### SIMULATION MODELS FOR SOLVING MULTISCALE COMBUSTION PROBLEMS

#### N. N. Smirnov, V. V. Tyurenkova, V. F. Nikitin

Moscow State University, Moscow, Russian Federation
Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of
Sciences", Moscow, Russian Federation

Abstract: the development of algorithms and software for analyzing multiscale combustion processes is a relevant field of fundamental research that combines the methods of information technologies, mechanics of multicomponent continua, combustion chemistry, and simulation. It gains relevance year to year due to the intensive development of computational methods and models, and with the increase in supercomputing performance.

The applications of the proposed computational models and methods include energy, engine manufacturing, explosion and fire safety fields, as well as thermochemical mineral recovery stimulation methods.

The key simulation problems are a. the problem is multiscale: all the processes involved cannot be simulated with the same grid, even a scalable one; b. the rigidity and large dimensionality of the system of differential equations that describes chemical kinetics. Its solution may take up to 80 % of the processor time. This paper is an overview of the research conducted at the Scientific Research Institute for System Analysis and an analysis of the difficulties faced by the researchers. It also proposes new ways for overcoming the computational difficulties and give some implementation considerations.

To solve the multi-scale issue, multi-level modeling approaches can be used: a detailed solution to a smaller-scale problem is processed and introduced as a component of a larger-scale model. To reduce the integration time of the multi-stage chemical kinetics equations, the current approach is applying neural networks and methods to the existing computational models. This approach is currently being developed at the Department of Computing Systems in collaboration with the Center for Optical-Neural Technologies, SRISA.

Keywords: computer simulation, combustion, multiphase media, neural networks.

*Acknowledgements*: this study is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-03-00297).

Cite this article: Smirnov N. N., Tyurenkova V. V., Nikitin V. F. Simulation Models for Solving Multiscale Combustion Problems. Russian Journal of Cybernetics. 2021;2(4):30–41. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-3.

#### Введение

Развитие инфраструктуры информационного общества в государстве – это, без сомнения, важнейшая задача, решение которой приведет к повышению эффективности работы как органов управления различных уровней, так и всех отраслей промышленности, и, в целом, к повышению качества и безопасности жизни граждан.

Информационные технологии – это не только системы телекоммуникаций, хранения, обработки информации и принятия решений. Стратегические информационные технологии определяются созданием в государстве взаимоувязанной триады: инфраструктуры суперкомпьютеров и сетей, программных систем моделирования сложных технологических, природных, физиологических, экономических и социальных процессов, а также технологии использования этих двух компонент в повседневной деятельности ученых, конструкторов, технологов, врачей, экономистов, управленцев, нацеленной на достижение стратегических национальных приоритетов.

Задачи, нуждающиеся в проведении предсказательного вычислительного моделирования горения и взрыва в природных и технических системах, включают:

- а) моделирование процессов в энергоустановках и в двигателях различных типов;
- б) моделирование эффективности мер взрывопожаробезопасности при возникновении природных или техногенных катастроф.

В камерах сгорания большинства двигателей используются диспергированные горючие компоненты (рис. 1).

Близко примыкают к отмеченным задачам и вопросы безопасности транспортировки и хранения жидких горючих веществ, оценки последствий разрушения хранилищ жидких горючих материалов и сжиженных газов, формирования газокапельных облаков с последующим воспламенением и горением, так называемые Boiling Liquid Expanding Vapour Explosions (BLEVEs) [1].

При решении задач горения и перехода горения в детонацию в многофазных системах необходимо учитывать следующие ключевые аспекты проблемы: процессы образования горючей смеси (неравновесные фазовые переходы, диффузия, турбулентность), процессы воспламенения и распространения волны горения (за счет механизмов молекулярного или турбулентного переноса или за счет механизма сжатия в ударных волнах, поддерживаемых энерговыделением за фронтом), переходные процессы (переход горения в детонацию либо расщепление детонационной волны на ударную волну и отстающий от нее фронт горения).

При возникновении техногенных или природных катастроф процессы перехода горения в детонацию являются нежелательными и крайне опасными, при возникновении детонационной волны принимаются меры по ее разрушению (добавление ингибиторов, применение механических детонационных арресторов). При использовании детонации в камерах сгорания детонационных двигателей, устройств напыления и др. важным вопросом является промотирование возникновения устойчивой





(a)

**Рис. 1.** Примеры камер сгорания, использующих диспергированное горючее в атмосфере газообразного окислителя (а) и диспергированный окислитель в атмосфере газообразного горючего (б)

детонации, сокращение длины участка перехода горения в детонацию и уменьшение времени инициирования детонации.

В данной работе будут освещены особенности основных этапов вычислительного моделирования переходных процессов в химически реагирующих многофазных средах.

#### Задачи испарения и горения одиночных капель

Будем предполагать, что процесс горения капли протекает в квазистационарном режиме, т.е. размеры капли с течением времени уменьшаются значительно медленнее, чем устанавливается газодинамическая картина течения в окрестности капли. Данное предположение подтверждается тем, что скорость уменьшения диаметра капли в  $\frac{\rho g}{\rho_l} \sim 10^{-3}$  раз меньше скорости оттока газов от поверхности. В рамках этого предположения скорость выгорания определяется в каждый момент времени из стационарного решения.

При наличии массовых сил (сил тяжести) могут возникнуть термогравитационные конвективные течения в окрестности капли (радиуса  $x_w$ ), являющиеся существенным эффектом при  $Mar = t_{evap}/t_{conv} = \frac{\sqrt{gx_w^3}h_L}{D\hat{c}_{pe}(T_e-T_w+Y_{1e}\Phi_N\Delta H)} > 1$ . Тогда для капель с радиусом  $x_w^{3/2} < \frac{D\hat{c}_{pe}(T_e-T_w+Y_{1e}\Phi_N\Delta H)}{\sqrt{g}h_L}$  влиянием термогравитационных конвективных течений в окрестности капли можно пренебречь (Mar < 1) [2].

Система уравнений для описания стационарной задачи будет иметь следующий вид [2–3]:

$$\frac{d}{dx}(\rho v x^{2}) = 0 \frac{d}{dx}(\rho v^{2} x^{2}) = \frac{d}{dx}\left(x^{2} \mu \frac{dv}{dx}\right) - x^{2} \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\rho Y_{i} v x^{2}) = \frac{d}{dx}\left(x^{2} \rho D_{i} \frac{dY_{i}}{dx}\right) + \dot{M}_{i}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\frac{d}{dx}(\rho h v x^{2}) = \frac{d}{dx}\left(x^{2} \lambda \frac{dT}{dx}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{2} \mu v \frac{dv}{dx}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{2} \rho D_{i} \sum_{i=1}^{N} h_{i} \frac{dY_{i}}{dx}\right)$$

$$p = \rho RT \sum_{i=1}^{N} \frac{Y_{i}}{m_{i}}.$$
(1)

Граничные условия на поверхности раздела фаз  $x = x_w$ :

$$(\rho v)_{g} = (\rho v)_{l} = \dot{m}$$

$$(\rho v)_{g} Y_{gi} - (\rho D_{i})_{g} \frac{\partial Y_{i}}{\partial x} \Big|_{x \to x_{w}^{+}} = (\rho v)_{l} Y_{li} - (\rho D_{i})_{l} \frac{\partial Y_{i}}{\partial x} \Big|_{x \to x_{w}^{-}} = \dot{m}_{i}, i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^{N} h_{Li} \dot{m}_{i} = \lambda_{g} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x \to x_{w}^{+}} - \lambda_{l} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x \to x_{w}^{-}}.$$

$$(2)$$

Предполагается, что скорости движения газа, вызванные наличием горения, незначительны, эффектами, связанными с трением и относительными изменениями давления, можно пренебречь. Тогда вместо уравнения количества движения в системе (1) будем применять условие гомобаричности (dp/dx = 0). Для описания неравновесного испарения на поверхности фазового перехода будем использовать уравнение Герца–Кнудсена [3]:

$$\dot{m} = \delta_i \sqrt{\frac{m_i}{2\pi RT}} (p_i^*(T_w) - p_i).$$

Здесь и в дальнейшем введены следующие обозначения:  $m_i$  — молярная масса i-го компонента,  $\rho_i$  — плотность i-го компонента,  $\rho = \sum\limits_{i=1}^N \rho_i$  — плотность смеси,  $Y_i = \frac{\rho_i}{\rho}$  — массовая концентрация i-го компонента, v — скорость смеси,  $p = \sum\limits_{i=1}^N p_i$  — давление смеси, T — температура смеси,  $\dot{M}_i$  — массовая скорость рождения i-го компонента,  $h_i^o$  — удельная энтальпия образования i-го компонента,  $h = \sum\limits_{i=1}^N Y_i h_i$  — удельная энтальпия всей смеси, где  $h_i = c_{pi}T + h_i^o$ ,  $h_{Li} = (h_i)_g - (h_i)_l$  — удельная теплота фазового перехода i-го компонента,  $\hat{c}_p = \sum\limits_{i=1}^N Y_i c_{pi}$  — удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении,  $\omega$  — средняя скорость брутто-реакции,  $\nu_i'$ ,  $\nu_i''$  — стехиометрический коэффициент i-го компонента в реакции до и после соответственно,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\Delta H = \frac{\sum\limits_{i=1}^N m_i h_i^o (\nu_i' - \nu_i'')}{m_N (\nu_N' - \nu_N'')}$  — удельная теплота сгорания горючего, D — коэффициент диффузии,  $\Phi_i = \frac{m_i (\nu_i''' - \nu_i')}{m_1 (\nu_1''' - \nu_i')}$  — стехиометрическое отношение,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости, R — универсальная газовая постоянная,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  — коэффициент Пуассона (показатель адиабаты).

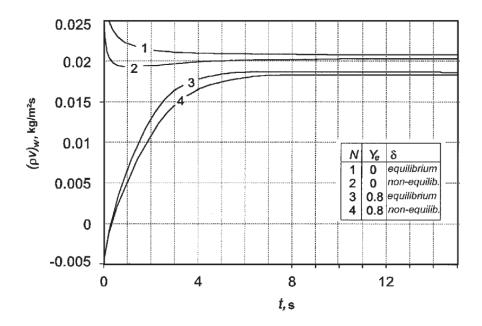
Индексы: g — газ, l — жидкость, w — поверхность фазового перехода, e — бесконечность, \* — поверхность пламени.

Решение нестационарной задачи испарения капли показывает (рис. 2), что существенно нестационарная стадия достаточно быстро выходит на квазистационарный режим. Решения, полученные в рамках равновесной и неравновесной моделей, отличаются на обеих стадиях. При уменьшении радиуса капли различие между решениями, полученными в рамках равновесной и неравновесной моделей, сильно возрастает.

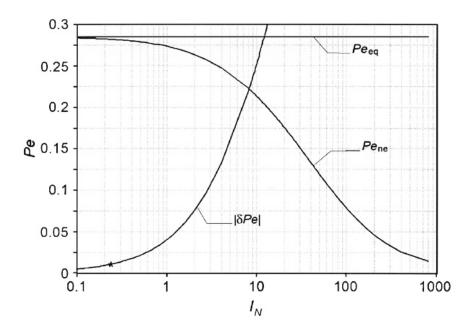
Число Пекле  $Pe=\frac{\dot{m}x_w}{\rho D}$  является безразмерной характеристикой скорости испарения. Влияние неравновесных эффектов на процесс фазового перехода характеризуется безразмерным критерием  $I_N=\frac{\lambda}{\rho A_p\delta_N x_w}\sqrt{\frac{2\pi}{R_eT_e}}$ . На рис. 3 представлены графики зависимости равновесного и неравновесного чисел Пекле и их разницы  $\delta Pe=(Pe_{ne}-Pe_{eq})/Pe_{eq}$  от значений критерия для следующих значений параметров:

$$\frac{m_i}{m_N} = 4.75,$$
  $\chi_L = 0.54,$   $\frac{p_0}{p_e} = 1,$   $Y_{Ne} = 0.1,$   $\Gamma_{eW} = 1,$   $\chi_{ho} = 0.9.$ 

На рис. 4 приведены результаты решения задачи испарения одиночной капли. Скорость выгорания капли может быть определена из уравнения  $\frac{dx_w}{dt} = -\frac{\dot{m}}{\rho_{Nl}}$ , которое, введя безразмерные переменные



**Рис. 2.** Решение нестационарной задачи: зависимость массовой скорости испарения от времени для различных начальных концентраций паров в окружающей атмосфере и различных моделей испарения



**Рис. 3.** Графики зависимости равновесного и неравновесного чисел Пекле и их разницы от значений критерия

$$r=rac{x_w}{x_{wo}}$$
 и  $au=rac{t}{t_o}$ , преобразуем к виду  $2rrac{dr}{d au}=-rac{Pe}{Pe_{eq}}=-\Psi_{\it S}(r), r(0)=1$ . Причем при  $Pe_e=Pe_{eq}\ \Psi_{\it S}\equiv 1,$  а в неравновесном случае  $\Psi_{\it S}\approx \exp(-rac{kI_{N0}^2}{r}).$ 

Из графиков (рис. 4) видно, что при изменении начального значения параметра неравновесности время испарения существенно меняется.

Полученные точные решения задач испарения сферических капель позволяют сравнить результаты неравновесных и равновесных моделей и определить пределы применимости квазиравновесного подхода. Различия квазиравновесных и неравновесных решений возрастают при уменьшении радиуса капель и увеличении коэффициента диффузии. Найден безразмерный критерий, характеризующий степень отклонения законов испарения капель от квазиравновесных. Неравновесные модели более адекватно описывают финальные стадии испарения капель, а также более точно определяют время испарения.

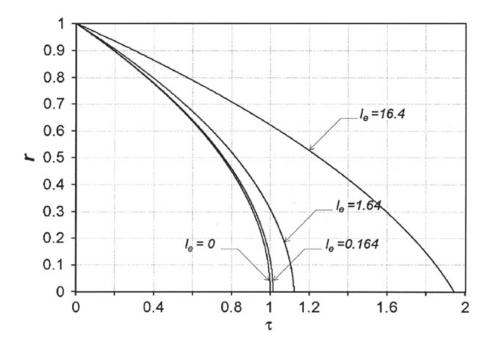
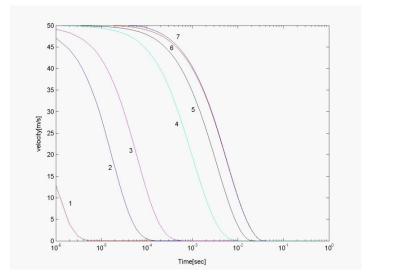


Рис. 4. Результаты решения задачи испарения одиночной капли

#### Взаимодействие отдельной капли при движении в нагретом газе

Макрокинетика процессов горения многофазных смесей включает модели турбулентного течения несущей газовой фазы с учетом влияния взвешенных частиц (притоков массы, количества движения и энергии от них), модели динамики частиц с учетом взаимодействия с турбулентными вихрями, модели фазовых переходов и дробления частиц, кинетического механизма химических реакций. Детали моделей изложены в работах [4–7].

Эволюция скорости и диаметра капель при испарении и торможении в нагретом газе, изменение средней температуры капель для различных начальных диаметров представлены на рис. 5–7.



1:  $D_0 = 1 \mu m$ 

2:  $D_0 = 5 \mu m$ 

3:  $D_0 = 10 \mu m$ 

4:  $D_0 = 50 \mu m$ 

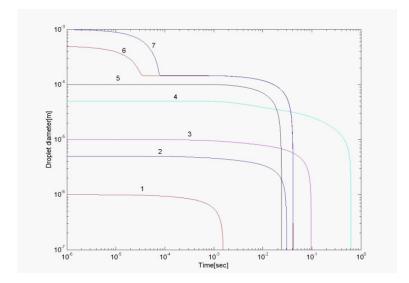
5:  $D_0 = 100 \mu m$ 

6: D<sub>o</sub>=500μm

7:  $D_0 = 1000 \mu m$ 

**Рис. 5.** Эволюция скорости капель различных диаметров при торможении в нагретом газе. Hачальная скорость = 50 m/s

Выделено два сценария взаимодействия капель с горячим газовым потоком и испарения. Относительно малые капли последовательно претерпевают нагрев, охлаждение вследствие теплопотерь на испарение и затем быстрый нагрев до полного испарения. Более крупные капли могут быть сразу нагреты при торможении до критической температуры и быстро испариться. Дробление капель существенно влияет на сценарий их нагрева и испарения.



1: D<sub>0</sub>=1μm

2: D =5μm

3: D =10μm

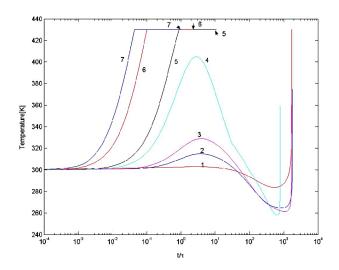
4: D =50μm

5: D =100μm

6: D<sub>=</sub>500μm

7: D = 1000 µm

**Рис. 6.** Изменение размеров капель различных начальных диаметров при испарении в нагретом газе. Hачальная скорость = 50 m/s



1:  $D_0 = 1 \mu m$ 

2: D<sub>0</sub>=5μm

3:  $D_0 = 10 \mu m$ 

4:  $D_0 = 50 \mu m$ 

5: D<sub>o</sub>=100μm

6: D<sub>o</sub>=500μm

7: D<sub>o</sub>=1000μm

**Рис. 7.** Зависимость средней температуры капель от приведенного времени, отнесенного ко времени из торможения в атмосфере ( $\tau = v_o/a_o$ ,  $a_o = f_d(t=0)/m_o$ )

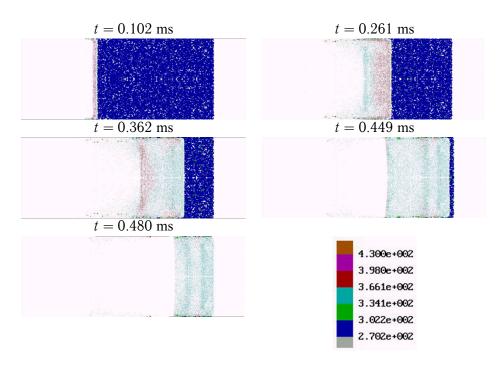
Эволюция струи горючего газа, вдуваемой в высокотемпературный газ, имеет три характерных стадии: быстрое испарение и охлаждение окружающего газа, удлинение струи в охлажденной атмосфере, воспламенение паров, повышение температуры и уменьшение капельной струи.

#### Инициирование детонации в полидисперсных смесях

С использованием разработанной и верифицированной модели горения полидисперсных смесей [8] были рассмотрены задачи инициирования детонации ударными волнами и при мягком зажигании с последующим переходом горения в детонацию. Результаты представлены на рис. 8–11.

Установлено, что конвективное горение в аэродисперсных смесях может привести либо к галопирующему режиму, либо к установлению детонации. Увеличение начальной температуры смеси, давления, энергии зажигания и уменьшение времени экспозиции энергии зажигания способствует ускорению пламени. Ударная волна сильно затухает при входе в облако капель. Затем при воспламенении паров возможно ее ускорение и возникновение детонационного режима. Предетонационное время существенно зависит от функции распределения капель по размерам в аэровзвеси.

#### Повышение быстродействия вычислительного моделирования



**Рис. 8.** Последовательные стадии распространения ударной волны в полидисперсной смеси углеводородного горючего с треугольной функцией распределения размеров капель: средний диаметр 50 мкм, минимальный 10 мкм, максимальный 100 мкм

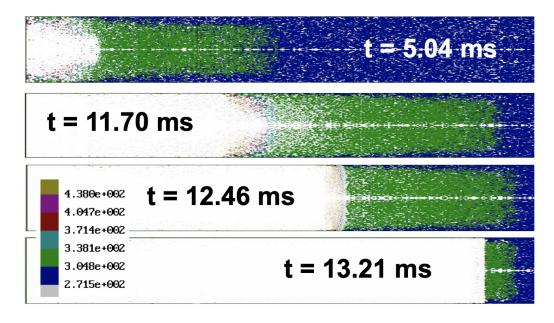
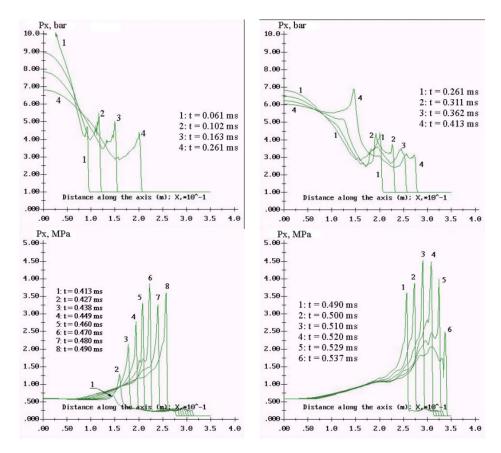


Рис. 9. Переход конвективного горения полидисперсной смеси в детонацию

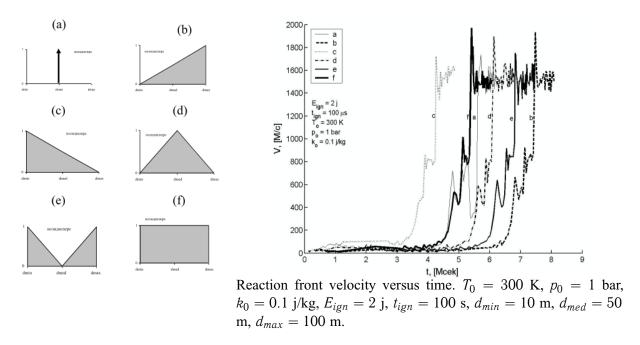
Эффективным способом повышения быстродействия вычислительного моделирования являются параллельные вычисления на многопроцессорных суперЭВМ. Основными проблемами, возникающими в процессе моделирования физико-химической газовой динамики полидисперсных смесей, являются:

- а) многомасштабность, не позволяющая проводить моделирование всех задействованных процессов на единых даже масштабируемых сетках;
- б) жесткость и большая размерность системы дифференциальных уравнений для описания химической кинетики, решение которой может занимать 80 % процессорного времени.

Простейшая модель ускорения расчетов при применении параллельных алгоритмов вычислений показывает ограниченность возможности ускорения при подключении дополнительных процессоров [9–11], а именно ускорение расчетов при выполнении параллельных вычислений по отношению



**Рис. 10.** Профили давления за ударной волной в полидисперсной смеси углеводородного горючего с треугольной функцией распределения размеров капель: средний диаметр 50 мкм, минимальный 10 мкм, максимальный 100 мкм



**Рис. 11.** Изменение скорости фронта реакции при переходе горения в детонацию в полидисперсных смесях с различным распределением капель по размерам

к последовательному алгоритму обычно определяется из соотношения (рис. 12), выражающего закон Амдала, который иллюстрирует ограничение роста производительности вычислительной системы с увеличением количества вычислителей. Джин Амдал сформулировал закон в 1967 году, обнаружив простое по существу, но непреодолимое по содержанию ограничение на рост производительности при

распараллеливании вычислений. В случае, когда задача разделяется на несколько частей, суммарное время её выполнения на параллельной системе не может быть меньше времени выполнения самого длинного фрагмента. Согласно этому закону ускорение выполнения программы за счёт распараллеливания её инструкций на множестве вычислителей ограничено временем, необходимым для выполнения её последовательных инструкций.

Однако, если мы примем во внимание обменные процессы между процессорами и памятью и пересылки данных между различными разделами памяти, количество которых возрастает с увеличением параллельных процессов исполнения алгоритма, то закон Амдала нуждается в модификации (рис. 12), которая показывает, что неограниченное возрастание параллельных нитей приведет к снижению эффективности ускорения.

На рис. 12 в формулах использованы следующие обозначения:  $T_{suc}$  — время последовательного исполнения алгоритма,  $T_{par}$  — время решения задачи с учетом распараллеливания на некоторое количество вычислителей p,  $\alpha$  — часть программы, которая принципиально не может быть распараллелена и должна исполняться в последовательном режиме,  $\tau$  — среднее время единичного обменного процесса, n — количество шагов вычислений.

В результате проведенного анализа показано, что простое наращивание мощности компьютеров не дает гарантий эффективного решения многомасштабных задач горения в технических и природных системах [12]. Необходима адаптация архитектуры суперкомпьютеров и механизмов обменных процессов для решения конкретного класса многомасштабных задач.

# Закон Амдала и его модификация

$$T_{suc}\alpha + \frac{T_{suc}(1-\alpha)}{p} = T_{par} \qquad \qquad A_c = \frac{T_{suc}}{T_{par}} \qquad \qquad A_c = \frac{T}{T_P} = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{n}}$$

 Учет времени пересылки информации между параллельными процессами

$$T_{suc}\alpha + \frac{T_{suc}(1-\alpha)}{p} + n\tau p = T_{par} \qquad A_c = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p} + p\frac{n\tau}{T_{suc}}} \qquad \frac{\tau}{T_{suc}} \ll 1$$

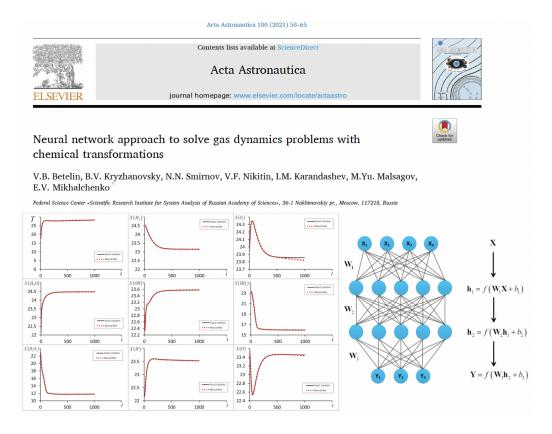
$$p = \frac{(1-\alpha)T_{suc}}{2n\tau} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4n\tau}{(1-\alpha)T_{suc}}}\right)$$

$$p_{max} = \sqrt{\frac{(1-\alpha)T_{suc}}{n\tau}}$$

Рис. 12. Ограничения на ускорения вычислений при распараллеливании алгоритма

Для решения проблемы сокращения времени интегрирования уравнений многостадийной химической кинетики актуальным трендом является применение нейросетевых подходов и методов в рамках разрабатываемых вычислительных моделей. Этот подход в настоящее время развивается коллективом отдела вычислительных систем совместно с коллективом Центра оптико-нейронных технологий ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН [13] (рис. 13). Замена интегрирования системы «жестких» дифференциальных уравнений нейросетевым алгоритмом с возможностью его реализации в кремнии в качестве сопроцессора позволит существенно ускорить вычисления. Такое ускорение возможно за счет потери универсальности: нейросеть сможет рассчитывать только один механизм, на который она обучена. Однако обучение нейросети можно провести с любой наперед заданной точностью, поскольку размеры обучающей и контрольной выборок в данном случае ничем не ограничены, кроме времени проведения детальных кинетических расчетов, но такие расчеты надо будет провести всего один раз.

#### Заключение



**Рис. 13.** Применение нейросетей для моделирования химической кинетики при проведении газодинамических расчетов

В статье представлен обзор уже проведенных исследований по вычислительному моделированию многомасштабных задач горения, проведен анализ трудностей, с которыми столкнулись исследователи.

Анализ проблем, связанных с вычислительным моделированием многомасштабных процессов горения в гетерогенных системах, показывает, что все возрастающая сложность и многоуровневость моделей требует разработки новых подходов к созданию аппаратно-программных вычислительных комплексов. Наращивание мощности компьютеров и параллельных процессов не дает гарантий эффективного решения многомасштабных задач горения. Необходима адаптация архитектуры суперкомпьютеров и механизмов обменных процессов для решения конкретного класса многомасштабных задач. Замена решения трудоемких задач химической кинетики нейросетевыми алгоритмами с возможностью их реализации в кремнии в качестве сопроцессоров позволит существенно ускорить вычисления.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Makhviladze G. M., Roberts J. P., Yakush S. E. Combustion of Two-Phase Hydrocarbon Fuel Clouds Released into the Atmosphere. *Combustion and Flame*. 1999;118:583–605.
- 2. Dushin V. R., Smirnov N. N., Kulchitskiy A. V., Nerchenko V. A., Nikitin V. F., Osadchaya E. S., Phylippov Yu. G. Mathematical Simulation for Non-Equilibrium Droplet Evaporation. *Acta Astronautica*. 2008;63:1360–1371.
- 3. Tyurenkova V. V., Smirnov N. N., Guendugov V. M. Analytical Solution for a Single Droplet Diffusion Combustion Problem Accounting for Several Chain Reaction Stages. *Acta Astronautica*. 2013;83:208–215.
- 4. Smirnov N. N., Nikitin V. F., Legros J. C. Ignition and Combustion of Turbulized Dust-Air Mixtures. Combustion and Flame. 2000;123(1):46–67.
- 5. Betelin V. B., Smirnov N. N., Nikitin V. F., Dushin V. R., Kushnirenko A. G., Nerchenko V. A. Evaporation and Ignition of Droplets in Combustion Chambers Modeling and Simulation. *Acta Astronautica*. 2012;70:23–35. DOI: 10.1016/j.actaastro.2011.06.021.

- 6. Smirnov N. N., Betelin V. B., Kushnirenko A. G., Nikitin V. F., Dushin V. R., Nerchenko V. A. Ignition of Fuel Sprays by Shock Wave Mathematical Modeling and Numerical Simulation. *Acta Astronautica*. 2013;87:14–29.
- 7. Smirnov N. N., Nikitin V. F., Dushin V. R., Phylippov Yu. G., Nerchenko V. A., Khadem J. Combustion Onset in Non-Uniform Dispersed Mixtures. *Acta Astronautica*. 2015;115:94–101.
- 8. Смирнов Н. Н., Тюренкова В. В., Стамов Л. И., Хадем Дж. Вычислительное моделирование течений полидисперсных газокапельных смесей с химическим превращениями. *Успехи кибернетики*. 2021;2(2):29–41. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-2-3.
- 9. Amdahl G. M. Validity of the Single Processor Approach to Achieving Large Scale Computing Capabilities. *AFIPS Conf. Proc.* 1967;30:483-485.
- 10. Gustafson J. L. Reevaluating Amdahl's Law. Communications of the ACM. 1988;31(5):532–533.
- 11. Amdahl G. M. Computer Architecture and Amdahl's Law. Computer. 2013;46(12):38-46.
- 12. Смирнов Н. Н. Высокопроизводительные вычисления в задачах предсказательного моделирования. Вестник кибернетики. 2016;2:112–116.
- 13. Betelin V. B., Kryzhanovsky B. V., Smirnov N. N., Nikitin V. F., Karandashev I. M., Malsagov M. Yu., Mikhalchenko E. V. Neural Network Approach to Solve Gas Dynamics Problems with Chemical Transformations. *Acta Astronautica*. 2021;180:58–65.

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-4

# СТАТФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОПТИЧЕСКОЙ НЕЙРОСЕТИ, ОСНОВАННОЙ НА ПРОЦЕССАХ ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОГО СМЕШЕНИЯ

#### Б. В. Крыжановский, Л. Б. Литинский

Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0901-6370, kryzhanov@niisi.ras.ru

Аннотация: исследованы статфизические свойства оптической нейросети. Получены условия, при которых возможно обучение нейросети алгоритмом максимального правдоподобия. Исследование проведено на примере трехмерной модели Изинга, в которой последовательно добавляется дальнодействие так, что в пределе модель можно описывать теорией среднего поля. Получены аналитические оценки для критической температуры нейросети при учете взаимодействия со вторыми и третьими соседями. Данные оценки на всем интервале значений параметров взаимодействия хорошо согласуются с результатами, полученными методами Монте-Карло. Установлено, что с ростом числа положительных межсвязей величина критической температуры падает и алгоритм максимального правдоподобия может применяться практически без ограничений.

Ключевые слова: оптическая нейросеть, модель Изинга, дальнодействие, метод п-окрестности. Благодарности: работа выполнена в рамках госпрограммы ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, проект 0065-2019-0003.

*Для цитирования*: Крыжановский Б. В., Литинский Л. Б. Статфизические свойства оптической нейросети, основанной на процессах четырехволнового смешения. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):42-48. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-4.

# STATISTICAL PHYSICAL PROPERTIES OF FOUR-WAVE MIXING OPTICAL NEURAL NETWORK

#### B. V. Kryzhanovsky, L. B. Litinsky

Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Moscow, Russian Federation

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0901-6370, kryzhanov@niisi.ras.ru

Abstract: the paper investigates the statistical physical properties of an optical neural network. The conditions for training a neural network by the maximum likelihood algorithm are identified. The study uses a three-dimensional Ising model, to which a long-range action is sequentially added so that in the limit the model can be described by the mean-field theory. Analytical estimates of the critical neural network temperature were obtained considering the interaction with the second and third-order neighbors. The estimates for the entire interval of the interaction parameters are in good agreement with the results obtained by Monte Carlo methods. It is found that as the number of positive interconnections increase, the critical temperature value decreases and the maximum likelihood algorithm can be applied virtually without any restrictions.

Keywords: optical neural network, Ising model, long-range interaction, n-coherence method.

*Acknowledgements*: the work was financially supported by SRISA under the government program No. 0065-2019-0003.

Cite this article: Kryzhanovsky B. V., Litinsky L. B. Statistical Physical Properties of Four-Wave Mixing Optical Neural Network. Russian Journal of Cybernetics. 2021;2(4):42–48. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-4.

#### Введение

Цель проводимого исследования состоит в том, чтобы изучить возможность использования алгоритма максимального правдоподобия [1, 2] (ML-algorithm (Maximum-Likelihood Algorithm)) для глубокого обучения нейросети, адаптированной к распознаванию оптических паттернов. Поскольку этот

алгоритм можно использовать только в области температур, где нет фазового перехода, основной упор сделан на анализ того, как критическая температура зависит от параметров матрицы связи. Описание функционирования такой сети дается далее. Формально оно сводится к описанию эволюции спиновой системы. Соответственно, для моделирования термодинамических свойств нейросети мы используем трехмерную модель Изинга, в которой учитывается взаимодействие не только с ближайшими, но и с последующими соседями.

Если при рассмотрении 3D-модели Изинга учитывать взаимодействие только между ближайшими соседями, система демонстрирует фазовый переход второго рода, характеризующийся бесконечной особенностью теплоемкости. Мы не знаем наверняка, является ли это логарифмической сингулярностью или теплоемкость является степенной функцией с очень малым показателем степени, но важно, чтобы при стремлении температуры к критическому значению теплоемкость увеличивалась неограниченно. Теоретические оценки [3–6], а также результаты многих компьютерных симуляций [7, 8] свидетельствуют в пользу такого поведения.

Нас интересует, что произойдет, если мы также учтем взаимодействия со следующими ближайшими и следующими ближайшими соседями. Влияет ли такое изменение модели на характер особенности в критической точке? Поясним причину нашего интереса. В принципе, мы также можем включить в наши расчеты взаимодействия с соседями «следующий-следующий-следующий-ближайший» и так далее. Таким образом, в конечном итоге становится возможным описать систему с помощью модели среднего поля. В рамках приближения среднего поля фазовый переход в модели Изинга тоже второго рода, но теплоемкость имеет конечный скачок. Следовательно, если учесть все больше и больше удаленных соседей, где-то изменится тип особенности теплоемкости. Другими словами, мы должны получить конечный скачок вместо бесконечной особенности.

Одной из наших задач было определить: изменяет ли тип сингулярности включение взаимодействия с соседями из последующих координационных сфер? Мы не получаем однозначного ответа, однако мы показываем, что увеличение числа взаимодействующих соседей изменяет поведение теплоемкости вблизи критической точки.

Другой задачей было выяснить: как включение в рассмотрение вторых и третьих соседей отразится на значении критической температуры? Если взаимодействия с ними положительны — будет ли критическое значение возрастать или падать? Это важно, если иметь в виду аппаратную реализацию оптической нейросети.

Работа устроена следующим образом. Сначала дается сжатое описание нейросети, адаптированной для распознавания оптических паттернов, описываются ограничения на использование МL-алгоритма. Далее излагаются результаты численного эксперимента для 3D-модели Изинга с включением дальнодействия. Найденные экспериментальные значения критической температуры сравниваются с теоретическими оценками по методу *п*-окрестностей [9, 10]. В следующем разделе суммированы экспериментальные результаты для спонтанной намагниченности, внутренней энергии и теплоемкости, а далее изложены результаты, относящиеся к учету взаимодействия с более дальними (третьими) соседями. Заключительные замечания отнесены в последний раздел.

#### Обучение оптической нейросети

В работах [11, 12] изучены распознающие возможности оптико-электронной нейросети, способной хранить и обрабатывать информацию, закодированную в виде частотно-фазовой модуляции. Информативные сигналы в такой сети передаются по межсвязям в виде квазимонохроматических импульсов на r частотах. Однако формальное описание сети удобнее всего вести на языке векторного формализма, описывая r различных состояний нейронов ортами r-мерного пространства  $\{e_l\}_{l=1}^r$ . Тогда состояние сети как целого описывается набором векторов:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_N),\tag{1}$$

где вектор-нейрон  $\mathbf{s}_i$  принимает одно из базисных значений  $\mathbf{e}_l$ , N — число нейронов, а динамика сети описывается гамильтонианом

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{s}_{i}^{+} \mathbf{J}_{ij} \mathbf{s}_{j}.$$

Здесь  $r \times r$ -матрица  $\mathbf{J}_{ij}$  задает связь между i-м и j-м вектор-нейронами, причем  $\mathbf{J}_{ii} \equiv \mathbf{0}$ , поскольку самодействие в системе отсутствует. Эволюция системы подчиняется следующим правилам. Суммарный сигнал, поступающий в момент времени  $\tau$  на i-й нейрон, описывается r-мерным вектором, который вычисляется как линейная комбинация

$$\mathbf{h}_{i}(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{J}_{ij} \mathbf{s}_{j}(\tau). \tag{2}$$

Далее отыскивают проекции вектора  $\mathbf{h}_i(\tau)$  на орты  $\{\mathbf{e}_l\}_{l=1}^r$  и определяют максимальную по модулю проекцию — пусть это будет проекция на  $\mathbf{e}_k$ . Тогда в следующий момент времени i-му нейрону приписывают состояние  $\mathbf{s}_i(\tau+1)=\mathbf{e}_k\cdot sign\left(\mathbf{e}_k\mathbf{h}_i(\tau)\right)$  и переходят к анализу следующего нейрона. Иными словами, из приходящего на нейрон сигнала (2) выделяется частота с максимальной амплитудой и нейрон испускает единичный импульс на этой частоте. Формализм (1)–(2) совпадает с описанием спиновой модели Поттса, в которой состояния спинов описываются r-мерными векторами. В дальнейшем мы будем использовать спиновую терминологию: спин  $\mathbf{s}_i$  под действием локального поля  $\mathbf{h}_i$  разворачивается вдоль ближайшей к  $\mathbf{h}_i$ оси координат  $\mathbf{e}_k$ .

Детальный анализ свойств подобной нейросети, матрица связей которой построена по обобщенному правилу Хебба, проделан в [11, 12], в которых показано, что сеть способна хранить и эффективно распознавать Mискаженных паттернов, где  $M = Nr(r-1)(1-2a)^2/2$ . Здесь a — уровень шума, т.е. вероятность искажения компонент поступающего на вход сети сигнала. В простейшем случае r=2 такая сеть сводится к модели Хопфилда, обрабатывающей бинарные сигналы:  $s_i = \pm 1$ .

Для конволюционных нейросетей нет возможности построения матрицы связей по правилу Хебба (отсутствует понятие «паттерн»). Такую сеть обучают с помощью ML-алгоритма [1], который основан на методе контрастной дивергенции (Contrastive Divergence Method) [2]. Приведем основные выражения из работы [1], кратко описывающие суть этого алгоритма. Пусть распределение по состояниям **S** задается вероятностью:

$$P(\mathbf{S}, \mathbf{J}) = \frac{1}{Z(\mathbf{J})} e^{-E(\mathbf{S}, \mathbf{J})},$$
(3)

где  $E(\mathbf{S},\mathbf{J})$  — энергия в состоянии S при заданной матрице связей  $\mathbf{J} = \{\mathbf{J}_{ij}\}$ , а  $Z(\mathbf{J}) = \sum_{\mathbf{S}} e^{-E(\mathbf{S},\mathbf{J})}$  — нормировочная константа (то же, что статистическая сумма). Тогда обучение ML-методом при заданной обучающей выборке X сводится к градиентному спуску:

$$\mathbf{J}^{(\tau+1)} = \mathbf{J}^{(\tau)} + \eta \left. \frac{\partial L(\mathbf{J}; X)}{\partial \mathbf{J}} \right|_{\mathbf{I}^{(\tau)}}, \qquad \mathbf{X} = \left\{ \mathbf{S}_i \right\}_{i=1}^M, \tag{4}$$

где  $\eta$  — параметр обучения, а функция правдоподобия задана в виде:

$$L(\mathbf{J}, \mathbf{X}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \log P(\mathbf{S}_i, \mathbf{J}).$$
 (5)

Как показывает большой опыт, применение этого подхода дает отличные результаты: нейросеть быстро и качественно обучается [17–20]. Однако такой успех в обучении имеет место, когда элементы матрицы связей знакопеременны с нулевым средним. В этом случае у системы нет фазового перехода и градиентный спуск (4) позволяет найти оптимальные значения матричных элементов.

Отметим, что реализация оптической нейросети со знакопеременными матричными элементами технически весьма сложная задача. Гораздо проще реализовать оптическую нейросеть с положительными матричными элементами. Но в этом случае у спиновой системы может существовать фазовый переход, которого при ML-обучении следует избегать. Действительно, если в системе имеется фазовый переход, то обучение по формулам (4)–(5) может привести систему в окрестность критической точки, в которой имеется сингулярность, и выражение (4) становится неприменимым. Анализу ситуации с фазовым переходом, когда элементы матрицы связи положительны, посвящены следующие разделы.

Таблииа 1

#### Компьютерное моделирование

Методами Монте-Карло (алгоритм Метрополиса и алгоритм Ванга-Ландау) исследовались термодинамические свойства модели Изинга с периодическими граничными условиями и ферромагнитным взаимодействием спинов в узлах кубической решетки  $N=20\times 20\times 20$ . Величина связи с шестью ближайшими соседями принималась за единицу ( $J_1=J_2=J_3=1$ ), а взаимодействие с 12 соседями из следующей координационной варьировалось от  $J_4=0$  до  $J_4=1$ .

Для каждого значения обратной температуры  $\beta \sim 1/kT$  вычислялась внутренняя энергия U, дисперсия энергии  $\sigma^2$  и намагниченность m. Вследствие конечного размера решетки сингулярности функции  $\sigma = \sigma(\beta)$  не наблюдалось. Однако она имеет максимум при  $\beta = \beta_{max}$  и мы принимали, что величиной  $\beta_{max}$  аппроксимируется критическая температура: известно, что при  $N \to \infty$  имеем  $\beta_{max} \to \beta_c$ . При  $N \sim 10^4$  наши оценки показали:

$$\beta_{\text{max}} \approx 1.11 \cdot \beta_c.$$
 (6)

Результаты численного эксперимента сведены в таблице 1, где представлены значения исследуемых параметров в критической точке  $\beta=\beta_{max}$ . На рис. 1 показаны нормированные кривые  $\sigma^2(\beta)/\sigma_0^2$  при разных значениях связи  $J_4$ . Нормировка на  $\sigma_0^2=3(1+2\cdot J_4^2)$  позволила показать все кривые на одном рисунке (пиковые значения кривых  $\sigma_{max}^2$  при различных  $J_4$  отличаются более чем на порядок, см. таблицу 1).

Критические значения  $eta_{
m max}$ ,  $U_{
m max}$  и  $\sigma_{
m max}^2$ 

$J_4$	$\sigma_0^2$	$\beta_{max}$	$U_{max}$	$\sigma_{max}^2$
0.0000	3.000	0.2230	-1.0921	53.35
0.0812	3.040	0.1850	-1.1845	78.15
0.1623	3.158	0.1575	-1.1884	89.68
0.2500	3.375	0.1223	-1.3707	124.17
0.3543	3.753	0.1190	-1.5077	173.01
0.5000	4.500	0.0995	-1.5229	230.23
0.7000	5.940	0.0740	-1.8049	366.10
0.8500	7.335	0.0656	-1.8957	465.91
1.0000	9.000	0.0653	-2.1212	602.85

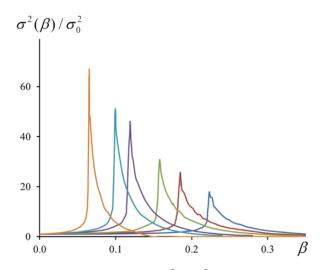
Как и ожидалось, с увеличением  $J_4$  величина  $\beta_{max}$  уменьшается и поведение кривых вблизи критической точки изменяется: с ростом  $J_4$  кривая  $\sigma^2 = \sigma^2$  ( $\beta$ ) сдвигается влево по оси абсцисс, вблизи которой образует своеобразную ступеньку. При достаточно больших значениях связи  $J_4$  поведение  $\sigma^2 = \sigma^2$  ( $\beta$ ) в критической точке больше похоже на скачок, чем на бесконечную сингулярность. Для прояснения этой неопределенности необходимо провести ряд экспериментов со значительно большими размерами решетки.

На рис. 3 и рис. 4 показаны соответственно зависимости спонтанной намагниченности  $m=m\left(\beta\right)$  и внутренней энергии  $U=U\left(\beta\right)$  для различных значений параметра  $J_4$ . Как видим, величина  $U\left(\beta\right)$  монотонно убывает, а в критической точке выпуклость кривой  $U=U\left(\beta\right)$  сменяется вогнутостью. Смена выпуклости соответствует тому, что в критической точке производная  $\partial U/\partial \beta \sim -\sigma^2(\beta)$  имеет бесконечную сингулярность. Отметим, что с ростом  $\beta$  внутренняя энергия асимптотически стремится к энергии основного состояния  $E_0=-3(1+2J_4)$ . Для однообразия на рис. 4 приведена нормированная величина  $U\left(\beta\right)/|E_0|$ , поэтому при больших  $\beta$  все кривые стремятся к -1.

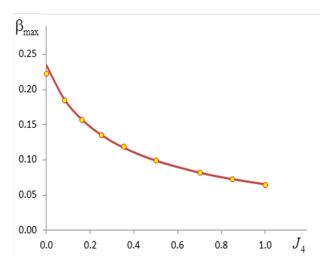
В заключение приведем простые оценочные зависимости для пиковых значений, вытекающие из данных эксперимента:

$$\sigma_{\text{max}}^2 = 370 \cdot (J_4 + 0.25)^2 + 33, \qquad U_{\text{max}} = -1.08 - 1.03J_4,$$
 (7)

достаточно точно описывающие зависимость  $\sigma_{\max}^2 U_{\max}$  от  $J_4$ : относительная ошибка аппроксимации f  $\sigma_{\max}^2$  меньше 3 %, а для  $U_{\max}$  меньше 2 %. Сравнение (7) с результатами эксперимента приведено на рис. 5 и рис. 6.



**Рис. 1.** Зависимость  $\sigma^2 = \sigma^2(\beta)$  при  $J_4 = 0$ , 0.0815, 0.16227, 0.35425, 0.5, 1 (справа налево)



**Рис. 2.** Зависимость  $\beta_{max}$  от  $J_4$ : кружки — результат численного эксперимента; сплошная кривая построена по формулам (6) и (9)

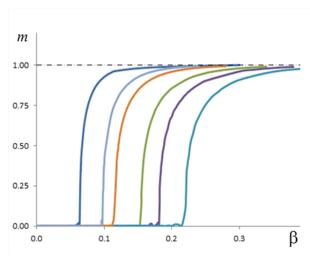


Рис. 3. Зависимость спонтанной намагниченности  $m = m(\beta)$  при  $J_4 = 0$ , 0.0815, 0.16227, 0.35425, 0.5, 1 (справа налево)

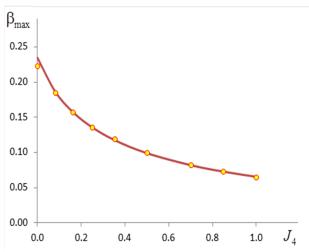
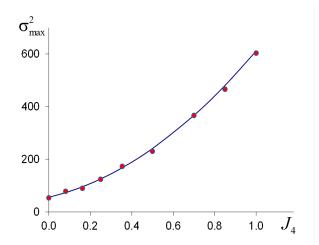
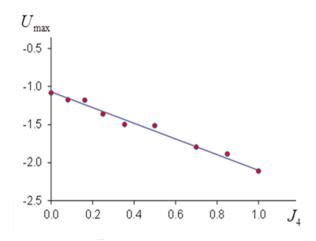


Рис. 4. Зависимость внутренней энергии  $U = U(\beta)$  при  $J_4 = 0$ , 0.0815, 0.16227, 0.35425, 0.5, 1 (справа налево)



**Рис. 5.** Зависимость  $\sigma_{\max}^2$  от величины связи  $J_4$ : кружки — эксперимент, сплошная линия — формула (7)



**Рис. 6.** Зависимость  $U_{\text{max}}$  от величины связи  $J_4$ : кружки — эксперимент, сплошная линия — формула (7)

#### Аналитические выражения для $\beta_{\max}$

В работах [7–9] нами развит метод п-окрестности, позволяющий приближенно вычислять свободную энергию. Метод основан на гауссовом приближении плотности состояний с точно вычисляемыми моментами истинной плотности. Приложение этого метода к рассматриваемой здесь задаче позволяет получить аналитическое выражение для критической температуры  $\beta_c$  (см. [9, 10]). Из результатов [9, 10] следует, что чем больше размерность гиперкуба d, тем лучше согласие между теоретической оценкой  $\beta_c$  и результатами компьютерного моделирования. Например, для кубической решетки (d=3) теория предсказывает величину  $\beta_c$  с относительной ошибкой порядка 2.4 %; при возрастании размерности с d=3 до d=7 ошибка быстро уменьшается до 0.02 %.

При использовании метода n-окрестности для модели Изинга на гиперкубе мы имеем дело с единственным параметром

$$\gamma = \left(\sum J_{ij}\right)^2 / N \sum J_{ij}^2,\tag{8}$$

аккумулирующим всю необходимую информацию о связях в решетке. В частности, в случае модели Изинга на d-мерном гиперкубе при учете только ближайших соседей параметр  $\gamma$  равен в точности числу ближайших соседей:  $\gamma=2d$ . Когда мы учитываем взаимодействие с более дальними соседями, то величина  $\gamma$ перестает быть целочисленной.

Как показано в [9, 10], метод n-окрестности можно применять только при  $\gamma > 16/3$ : в этом случае имеет место фазовый переход второго рода, сопровождающийся конечным скачком теплоемкости. Более того, в этом случае величина  $\beta_c$  определяется как наименьший корень уравнения

$$N = \beta \cdot \sum J_{ij} - \beta^2 \cdot \sum J_{ij}^2. \tag{9}$$

В рассматриваемом здесь случае величина  $\gamma = 6 \cdot (1 + 2J_4)^2/(1 + 2J_4^2)$  удовлетворяет неравенству  $\gamma > 16/3$  и мы можем использовать (9), откуда следует:

$$\beta_c = \frac{1 + 2J_4}{2\left(1 + 2J_4^2\right)} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2J_4^2)}{3(1 + 2J_4)^2}}\right). \tag{10}$$

Выражения (6) и (10) позволяют дать теоретическую оценку зависимости  $\beta_{\max} = \beta_{\max} (J_4)$ . На рис. 2 сплошной линией показана величина  $\beta_{\max} = 1.11 \cdot \beta_c$ , а кружками — данные эксперимента (третья колонка в таблице 1). Как видим, наблюдается хорошее согласие теории с экспериментом.

#### Обсуждение результатов

Мы использовали метод n-окрестности для анализа модели Изинга на гиперкубе для случая  $\gamma > 16/3$ . В области применимости метода наблюдается хорошее согласие предсказаний развитой теории с известными результатами и данными нашего эксперимента. Сказанное верно не только для оценки критической температуры (10). Например, для решеток большой размерности (d = 5, 6 и 7) мы имеем хорошее согласие в предсказании скачка теплоемкости в критической точке. Кроме того, мы провели ряд экспериментов, в которых учитывалось более сильное дальнодействие, т.е. учитывалось взаимодействие с соседями последующих координационных сфер. Показано, что при достаточном увеличении дальнодействия (при увеличении параметра  $\gamma$ ) результаты асимптотически стремятся к пределу теории среднего поля.

Из проведенного анализа следует, что с ростом числа связей (с ростом эффективного числа соседей  $\gamma$ ) критическая величина  $\beta_c$  быстро уменьшается. Действительно, при целочисленных значениях межсвязей ( $J_1=J_2=J_3=J_4=...=1$ ) выражение (10) принимает вид  $\beta_c=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4/\gamma})$ . Но тогда, при большом числе соседей ( $\gamma>>1$ ), критическая температура убывает как  $\beta_c\approx 1/\gamma$ , переходя в предел, описываемый теорией среднего поля. Это означает, что в случае нейронной сети с очень большим числом связей (аналог полного графа, в котором  $\gamma\to N$  и  $\beta_c\to 0$ ) ML-algorithm может применяться на интервале температур  $\beta_c\leq\beta\leq\infty$ , т.е. практически без всяких ограничений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Carreira-Perpiñán M. Á., Hinton G. On Contrastive Divergence Learning. *Proceedings of the Tenth International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics*, PMLR R5:33–40, 2005.

- 2. Hinton G. E. Training Products of Experts by Minimizing Contrastive Divergence. *Neural Computation*. 2002;14(9):1771–1800.
- 3. Доценко В. С. Физика спин-стекольного состояния. УФН. 1993;163:1.
- 4. Patashinskii A. Z., Pokrovskii V. L. *Fluctuation Theory of Phase Transitions*. Oxford: Pergamon Pr.; 1979.
- 5. Butera P., Comi M. Critical Universality and Hyperscaling Revisited for Ising Models of General Spin Using Extended High-Temperature Series. *Phys. Rev. B.* 2002;65:144431.
- 6. Morozov O. G., Sakhabutdinov A. J. Addressed Fiber Bragg Structures in Quasi-Distributed Microwave-Photonic Sensor Systems. *Computer Optics*. 2019;43:535–543.
- 7. Муртазаев А. К., Рамазанов М. К., Касан-Оглы Ф. А., Курбанова Д. Р. Фазовый переход в антиферромагнитной модели Изинга. *ЖЭТФ*. 2015;147:127.
- 8. Häggkvist R. et al. On the Ising Model for the Simple Cubic Lattice. *Advances in Physics*. 2007;56:653–755.
- 9. Крыжановский Б. В., Литинский Л. Б. Обобщенное уравнение Брегга-Вильямса для систем с произвольным дальнодействием. *ДАН*. 2014;459(6):680–684.
- 10. Kryzhanovsky B., Litinskii L. Applicability of n-vicinity Method for Calculation of Free Energy of Ising Model. *Physica A*. 2017;468:493–507.
- 11. Kryzhanovsky B. V., Kryzhanovsky V. M., Mikaelian A. L., Fonarev A. Parametric Dynamic Neural Network Recognition Power. *Optical Memory & Neural Network*. 2001;10(4):211-218.
- 12. Крыжановский Б. В., Микаэлян А. Л. О распознающей способности нейросети на нейронах с параметрическим преобразованием частот. ДАН. 2002;383:318–321.

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-5

# ОБ ОПЫТЕ ПОСТРОЕНИЯ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКИ УСПЕВАЕМОСТИ СТУДЕНТОВ В СИСТЕМЕ МИРЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

А. Г. Леонов $^{1,2,3,4,a}$ , М. А. Матюшин $^{4,\delta}$ , М. С. Дьяченко $^{3,\epsilon}$ 

- <sup>1</sup> Государственный университет управления, г. Москва, Российская Федерация
  <sup>2</sup> Московский педагогический государственный университет, г. Москва, Российская Федерация
  <sup>3</sup> Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр
  Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,
  г. Москва, Российская Федерация
  - <sup>4</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
    - $^a\ ORCID:\ http://orcid.org/0000-0001-9622-1526,\ dr.l@vip.niisi.ru$
    - <sup>6</sup> ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1775-6894, itsaprank@yandex.ru
    - <sup>6</sup> ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5809-4981, mdyachenko@niisi.ru

Аннотация: в статье рассматривается опыт авторов по построению априорной оценки финальных результатов успеваемости студентов в цифровой образовательной платформе Мирера. Оценка строится по результатам промежуточной проверки успеваемости, полученным из промежуточных проверок на семинарах, при выполнении домашних заданий и проверочных работ. При этом учитываются как непосредственные результаты проверок, так и поведение студента при их выполнении. В предлагаемом подходе студенты условно разделены на три категории: отстающие студенты с неудовлетворительным финальным результатом, удовлетворительно успевающие студенты со средним результатом и студенты с высоким результатом. Для каждой категории студентов можно определить характер и целесообразность автоматизации корректирующих действий преподавателя для «подтягивания» отстающих. Оценка строится с использованием искусственных нейронных сетей. Полученная априорная оценка может быть использована для раннего обнаружения студентов, которые могут быть отчислены за неуспеваемость и которым необходима помощь преподавателя, а также для построения адаптивных треков обучения средне и хорошо успевающих студентов. Предлагаемый подход может быть применен только при условии цифровой трансформации учебного процесса.

*Ключевые слова*: Мирера, нейронные сети, цифровая образовательная платформа, автоматическая оценка успеваемости, предсказание отчисления студентов, адаптивное обучение.

Благодарности: исследование было выполнено при поддержке гранта РФФИ 19-29-14057.

Для цитирования: Леонов А. Г., Матюшин М. А., Дьяченко М. С. Об опыте построения априорной оценки успеваемости студентов в системе Мирера с использованием нейронных сетей. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):49–59. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-5.

# A NEURAL NETWORK-BASED APPROACH TO A PRIORI ASSESSMENT OF THE STUDENT ACADEMIC PERFORMANCE IN THE MIRERA DIGITAL LEARNING PLATFORM

A. G. Leonov<sup>1,2,3,4,a</sup>, M. A. Matyushin<sup>4,b</sup>, M. S. Dyachenko<sup>3,c</sup>

- <sup>1</sup> State University of Management, Moscow, Russian Federation
- <sup>2</sup> Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russian Federation
- <sup>3</sup> Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Moscow, Russian Federation
  - <sup>4</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
  - <sup>a</sup> ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9622-1526, dr.l@vip.niisi.ru
  - <sup>b</sup> ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1775-6894, itsaprank@yandex.ru
  - <sup>c</sup> ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5809-4981, mdyachenko@niisi.ru

Abstract: the paper presents our approach to an a priori assessment of the final student performance in the Mirera digital learning platform. The assessment is based on interim tests at seminars, homework evaluations, and individual tests. In this case, both the test results and the student behavior during the

tests are considered. In the proposed approach, students are conditionally divided into three categories: underperforming students with unsatisfactory final results, satisfactory performing students with average results, and high performing students. For each category, the type and feasibility of automating the teacher's corrective actions to improve the student's final scores can be identified. The score is generated using artificial neural networks. The a priori estimate can be used for early detection of underperforming students who need help, as well as for building adaptive learning tracks for average and high performing students. The proposed approach can be applied only to digitally transformed academic process. The authors are implementing adaptive learning technologies in the Mirera digital learning platform.

*Keywords*: Mirera, neural networks, digital learning platform, outcomes estimate, drop-out rate prediction, adaptive learning.

Acknowledgements: the research is supported by the RFBR grant 19-29-14057.

Cite this article: Leonov A. G., Matyushin M. A., Dyachenko M. S. A Neural Network-Based Approach to A Priori Assessment of the Student Academic Performance in the Mirera Digital Learning Platform. Russian Journal of Cybernetics. 2021;2(4):49–59. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-5.

#### Введение

В период пандемии, вызванной COVID-19 в 2020-2021 годах, система образования перешла к обучению преимущественно в дистанционной форме. При этом подходы к преподаванию в аудитории не могут быть без изменений перенесены в режимы видеконференций даже при использовании двусторонней видеосвязи. Находясь в аудитории вместе со слушателями, преподаватель может оценить уровень вовлеченности студентов и проверить, насколько им понятен излагаемый материал. Опытный преподаватель может определить, каким студентам требуется помощь, а какие смогут без дополнительной поддержки, самостоятельно освоить изучаемый предмет. При своевременном обнаружении отстающих студентов у педагога есть возможность «подтянуть» студента к уровню группы, тем самым снизив риск его отчисления из-за неуспеваемости по предмету, которая фиксируется, как правило, на этапе прохождения итогового испытания. В условиях дистанционных и смешанных форм обучения также необходимы методы раннего определения отстающих студентов для предотвращения их отчисления.

Проблема предсказания отчисления студентов известна и исследовалась в рамках массовых открытых онлайн-курсов и учебных платформ [1, 2]. Основными отличиями предложенного исследования от ранее проводимых является прогнозирование ожидаемого результата студента, а не вероятности его отчисления (хотя эти оценки связаны), также авторы строят оценку на основе использования промежуточных результатов проверки знаний, а не только основываясь на индивидуальных особенностях студентов [3].

В рассмотренном подходе информация о результатах промежуточной оценки знаний определялась по данным о выполнении студентами домашних заданий, классных работ и промежуточных проверок, что стало возможным благодаря цифровой трансформации тем курса и переноса заданий на цифровую образовательную платформу с использованием автоматизированной системы верификации результатов.

В статье рассматривается подход к априорной оценке успеваемости студентов с использованием искусственных нейронных сетей.

#### Методология

Главная цель данной работы заключается в исследовании способов предсказания вероятности для студента получить определенную оценку по результатам завершения курса с опорой на информацию о текущем прохождении им курса. Другими словами, стоит задача предсказать вероятность принадлежности студента к одному из следующих трех классов:

- 1) отстающие студенты. Этот класс состоит из студентов, финальный результат которых по окончании курса неудовлетворительный. Для того чтобы успешно продолжать обучение, таким студентам необходима очень серьезная помощь преподавателя;
- 2) удовлетворительно успевающие студенты. Этот класс состоит из студентов, средне проходящих курс со средними результатами. Скорее всего, такие студенты по итогам курса получат оценку выше неудовлетворительно, при умеренной поддержке со стороны преподавателя. Следовательно, данный класс должен находиться в главном фокусе внимания преподавателя;

3) студенты с высокими результатами. Студенты этого класса обычно превосходят остальных в скорости и качестве освоения учебного материала. Скорее всего, по окончании курса они получат наивысший балл даже при отсутствии какой-либо поддержки со стороны педагога.

В ходе работы исследовалась следующая иерархическая структура учебного курса (рис. 1).



Нормировка весов:  $w'1 = (w1/(w1 + w2 + w3)) \times W1/(W1 + W2 + W3)$ 

Рис. 1. Иерархическая структура оценок курса

Курс здесь состоит из множества контестов, каждый из которых, в свою очередь, составлен из одной или нескольких задач. Каждому контесту присвоен некоторый вес W, отражающий вклад контеста в курс. В свою очередь, каждой задаче также присвоен некоторый вес, отражающий вклад задачи в контест. В целях получения общего результата была применена нормировка весов, при этом использовалась запечатленная на рис. 1 формула. Нормированные веса в сумме дают 1 и отражают важность задачи в рамках всего курса.

В процессе обучения студент последовательно совершает попытки сдать задачу в рамках какого-либо контеста. По окончании курса все нормированные веса для всех сданных задач суммируются и предоставляются преподавателю. Педагог выставляет окончательную оценку студенту, опираясь, в основном, на вышеупомянутую сумму весов (финальный балл). Следовательно, для решения задачи классификации студентов фактически необходимо предсказать их финальные баллы на момент окончания курса. Для окончательной классификации студента по финальному баллу предлагается использовать два вручную подобранных порога, разделяющих классы.

В рамках исследования в качестве входных данных использовались данные о попытках сдачи задач. Для каждой попытки сдачи имеется следующая информация:

- 1. Временная отметка попытки сдачи.
- 2. Статус попытки (пройдено, не пройдено, ошибка, плагиат и т. д.).
- 3. Тип задачи (обычная, легкая, сложная и т. д.).

Дополнительно для каждой попытки сдачи в качестве признака используется суммарный балл, набранный на момент попытки. Также можно посчитать и другие показатели статистики, полезные при предсказании финального балла студента.

Вышеизложенное можно изобразить схематически, как представлено на рис. 2.

Как отражено на рисунке выше, для предсказания финального балла студента использовался определенный набор вручную подобранных статистик. После того, как предсказан финальный балл, путем сравнения полученного значения с пороговыми принимается решение о принадлежности студента к одному из трех вышеперечисленных классов. Однако это не единственный путь решения задачи. Что хуже, данный способ не оптимизирует напрямую целевую метрику качества классификации студентов. Для переформулировки задачи можно сначала применить подобранные пороги к историческим данным, что порождает разбиение студентов на три класса. Затем можно построить статистическую модель, способную напрямую предсказывать класс студента, минуя промежуточную процедуру предсказания финального балла. В рамках данной работы были проверены оба вышеописанных подхода, было произведено сравнение их качества на тестовой выборке студентов.

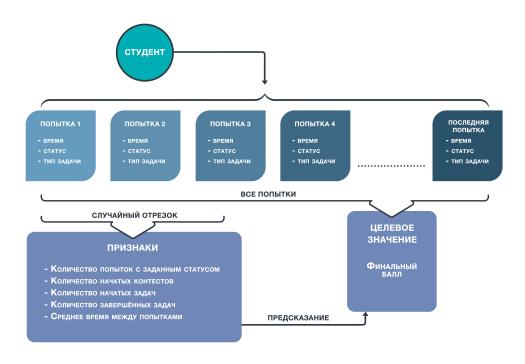


Рис. 2. Структура данных о попытке сдачи

#### Обсуждение

В рамках экспериментов исследовалась схема устройства данных, представленная в предыдущем разделе на рис. 2. Исторические данные состояли из 3206 пар студент-курс. Каждая такая пара была представлена последовательностью попыток сдачи задач данным студентом в рамках данного курса. Гистограмму логарифма длин этих последовательностей см. на рис. 3.

Как можно видеть, по окончании курса большинство студентов предприняло 20–150 попыток сдачи. Значительной доле студентов, 7.8 %, однако, потребовалось от 200 до 2200 попыток. С целью повысить устойчивость решения в рамках исследования использовались только признаки, не зависящие от общего числа попыток, предпринятых студентом.

Следуя алгоритму, описанному в секции методологии, проиллюстрируем распределение финального балла студентов на гистограмме на рис. 4.

Пороговые значения финального балла, показанные на рис. 4, были предоставлены тремя опытными практикующими преподавателями. Пропорции классов студентов в соответствии с данными порогами продемонстрированы на рис. 5.

Каждая попытка сдачи в рамках исследования содержит следующую информацию (признаки):

- 1. Время попытки.
- 2. Статус попытки, один из: пройдено, не пройдено, ошибка.
- 3. Тип задачи, один из: обычный, необязательный, экзамен.
- 4. Нормированный вес задачи.

На основании описанных данных были сгенерированы тренировочные и валидационные выборки. Экземпляр выборки представляется следующим образом. Сначала выбирается случайный начальный отрезок последовательности попыток. Затем осуществляется подсчет следующих статистик:

- 1. Количество попыток с заданным статусом для каждого из типов задач.
- 2. Количество начатых контестов.
- 3. Количество начатых задач (по которым имеется хотя бы одна попытка сдачи).
- 4. Количество сданных задач.
- 5. Среднее время между последовательными попытками в рамках одной и той же задачи для каждого типа задач.
  - 6. Набранный на момент попытки балл.

Статистики вида (1) были впоследствии нормированы на общую длину последовательности

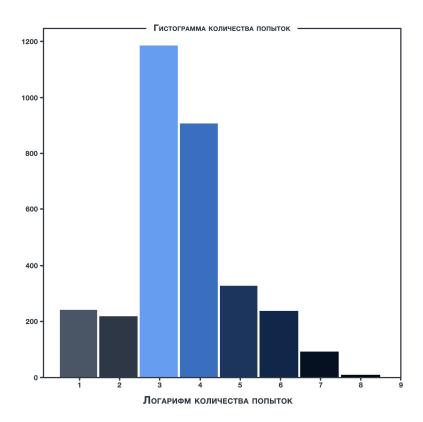


Рис. 3. Гистограмма логарифма длин последовательностей попыток сдач

попыток, статистики вида (2), (3) и (4) также были нормированы соответствующим образом. По статистикам вида (5) были сгенерированы опе-hot признаки по гистограммам с 30 равномерными столбцами от 0 до 150000 секунд. Все полученные статистики затем были сконкатенированы в единый вектор признаков размерности 106.

Для предсказания вероятности выпада студента была использована нейросетевая модель. Основа архитектуры представлена на рис. 6.

Пунктирной рамкой обозначен последовательно повторяющийся блок, количество повторов блока регулирует глубину нейронной сети. В архитектуре используется батч-нормализация [4], а также скип-коннекшн [5] в каждом скрытом слое для облегчения распространения градиентов и повышения скорости тренировки сети.

В рамках работы были исследованы два основных подхода к решению задачи предсказания вероятности попадания студента в одну из категорий и последующего отчисления. В первом подходе, когда предсказывается одно значение финального балла студента, к основе архитектуры нейронной сети был добавлен линейный слой, переводящий вектор скрытых состояний в пространство размерности 1. К результату этого слоя затем применяется функция сигмоида. Для тренировки такой сети использовался стандартный МSE лосс. Для теста окончательной модели были отобраны 30 % случайно выбранных студентов.

Во втором подходе, когда предсказываются 3 вероятности, по 1 для каждого класса студентов, к основе нейронной сети был добавлен линейный слой, переводящий вектор скрытых состояний в вектор размерности 3. Следом за данным слоем был добавлен слой активации Softmax. Для тренировки этой сети использовался логарифмический лосс. Тестовый набор данных совпадал с таковым для первого подхода.

Для каждого из описанных подходов было проведено несколько экспериментов с различными глубинами основы нейросети с целью определить оптимальную сложность модели. Критерий остановки тренировочного процесса представлен плато-детектором, то есть тренировка прекращается, если 5 эпох подряд не показывали прироста результатов на валидационной выборке. Результаты экспериментов приведены в таблице.

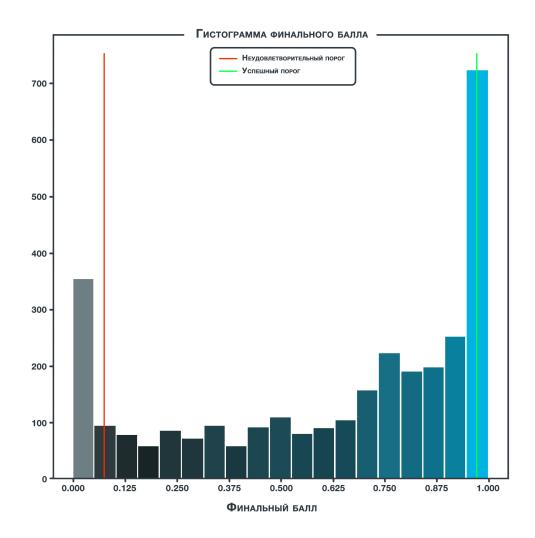


Рис. 4. Распределение финального балла студента

Таблица

Глубина	Остановка после эпохи №	Лосс на валидации	Точность	Полнота	F1 score			
Первый подход, предсказание финального балла								
1	26	0.0462	0.7187	0.7149	0.6636			
2	13	0.0500	0.7141	0.6853	0.6047			
3	20	0.0447	0.7603	0.6589	0.5450			
Второй подход, предсказание класса студента								
1	42	0.5599	0.7617	0.7554	0.7362			
2	36	0.5030	0.7702	0.7674	0.7467			
3	25	0.5495	0.7466	0.7438	0.7436			

Результаты экспериментов для разных подходов и разных глубин

Дополнительно для лучшей модели, а именно для двуслойной модели классификации, были построены по тестовому множеству студентов графики средней ошибки (рис. 7).

Отчетливые линии на рисунке выше отражают «опасные» ошибки. К ним относятся: общая ошибка, ошибка 3–1, ошибка 2–3, ошибка 1–3. Первая цифра в обозначении ошибки отвечает за истинный класс студента, вторая — за предсказанный класс. Для случая ошибок 3–1, однако, не представлено соответствующей кривой ввиду отсутствия прецедентов. Как можно видеть, при прохождении студентом курса на 20 % предложенное решение уже будет иметь среднюю долю ошибок 0.26. Вероятность

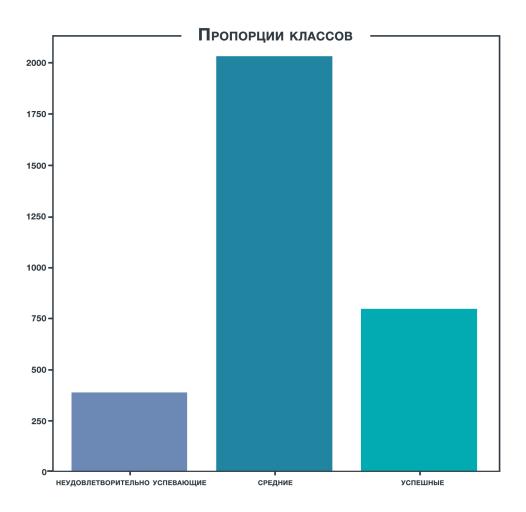


Рис. 5. Пропорции классов студентов

ошибочно предположить, что средний студент является успешным студентом, ни в какой момент прохождения курса не превосходит 0.21. Однако в определенный момент предложенное решение имеет вероятность ошибочно предсказать, что неуспевающий студент является успешным студентом с весьма высокой вероятностью, оцениваемой в 0.37.

Тусклые линии на рисунке выше отражают безопасные ошибки. Можно обратить внимание на быстро убывающую ошибку 2–1. Также можно обратить внимание на медленно убывающую кривую ошибки 3–2, что показывает, что почти половина всех успешных студентов будет ошибочно классифицирована как удовлетворительные. Также можно заметить практически постоянную на протяжении прохождения курса ошибку 1–2, что означает, что в любой момент около 80 % всех неуспевающих студентов будут классифицироваться как средние.

Для улучшения полученных результатов существуют несколько возможных путей. Во-первых, можно использовать временную составляющую описанных данных, утилизируя рекуррентные LSTM-модели, или авторегрессионные модели на основе трансформеров [6], показывающие значительное превосходство над иными методами анализа последовательностей. Во-вторых, в случае наличия дополнительных данных о взаимодействии студента с системой, таких как, например, логи чат-ботов, они также могут быть с успехом использованы для предсказания вероятности выпада студента.

#### Результаты

Результаты экспериментов показывают, что подход может быть использован для оценки будущей успешности студента на основании предварительных результатов прохождения курса. Однако качество предсказания пока находится на среднем уровне.

Проведенные в работе проверки подтверждают гипотезу, что студенты могут быть разделены

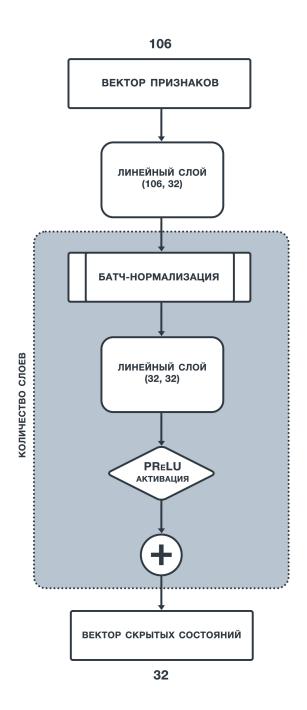


Рис. 6. Основа архитектуры нейронной сети

на три класса в зависимости от успешности прохождения ими курса. При этом способ классификации студентов определяется возможными действиями, которые может предпринять преподаватель, чтобы помочь студенту успешно завершить курс.

Первая категория — категория неуспевающих студентов — требует наибольших усилий преподавателя. Студенты этой категории самостоятельно не в состоянии освоить программу на удовлетворительном уровне. Возможная причина данного явления заключается в том, что эти студенты не обладают навыками самообразования. В этом случае для того, чтобы студент пришел к среднему уровню в процессе освоения курса, недостаточно просто излагать материалы курса. Преподаватель также должен развивать в студенте недостающие навыки самообразования.

Студенты второй категории зачастую достигают удовлетворительных результатов, просто систематически выполняя в срок стандартные задачи курса. Чтобы улучшить результаты студентов данной категории, от преподавателя может потребоваться назначение специальных задач повышенной сложности или назначение повторов уже пройденного материала для его закрепления. Подобный прием помо-

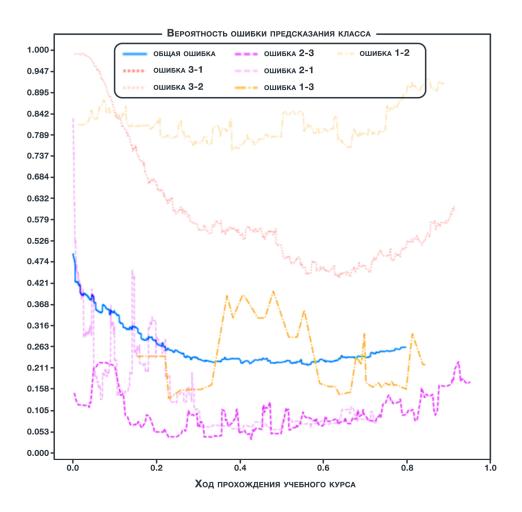


Рис. 7. Вероятности ошибок лучшей модели на тестовой выборке

гает повысить уровень компетенции студента, одновременно закрепляя усвоенные базовые знания.

Третью категорию составляют студенты, достигающие лучших результатов безо всякой помощи извне. Опираясь на проведенное в рамках данной работы исследование, можно констатировать, что студенты этой категории нуждаются в задачах повышенной сложности. Это позволяет развить компетенции студентов до того уровня, на котором они будут в состоянии решать реальные практические задачи. Студенты этой категории, как правило, обладают серьезными способностями в области самообразования.

В качестве платформы для проведения экспериментов была выбрана цифровая образовательная платформа Мирера. Данный выбор продиктован тем, что Мирера поддерживает полностью дистанционный формат обучения, а также предоставляет широкий спектр анонимизированных поведенческих данных. Платформа была специально сконструирована для удобства сбора и дальнейшего анализа данных об образовательном процессе. Ключевой особенностью платформы является простая интеграция методов машинного обучения и нейронных сетей. Благодаря масштабируемой архитектуре Миреры разработанные модели могут быть легко интегрированы для дальнейшего использования преподавателями — основными пользователями платформы.

Основное ограничение описанного подхода заключается в том, что преподавателю необходимо проверить большое количество заданий, выполняемых студентами, включая семинары, домашние задания, проверочные работы. Для того чтобы сократить влияние этого фактора, Мирера предоставляет фреймворк, например, классической автоматической оценки задач по программированию. В дополнение к этому платформа дает инструменты автоматизированной оценки для менее стандартных задач, например, для задач с использованием графики [7].

Иная проблема оценки успешности студента заключается в необходимости проверки решения

на плагиат. Данная сложность возникает в ситуациях, когда несколько студентов решают идентичные или похожие друг на друга задачи. Проблема может быть решена разными методами. Во-первых, для каждого студента может быть сгенерировано индивидуальное задание. Во-вторых, решение студента можно отвергать, если оно не проходит проверку на плагиат. Проблема плагиата также может быть решена встроенными средствами платформы Мирера для широкого спектра задач [7].

В дополнение к вышеперечисленному платформа Мирера располагает еще одним возможным источником полезных для оценки успешности студента данных. Речь идет о встроенном в платформу чат-боте [8], который не только помогает преподавателю поддерживать учебный процесс, но также самостоятельно автоматически отвечает на стандартные вопросы студентов второй категории. Чат-бот сохраняет информацию о запросах студентов, последняя, являясь поведенческой информацией, также может быть использована для улучшения качества оценки успешности студента. Однако в проведенном исследовании этот источник данных не использовался.

Результаты исследований были устно доложены авторами на Международной научнопрактической конференции «Smart Nations: глобальные тенденции цифровой экономики» 2021.

#### Заключение

Возможность определить для каждой рассмотренной выше категории студентов вероятные действия преподавателя, по сути, является первым шагом к автоматизации учебного процесса. Зная категорию студента, можно установить и целесообразность автоматизации действий преподавателя.

Например, автоматизировать действия преподавателя для помощи студентам из первой категории сложно, что, в свою очередь, связано с необходимостью развития таких навыков, как способность к самообучению, и восполнения пробелов в широком спектре областей знаний. Автоматизировать действия преподавателя для помощи студентам третьей категории можно реализацией простой эвристики, предполагающей повышение сложности задания для студентов, которые успешно и быстро справляются с обычными заданиями.

Таким образом, с точки зрения потенциала для автоматизации, вторая категория студентов — студенты, нуждающиеся в помощи преподавателя, — выглядит наиболее многообещающей. Фактически речь идет о применении технологий адаптивного обучения, но не на всем множестве студентов, а только на том их подмножестве (отнесенном ко второй категории), которое будет восприимчиво к применяемым педагогическим приемам. Автоматизация предполагает появление в учебном процессе «виртуального ассистента преподавателя», который может учитывать особенности каждого студента и в зависимости от характера возникающих у него проблем выполнять корректирующие действия, например, предлагать повтор материала, который не был полностью усвоен или требует повторения для закрепления [9, 10].

В заключение заметим, что рассмотренный подход может быть применен в том числе для дополнения учебного процесса в аудитории за счет применения в учебном процессе автоматизированной проверки знаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Borrella I., Caballero-Caballero S., Ponce-Cueto E. Predict and Intervene: Addressing the Dropout Problem in a MOOC-based Program. *Proceedings of the Sixth (2019) ACM Conference on Learning @ Scale (L@S '19)*. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA. 2019. Article 24, 1–9. DOI: https://doi.org/10.1145/3330430.3333634.
- 2. Jing Chen, Jun Feng, Xia Sun, Nannan Wu, Zhengzheng Yang, Sushing Chen. MOOC Dropout Prediction Using a Hybrid Algorithm Based on Decision Tree and Extreme Learning Machine. *Mathematical Problems in Engineering*. Vol. 2019, Article ID 8404653, 11 pages, 2019. DOI: https://doi.org/10.1155/2019/8404653.
- 3. Oancea B., Dragoescu R., Ciucu S. Predicting Students' Results in Higher Education Using Neural Networks. *International Conference on Applied Information and Communication Technologies* (AICT2013), 25.–26. April, 2013, Jelgava, Latvia.
- 4. Ioffe S., Szegedy C. Batch Normalization: Accelerating Deep Network Training By Reducing Internal Covariate Shift. 2015. ArXiv abs/1502.03167.

- 5. Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun. Deep Residual Learning for Image Recognition. 2015. ArXiv abs/1512.03385.
- 6. Ashish Vaswani, Noam Shazeer, Niki Parmar, Jakob Uszkoreit, Llion Jones, Aidan N. Gomez, Lukasz Kaiser, Illia Polosukhin. Attention Is All You Need. 2017. ArXiv abs/1706.03762.
- 7. Леонов А. Г., Дьяченко М. С., Бесшапошников Н. О., Орловский А. Э., Матюшин М. А. Использование элементов искусственного интеллекта в современных цифровых образовательных платформах. *Информатизация образования и методика электронного образования:* материалы IV Международной научной конференции. В 2 ч. Ч. 2. 2020:36–41. ISBN 978-5-7638-4399-6.
- 8. Леонов А. Г., Дьяченко М. С., Мащенко К. А., Бесшапошников Н. О. Проблемы применения чатботов в естественно-научных курсах. Информатизация образования и методика электронного образования: материалы IV Международной научной конференции. В 2 ч. Ч. 1. 2020:393–396. ISBN 978-5-7638-4398-9.
- 9. Brusilovsky P., Peylo C. Adaptive and Intelligent Web-Based Educational Systems. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*. 2003;13:159–172.
- 10. Alkhatlan A., Kalita J. Intelligent Tutoring Systems: A Comprehensive Historical Survey with Recent Developments. *International Journal of Computer Applications*. 2019;181(43). DOI: 10.5120/ijca2019918451/

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-6

## О НЕОБХОДИМОСТИ СОЗДАНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СРЕДСТВ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С КРИТИЧЕСКОЙ МИССИЕЙ

## В. Б. Бетелин $^1$ , Д. А. Моргун $^2$

Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,
 г. Москва, Российская Федерация, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6646-2660, betelin@inbox.ru
 <sup>2</sup> Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,
 г. Сургут, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0692-1583,
 morgun da@office.niisi.tech

Аннотация: происходящие в мире события свидетельствуют о возрастании угрозы перехвата управления системами с критической миссией (СКМ). Приводятся конкретные примеры инцидентов, один из них — массовые отключения электроэнергии в Венесуэле. Обосновывается необходимость разработки технологии создания цифровых систем управления, обеспечивающей парирование угрозы перехвата управления и нештатного функционирования систем с критической миссией. В основе этой технологии — концепция цифровых двойников объектов управления цифровых систем управления этими объектами, включая все аппаратные и программные компоненты, а также интеллектуальные средства самоконтроля и самокоррекции функционирования элементной базы, вычислительной и коммуникационной техники, базового и прикладного программного обеспечения.

*Ключевые слова*: системы с критической миссией, цифровые двойники, интеллектуальные средства управления.

Для цитирования: Бетелин В. Б., Моргун Д. А. О необходимости создания интеллектуальных средств управления системами с критической миссией. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):60–66. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-6.

# ON THE NEED TO CREATE INTELLIGENT CONTROL SYSTEMS FOR SYSTEMS WITH A CRITICAL MISSION

#### V. B. Betelin<sup>1</sup>, D. A. Morgun<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Moscow, Russian Federation, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6646-2660, betelin@inbox.ru
<sup>2</sup> Surgut Branch of Federal State Institute "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Surgut, Russian Federation, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0692-1583, morgun\_da@office.niisi.tech

Abstract: there is an ongoing threat of control interception in mission-critical systems (MCS). Specific examples of such incidents are presented, one of them is the massive power outages in Venezuela. We specify the reasons for creating an approach to developing digital control systems for MCS resistant to control interception and abnormal functioning. This technology is based on the digital twin concept. A twin represents all the hardware and software components, as includes smart tools for the hardware, core and application software self-monitoring and self-correction.

Keywords: mission-critical systems, trusted systems.

Cite this article: Betelin V. B., Morgun D. A. On the Need to Create Intelligent Control Systems for Systems with a Critical Mission. *Russian Journal of Cybernetics*. 2021;2(4):60–66. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-6.

#### WannaCry — шифровальщик-вымогатель

12 мая 2017 года начал свое молниеносное распространение по миру сетевой червь WannaCry. На 13 мая было инфицировано 131 233 компьютера [1], на 27 мая - 424 289 компьютеров [2]... На 25 мая 2017 года общий ущерб от WannaCry оценивался в 1 млрд долларов США [3].

**Сетевой червь WannaCry можно условно охарактеризовать как «бытовой»**. Он способен нанести вред любому уязвимому компьютеру и не нацелен на какой-то конкретный экземпляр.

Для заражения компьютеров WannaCry использует уязвимость операционных систем Windows. Хакерской группировкой Equation Group, связанной с AHБ, были созданы эксплойт EternalBlue и бэкдор DoublePulsar, позволяющие использовать данную уязвимость для заражения компьютера и получения доступа к нему.

Вредоносная программа сканирует диапазон IP-адресов локальной сети и случайно выбранные IP-адреса сети Интернет в поисках компьютеров с открытым TCP-портом 445, который отвечает за обслуживание протокола SMBv1. Обнаружив такой компьютер, программа предпринимает несколько попыток проэксплуатировать на нем уязвимость EternalBlue и в случае успеха устанавливает бэкдор DoublePulsar, через который загружается и запускается исполняемый код программы WannaCry.

При каждой попытке эксплуатации вредоносная программа проверяет наличие на целевом компьютере DoublePulsar и в случае обнаружения загружается непосредственно через этот бэкдор.

Высокая скорость распространения WannaCry, уникальная для программы-вымогателя, обеспечивается использованием опубликованной в феврале 2017 года уязвимости сетевого протокола SMB операционной системы Microsoft Windows, описанной в бюллетене MS17-010. Компанией-разработчиком подтверждено наличие уязвимости абсолютно во всех пользовательских и серверных продуктах, имеющих реализацию протокола SMBv1 — начиная с Windows XP/Windows Server 2003 и заканчивая Windows 10/Windows Server 2016.

В коде ранних версий программы был предусмотрен механизм самоуничтожения, так называемый Kill Switch: программа проверяла доступность двух определенных Интернет-доменов и в случае их наличия полностью удалялась из компьютера. Такой механизм, однако, не спасает от поражения компьютеры, доступ в Интернет которых подвергается жесткой фильтрации (как, например, в некоторых корпоративных сетях). WannaCry в таком случае не находит Kill Switch, заблокированный политикой Интернет-доступа, и продолжает свое вредоносное действие.

#### Stuxnet — перехват управления АСУ ТП

Stuxnet- это компьютерный червь, перехватывающий и модифицирующий информационный поток между программируемыми логическими контроллерами марки Simatic S7 и рабочими станциями SCADA системы Simatic WinCC фирмы Siemens. Уникальность программы заключалась в том, что впервые в истории кибератак вирус физически разрушал инфраструктуру.

Данный вирус использует четыре уязвимости системы Microsoft Windows (уязвимость «нулевого дня» (zero-day³) и три ранее известные уязвимости), позволяющие ему распространяться при помощи USB-flash-накопителей. Оставаться не замеченным антивирусными программами ему помогало наличие настоящих цифровых подписей (два действительных сертификата, выпущенных компаниями Realtek и JMicron).

Бывший аналитик ЦРУ Мэтью Барроуз в книге «Будущее: рассекречено. Каким будет мир в 2030 году» пишет, что червь Stuxnet «смог, пусть и на короткое время, приостановить иранскую ядерную программу. Он нарушил работу почти 1000 центрифуг для обогащения уранового топлива. По мнению экспертов, иранцы, обнаружив вирус и избавившись от 1000 зараженных устройств, смогли предотвратить больший ущерб» [5].

Приведем здесь также слова Роула Шоуэнберга, ведущего антивирусного эксперта североамериканского подразделения «Лаборатории Касперского»: «Но в целом интеллектуальный труд, продуктом которого стал Stuxnet, не менее удивителен и примечателен. Четыре 0-day уязвимости, два краденых цифровых сертификата, прекрасное знание систем SCADA — все было тщательно спланировано и приведено в исполнение» [6].

Stuxnet предполагалось внедрить на компьютеры иранских заводов по обогащению урана. Код программы помогал нарушить штатный режим работы центрифуг Siemens P-1, так что со временем

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> «Эксплойт» — программа или код, фрагмент кода программы, который использует недостатки в системе безопасности конкретного приложения для заражения устройства [4].

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Вредоносная программа для получения доступа к рабочей станции, серверу, устройству или сети путем обхода аутентификации, а также других стандартных методов и технологий безопасности [4].

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Уязвимость, о которой еще не знает разработчик (и, соответственно, не существует патчей, ее устраняющих).

центрифуги выходили из строя по «непонятным» причинам. Программа успешно выполнила поставленную задачу. Но проблема в том, что на определенном этапе Stuxnet вышел из под контроля и начал распространяться в Интернете, угрожая другим целям, кроме иранских. Пулитцеровский лауреат Дэвид Сангер в своей книге "Confront and Conceal" говорит, что ошибка была во второй версии программы, которую независимо от американцев написали израильские коллеги.

Новые подробности о последствиях операции «Олимпийские игры» сообщил российский эксперт Евгений Касперский. Во время пресс-конференции в Австралии он сказал, что его друг, который работает на одной из АЭС, обнаружил вирус Stuxnet в локальной сети предприятия, не подключенной к Интернету.

Рассматривая историю создания Stuxnet и последствия его применения, мы видим уже не просто вредоносную программу, а точно нацеленное «кибероружие» для перехвата управления определенным объектом.

Бизнес, 15 окт, 19:23 О 444 153 Поделиться 🖈

# «Газпрому» принудительно отключили импортную технику через спутник

В «Газпроме» заявили, что австрийские компрессоры отключили дистанционно и они до сих пор не работают. Компания планирует закупить компрессоры российского производства на замену зарубежным



Рото: Виталий Тимкив / ТАСС

**Рис. 1.** 15 октября 2019 года. «Газпрому» принудительно отключили импортную технику через спутник [7]

#### «Дистанционное отключение» продолжается

Вредоносные программы WannaCry и Stuxnet к настоящему времени достаточно хорошо изучены специалистами и освещены в печати. Здесь они приведены в качестве примеров эксплуатации злоумышленниками уязвимостей, имеющихся в компьютерных системах и реализации угроз различного характера. Как показывают оба приведенных примера, вредоносные программы могут наносить ущерб, ощутимый в масштабах государства или даже в мировом масштабе, а в качестве злоумышленников могут выступать, в том числе, спецслужбы государств.

Более свежий пример — Венесуэла: вечером 7 марта 2019 года Каракас и большинство штатов Венесуэлы остались без света. Президент страны Николас Мадуро назвал блэкаут «Электрической войной» со стороны Вашингтона. Отключение произошло в результате хакерской атаки на автоматическую систему управления гидроэлектростанции Гури. Как отметила официальный представитель МИД России Мария Захарова, «Организаторы этой атаки были хорошо знакомы с устройством оборудования. Речь идет о комплексном воздействии на систему управления и контроля основных электрораспределительных станций» [8].

Отметим, что в качестве уязвимости промышленного оборудования, несущей в себе угрозу остановки технологического или производственного процесса, можно рассматривать сам факт наличия возможности у зарубежного производителя дистанционного управления оборудованием клиента.

При том, что дистанционное отключение оборудования клиентов несет репутационные риски для производителей оборудования, оно вполне применяется в рамках санкционной политики (рис. 1).

#### Недокументированные возможности как уязвимости

В настоящее время каждый процессор компании Intel снабжен штатно неотключаемой аппаратно-программной компонентой Intel Management Engine (МЕ). Данная компонента может располагаться в отдельной СБИС, внутри контроллера Ethernet, внутри системного контроллера (northbridge) или внутри СнК, на котором процессорные ядра и системный контроллер интегрированы в одну СБИС. Данная компонента имеет наивысшие привилегии, допускающие неограниченный доступ компоненты ко всем аппаратным ресурсам.

Одновременно, сама компонента оказывается аппаратно защищена от любого доступа со стороны ядра операционной системы или даже гипервизора.

У компании AMD, начиная с 2013 года, также есть подобная компонента, называемая Platform Security Processor.

Современные CнK<sup>4</sup> архитектуры ARM имеют в своем составе основной набор ядер, функционирующий под управлением операционной системы (Android или iOS), и вспомогательные ядра, на которых реализуются функции радиомодема для доступа к мобильным (сотовым) сетям и функции обеспечения безопасности: проверка цифровых подписей загрузчика, ядра ОС, хранение ключей шифрования и пр.

Как свидетельствуют результаты современных исследований, производители оборудования, системного и прикладного программного обеспечения ведут активный сбор сведений [9]:

- практически в каждом современном программном или аппаратном продукте имеется функция слежения и отправки статистики, как правило, включенная по умолчанию. Например, компонента драйвера NVIDIA NVIDIA Telemetry Container, драйверы Intel и др.;
- информация о корпоративных сетях наших учреждений, предприятий и организаций и персональная информация о наших сотрудниках в реальном времени, на законном основании или скрытно собирается и обрабатывается в основном за пределами РФ в компаниях, находящихся в большинстве своем под юрисдикцией одной страны США;
- по данным компании POSITIVE TECHNOLOGIES (второй квартал 2020 года), над массовыми атаками преобладают целенаправленные атаки (63 %). Наибольший интерес представляют государственные учреждения, промышленные компании, финансовый сектор и сфера науки и образования [10].

#### Мы не всегда можем определить, чем занимается наш компьютер

Приведем некоторые результаты эксперимента по косвенному мониторингу несанкционированной активности в вычислительных системах [11].

В настоящий момент авторами [11] ведется обработка статистических данных, полученных при эксплуатации более 100 однородных компьютеров с фиксацией более 100 различных параметром работы компьютеров. Компьютеры эксплуатируются в высшем учебном заведении и задействованы в учебном процессе. Основное время мониторинга — с 22:00 до 7:00 утра следующего дня. Выбрано время мониторинга, когда активных действий пользователи не осуществляют. При этом выполняется проверка показателей потребления электроэнергии и нагрузки на ЦП.

Выявлены некоторые аномалии поведения компьютеров. Например, ниже представлен один из встречающихся вариантов поведения. Аномалия поведения заключается в следующем.

Температурная нагрузка на ядра процессора в норме сохранятся примерно до часа ночи (в других подобных случаях  $\pm 2$  часа).

После часа ночи наблюдаются множественные температурные всплески от  $32^{\circ}$  C до  $48^{\circ}$  C (система охлаждения работает нормально), рост энергопотребления центральным процессором и отдельными ядрами.

В дневное время, когда на компьютерах работают студенты, всё функционирует в штатном режиме. Дополнительно проверялись планировщики задач, работа антивирусов, сетевой карты, и существенных признаков их активности не наблюдалось. При этом роста энергопотребления оперативной

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Системы на кристалле.

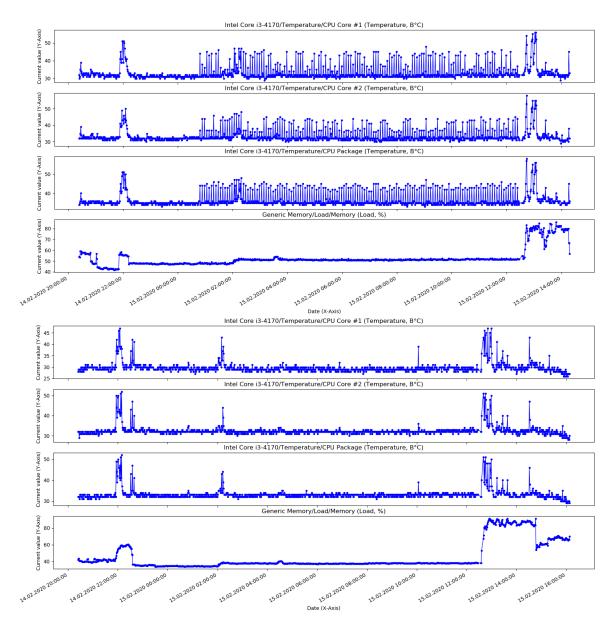


Рис. 2. Косвенный мониторинг несанкционированной активности двух компьютеров из ста [11]

памяти не наблюдается. В отдельные временные интервалы процессор занимается чем-то, что мы не можем определить.

В России требования обеспечения безопасности, в том числе и информационной, для систем с критической миссией регламентируются рядом федеральных законов, таких как «О безопасности объектов топливно-энергетического комплекса» (от 21.07.2011 № 256-ФЗ) и «О безопасности критической информационной инфраструктуры Российской Федерации» (от 26.07.2017 № 187-ФЗ). Однако 187-ФЗ допускает возможность инцидентов в значимых объектах критической информационной инфраструктуры. Для парирования возникающих при этом угроз необходимо создание технологий, обеспечивающих штатное функционирование цифровых систем управления в условиях деструктивных внешних и внутренних воздействий.

#### Проект комплексной научно-технической программы «ФЛАГМАН»

ГК «РОСТЕХ», совместно с ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН и ведущими институтами РАН и вузов страны, сформирован проект программы «ФЛАГМАН», который нацелен на решение этой, стратегически важной для обеспечения безопасности страны, проблемы.

Основная цель программы — парирование угрозы перехвата управления и нештатного функционирования систем с критической миссией (СКМ):

• промышленного оборудования:

- добычи, транспортировки и переработки нефти и газа;
- атомных энергетических установок;
- тепловых, газовых и гидравлических турбин;
- электрогенераторов и электроподстанций;
- авиационного и ж/д транспорта;
- сложных технических объектов:
- предприятий нефте- и газодобычи, транспортировки и переработки;
- тепловых, атомных и гидроэлектростанций;
- энергосистем;
- аэропортов и ж/д узлов;
- банков.

Для достижения этой цели необходимо разработать технологии создания:

- цифровых двойников объектов управления (промышленное оборудование, сложные технические объекты); цифровых двойников цифровых систем управления этими объектами, всех их аппаратных и программных компонент и на этой основе профилей и угроз их штатному функционированию; цифровых двойников возможных киберпротивников на основе, как имеющихся фактических данных об атаках на конкретные объекты, так и данных о возможных прогнозируемых угрозах атак на эти объекты, а также моделей парирования этих угроз;
- интеллектуальных элементной компонентной базы (ЭКБ), средств вычислительной и коммуникационной техники с развитыми средствами самоконтроля и самокоррекции, устойчивых к внешним и внутренним деструктивным воздействиям;
- интеллектуального базового и прикладного программного обеспечения с развитыми средствами самоконтроля и самокоррекции, устойчивых к внешним и внутренним деструктивным воздействиям.

Важнейшим начальным этапом программы является проведение научных исследований с целью создания цифровых двойников: объектов управления, цифровых систем управления этими объектами, включая все основные компоненты (ЭКБ, СВТ, ПО) возможных киберпротивников и на этой основе моделей угроз и их парирования, профилей штатного функционирования.

Синергетический эффект достижения основной цели — крупносерийное производство в России элементной базы и вычислительной техники на ее основе, то есть возрождение радиоэлектронной отрасли России.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. *MalwareTech Botnet Tracker: WCRYPT.* Архивная копия от 13 мая 2017 года. Режим доступа: http://web.archive.org/web/20170513071100/https://intel.malwaretech.com/botnet/wcrypt.
- 2. *MalwareTech Botnet Tracker: WCRYPT.* Архивная копия от 27 мая 2017 года. Режим доступа: http://web.archive.org/web/20170527061313/https://intel.malwaretech.com/botnet/wcrypt.
- 3. Эксперты оценили ущерб от вируса WannaCry в \$1 млрд. *RuNews24*. Режим доступа: https://runews24.ru/internet/25/05/2017/3deb290a821bd12cc946653ea418e439.
- 4. Энциклопедия Интернет-угроз. Режим доступа: https://www.eset.com/ua-ru/support/information/entsiklopediya-ugroz/.
- 5. Барроуз М. *Будущее: рассекречено. Каким будет мир в 2030 году.* М.: Манн, Иванов и Фербер; 2015. 352 с.
- 6. Червь Stuxnet эксплуатирует четыре 0-day уязвимости. *Anti-Malware*. Режим доступа: https://www.anti-malware.ru/news/2015-12-21/2973.
- 7. «Газпрому» принудительно отключили импортную технику через спутник. PEK. Режим доступа: https://www.rbc.ru/business/15/10/2019/5da5f1e19a7947cfb127bdfd.
- 8. Атака энергоснабжения на систему Венесуэлы велась двух городов США. Российская газета. 16.03.2019. Режим доступа: https://rg.ru/2019/03/16/ ataka-na-sistemu-energosnabzheniia-venesuely-velas-iz-dvuh-gorodov-ssha.html.
- 9. Петросюк Г. Г., Калачев И. С. О киберразведке и кибербезопасности КВО. *Кибербезопасность АСУ ТП критически важных объектов*: Онлайн-конференция. Режим доступа: http://www.itsec.ru/adapt/conference17.09.

- 10. Актуальные киберугрозы: II квартал 2020 года. *POSITIVE TECHNOLOGIES*. Режим доступа: https://www.ptsecurity.com/ru-ru/research/analytics/cybersecurity-threatscape-2020-q2/.
- 11. Гавриленко Т. В., Никифоров А. В. Методы косвенного мониторинга несанкционированной активности в вычислительных системах. *Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований*. 2020;3–4(20):38–45.
- 12. The Intel 64 and IA-32 Architectures Software Developer's Manual. Vol. 2: Instruction Set Reference, A-Z, Order Number 325383, 2016. 2198 р. Режим доступа: https://www.intel.com/content/dam/www/public/us/en/documents/manuals/64-ia-32-architectures-software-developer-instruction-set-reference-manual-325383.pdf.

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-7

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ТРАФИКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ РОБОТИЗИРОВАННЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

## В. А. Галкин

Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», Сургутский государственный университет,

Тюменский индустриальный университет, филиал ТИУ в г. Сургуте,

г. Сургут, Российская Федерация

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

Аннотация: предложен подход для моделирования динамики транспортных потоков для взаимодействующих аппаратов на основе теории самосогласованного поля, основанного на уравнениях А.А. Власова. Сформулированы проблемы применимости таких моделей для описания коллективных явлений трафика в связи с задачами поведения «стаи» роботизированных однородных взаимодействующих аппаратов в фазовом пространстве на основе кинетического подхода.

Ключевые слова: уравнения Власова, движение, интеллектуальная транспортная система.

Благодарности: работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-07-00236.

Для цитирования: Галкин В. А. Математические задачи, связанные с трафиком взаимодействующих роботизированных транспортных средств. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):67–74. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-7.

#### MATHEMATICAL PROBLEMS OF COLLABORATING ROBOTIC VEHICLE TRAFFIC

#### V. A. Galkin

Surgut Branch of Federal State Institute
"Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences",
Surgut State University,
Industrial University of Tyumen, Surgut Branch,
Surgut, Russian Federation
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

Abstract: an approach to the simulation of time-dependent collaborating vehicle traffic flows based on the self-consistent field theory and A. Vlasov equations are proposed. The problems of the simulation model applicability to collaborative traffic processes such as the behavior of a swarm of identical collaborating vehicles in phase space using the kinetic approach are stated.

Keywords: Vlasov equations, traffic, intelligent transportation system.

Acknowledgements: this work is supported by RFBR, grant No. 20-07-00236.

Cite this article: Galkin V. A. Mathematical Problems of Collaborating Robotic Vehicle Traffic. Russian Journal of Cybernetics. 2021;2(4):67–74. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-7.

При описании поведенческих явлений на основе методов гидродинамики (модели сплошной среды) и в рамках кинетической теории (основанной на исследовании функции распределения частиц) возникают принципиально новые явления, выходящие за рамки «физики мертвой натуры», поскольку силы взаимодействия «частиц» в социальных системах не могут быть выведены из базовых физических законов (принципов) и физические силы заменяются эмпирическими социальными силами. Эта ситуация типична в моделях борьбы за власть [1], в поведенческих моделях «стаи» (см. гл. 4 «Динамика распределения власти в иерархии» в [1]). Важным фактором, фиксирующимся в ряде экспериментальных и теоретических работ по динамике «живых систем», является явление их статистической неустойчивости [2].

Несомненно, что с аналогичными явлениями придется столкнуться при реализации общественных мегапроектов, носящих общее название «искусственный интеллект». В частности, эта проблема с

особой остротой возникнет при планирующемся достаточно быстром внедрении беспилотных роботизированных комплексов грузоперевозок на междугородних трассах с большой загрузкой.

Отмечается, что «основой для развития мультимодального транспорта должны стать интеллектуальные транспортные системы (ИТС), которые обеспечат взаимодействие дорожного полотна, объектов инфраструктуры (светофоров, видеокамер, систем освещения и др.), транспортных средств, приложений для оперативного управления дорожным движением и т.п. Ключевой тренд — создание беспилотного транспорта на базе технологий искусственного интеллекта, появление умных дорог (smart road), развитие технологий коммуникации машин между собой (Vehicle-to-Vehicle) и с дорожной инфраструктурой (Vehicle-to-Infrastructure)» [3].

В 2024 году на трассе М-11 между Москвой и Петербургом могут начать курсировать беспилотные роботизированные транспортные аппараты [4].

О старте пилотного проекта объявил на Петербургском международном экономическом форуме заместитель министра транспорта Кирилл Богданов. Отмечается, что «к 2024 году транспортный коридор между Москвой и Санкт-Петербургом будет подготовлен к движению беспилотных грузовиков. < ... > Участники проекта ожидают, что это увеличит скорость перевозки грузов и позволит снизить ее стоимость. В числе участников проекта Минтранс называет ассоциацию «Цифровой транспорт и логистика» (ЦТЛ), предприятия КамАЗ, «Национальные телематические системы» (НТС), «СберАвтоТех», «Деловые линии», Globaltruck и «Первую экспедиционную компанию» (ПЭК), а также ретейлера X5 Group» [4].

Подобно классической динамике разреженного газа, кинетическое моделирование транспортного потока должно определять локальную и глобальную динамику на объектах, вовлеченных в поток, с учетом реальной геометрии участников движения, препятствий, знаков, правил дорожного движения и т.п. Здесь важно подчеркнуть, что законы реального дорожного движения основаны на интеллекте Человека, его опыте, ответственности, гуманности, которые включают интеллектуальные тонкости социального взаимодействия, зачастую не формализуемые на языке компьютер-компьютерного взаимодействия. (Примеры: внезапно возникший ребенок на дороге, жертвенность участников движения по отношению к терпящим бедствие, интуитивное предсказание складывающейся катастрофической ситуации на дороге без ее явного наступления и т.д.) Все это относится к «живой динамике», математическая природа которой не формализована (конечно, имеются в виду не грубые механистические модели, положенные в основу обучения формальных искусственных нейронных сетей — ИНС, реализующих аппроксимацию неких дорожных ситуаций на основе заданного обучающего набора примеров).

В частности, «частицами» трафика являются транспортные средства, изменяющие свою скорость в соответствии с некоторыми законами коллективного взаимодействия социума дорожного потока, определение которых может повлиять на совокупное описание и на предельные гидродинамические характеристики (макроскопический уровень описания). Очевидно, что такие предельные задачи должны улавливать переход от модели сжимаемого газа, для которой характерны явления типа ударной волны, до модели несжимаемой жидкости, типичной для динамики транспорта в пробках.

Эти новые взаимодействия обычно выводятся эвристически с целью воспроизведения качественного поведения системы и в лучшем случае получаются с помощью статистических методов. Традиционные микроскопические модели движения основаны на предположении, что транспортный поток состоит из однородных транспортных средств, реакция которых на изменение скорости связана с типом транспортного средства. Однако в реальных транспортных потоках часто наблюдаются структурные различия между транспортными средствами с точки зрения, например, веса транспортного средства, эффективности двигателя и более или менее агрессивного поведения водителя. Неоднородность трафика влияет на процесс замедления/ускорения водителей в условиях смешанного движения.

Чтобы понять, с какими явлениями придется столкнуться проектировщикам алгоритмов для ИНС роботизированного трафика, естественно, имеет смысл рассмотреть близкие по математической природе динамики взаимодействующих частиц в физической кинетике и гидродинамике.

В связи с вышеуказанным полезно рассмотреть простейшую модель одномерного бесстолкновительного движения по параллельным каналам (одномерным полосам) и сопоставить результаты с решениями уравнений газовой динамики (сжимаемый газ). Предположим, что частицы типа i движутся вдоль одномерного многообразия без каких-либо взаимодействий, параметризованного точками числовой прямой  $Ox = \mathbb{R}$ , и имеют значения скорости  $v_i(x,t)$ ,  $1 \le i \le N$ , где t — время. Тогда в слу-

чае такой системы кинетическое уравнение для плотности функции распределения участников потока  $p_i(x,t)$  представляет собой систему не связанных между собой уравнений Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p_i + \frac{\partial}{\partial x} (p_i \mathbf{v}_i) = 0, \\ 1 \le i \le N, \end{cases} x, t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, в случае  $v_i = v_i(t)$  точное решение этих уравнений имеет следующий вид:

$$p_i(x,t) = p_i \left( x - \int_0^t v_i(\tau) d\tau, 0 \right).$$

Примем следующие обозначения:

$$\rho(x,t) = \sum_{i} p_{i}(x,t),$$

$$\rho(x,t)\overline{v}(x,t) = \sum_{i} v_{i}p_{i}(x,t),$$

$$\rho(x,t)e(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{i} [v_{i} - \overline{v}(x,t)]^{2}p_{i}(x,t),$$

$$e(x,t) = \frac{1}{2}RT(x,t),$$

$$P(x,t) = \sum_{i} [v_{i} - \overline{v}(x,t)]^{2}p_{i}(x,t),$$

$$q(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{i} [v_{i} - \overline{v}(x,t)]^{3}p_{i}(x,t).$$

Т. к. в силу этих соотношений на решении системы справедливо тождество  $P=2\rho e$ , то для рассматриваемой модели получаем стандартное уравнение состояния идеального газа  $P=R\rho T$  — уравнение Клапейрона—Менделеева.

В соответствии с этой моделью рассмотрим задачу о «сталкивающихся» встречных потоках. (Поскольку участники движения не взаимодействуют между собой, то это означает, что движение осуществляется по параллельным каналам без пересечений.) Предположим, что в начальный момент времени t=0 выполняются соотношения:

$$f_1(x,0) = \rho_0(1-\theta(x)),$$
  $f_2(x,0) = \rho_0\theta(x),$   $v_1 = v_0,$   $v_2 = -v_0,$ 

где  $v_0$ = const > 0,  $\rho_0$  = const > 0 — начальная макроскопическая плотность участников движения; функция Хевисайда определяется соотношением:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

В этом случае имеем:

$$f_1(x,t) = \rho_0(1 - \theta(x - v_1 t)), \qquad f_2(x,0) = \rho_0 \theta(x - v_2 t).$$

С учетом предположений о значениях скоростей  $v_1 = v_0 \ge 0$  и  $v_2 = -v_0 \le 0$  для макроскопических параметров рассматриваемого сжимаемого газа получаем:

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 2\rho_0, & |x| \le v_0 t, \\ \rho_0, & |x| > v_0 t, \end{cases}$$

$$\overline{v}(x,t) = \begin{cases} 0, & |x| \le v_0 t, \\ -v_0, & x > v_0 t, \\ v_0, & x < -v_0 t, \end{cases}$$

$$T(x,t) = \begin{cases} \frac{v_0^2}{R}, & |x| \le v_0 t, \\ 0, & |x| > v_0 t, \end{cases}$$
$$q(x,t) = 0.$$

Эти функции удовлетворяют модели Эйлера идеального газа [5], когда коэффициенты вязкости и теплопроводности равны нулю. Отметим, что для трафика в тоннелях важна макроскопическая характеристика  $\rho(x,t)$ , в частности, определяющая локальный по пространственным координатам выброс  $CO_2$  в окружающую среду — загазованность тоннеля. В общем случае величина газодинамической «температуры» транспортного потока T(x,t) характеризует среднее хаотическое поведение участников движения, которое, в частности, связано с отклонениями индивидуальных скоростей от средней величины  $\overline{\mathbf{v}}(x,t)$  — гидродинамической скорости транспортного потока.

К рассмотренному выше примеру примыкают модели с нелокальными взаимодействиями, к которым, прежде всего, относятся уравнения теории плазмы (А.А. Власова). В резком отличии свойств плазмы от свойств нейтральных газов, к которым относится модель больцмановского газа, определяющую роль играет взаимодействие частиц плазмы между собой через кулоновские силы притяжения и отталкивания, убывающие с расстоянием гораздо медленнее (т.е. значительно более дальнодействующие), чем силы взаимодействия нейтральных частиц. С этой точки зрения динамика системы беспилотных роботизированных аппаратов (БРА) подобна в грубом приближении динамике плазмы гравитирующих масс. Конечно, тут следует подчеркнуть, что коллективные взаимодействия в системе БРА, скорее всего, не описываются потенциалом парного взаимодействия частиц. Но эта модель может рассматриваться как базовое приближение, в рамках которого можно усмотреть основные проблемы для более сложной ситуации. Конечно, центральным моментом здесь является получение экспериментальных характеристик поведения системы, основанных на алгоритмах взаимодействия в системе БРА.

Кинетические уравнения для плазмы существенно упрощаются в случае, когда длина свободного пробега и время свободного пробега велики по сравнению с характерными соответствующими параметрами задачи. Тогда столкновениями частиц можно пренебречь, учитывая только коллективное взаимодействие частиц через самосогласованные поля. Это бесстолкновительное приближение приводит к уравнению Власова — уравнению, в котором операторы столкновения равны нулю. Следует подчеркнуть, что случай уравнений Власова для системы частиц, взаимодействующих посредством гладкого двучастичного потенциала, подробно исследован Р.Л. Добрушиным [6]. Им установлена важная связь бесстолкновительных уравнений Власова с уравнением Лиувилля для упомянутых конечномерных гамильтоновых систем и доказано, что статистическое решение для гамильтоновой системы является единственным решением уравнений Власова. Теорема единственности установлена на основе применения метрики Канторовича—Рубинштейна в пространстве мер, а также обоснован предельный переход, когда число частиц стремится к бесконечности. Отметим, что в работах [7, 8] построены решения уравнения А.А Власова для классических механических частиц, взаимодействующих посредством дифференцируемого потенциала парного взаимодействия частиц.

Близкий класс задач, связанный с движением заряженных частиц в кристаллической решетке, связан с так называемым эффектом каналирования, подробно описанным в монографии [9]. В частности, здесь методами вычислительного эксперимента было показано появление неустойчивости потока частиц при движении на многообразиях отрицательной кривизны.

Кинетическое описание эффекта каналирования быстрых заряженных частиц в кристаллах было впервые предложено в работе [10] с помощью уравнения движения диффузионного типа (в частности, на основе кинетического уравнения Фоккера–Планка).

Уравнение Лиувилля, т.е. уравнение неразрывности, является основополагающим законом сохранения, который определяет статистические решения динамических систем, моделирующих взаимодействие частиц плазмы, гидродинамические течения, положение фронта фазового перехода при выращивании кристаллов из расплава и т.д. Важно подчеркнуть, что уравнения Власова, описывающие динамику плазмы в приближении самосогласованного поля, представляют собой не что иное, как разновидность уравнения Лиувилля. Весьма интересные явления для решений уравнения Лиувилля имеют место при наличии скачков поля скоростей течения. В газовой динамике это приводит к ударным волнам, но возможны также решения типа «черной дыры», когда частицы среды аккумулируются в одной точке. В этом случае уравнение Лиувилля—Власова описывает статистическое решение

системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в этом случае реализуется «скользящий режим» в теории А.Ф. Филиппова [11], а соответствующих классических и обобщенных решений не существует. Аналогичная проблема связана с общим классом задач для уравнения Власова теории плазмы, в котором имеется разрывный потенциал кулоновского типа. Исследования кинетики плазмы, состоящей из многих заряженных частиц, привели к выводу кинетического уравнения плазмы, которое было получено в 1936–1938 гг. советскими учеными А.А. Власовым и Л.Д. Ландау. Это уравнение обычно называют по имени Власова. Таким образом, актуальной является проблема численного моделирования для уравнения типа Лиувилля при наличии разрывных коэффициентов, так как разностные схемы в этом случае, вообще говоря, не являются аппроксимирующими.

Рассмотрим динамическую систему на числовой прямой:

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

где f(x) — поле скоростей частиц. Уравнение Лиувилля — это одно из основных уравнений статистической физики для плотности функции распределения частиц  $p_t$  в фазовом объеме. В пространстве имеет вид:

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} + \operatorname{div}_x(p_t f) = 0.$$

Статистическое решение  $p_t(x)$  (плотность вероятности распределения частиц в фазовом пространстве  $\mathbb R$  в момент времени t) для этой динамической системы определяется задачей Коши для уравнения Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_t(x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p_t(x)f(x)) = 0, \\ p_t(x)|_{t=0} = p^{(0)}(x). \end{cases}$$
 (1)

где  $p^{(0)}$  — начальная плотность вероятности распределения частиц в фазовом пространстве  $\mathbb{R}$ . Систематическое исследование гиперболических систем уравнений с разрывными коэффициентами начато в работах И.М. Гельфанда [12].

Рассмотрим простейший случай разрывного поля скоростей:

$$f(x) = -\operatorname{sgn}(x). \tag{2}$$

Вид функции f(x) в (2) соответствует ситуации, когда частицы со скоростями, равными по абсолютной величине единице, движутся навстречу друг другу.

Для построения приближенного метода решения задачи (1), (2) воспользуемся регуляризацией, основанной на сглаживании разрывной функции поля скоростей f(x) на интервале  $[-\Delta; \Delta]$  методом В.А. Стеклова:

$$\bar{f}_{\Delta}(x) = \frac{1}{2\Delta} \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\Delta} \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} (-\operatorname{sgn}(\xi)) d\xi = -\frac{x}{\Delta}, \qquad x \in [-\Delta; \Delta].$$

Таким образом, сглаженная задача принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{\Delta}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial p_{\Delta}(x,t)f_{\Delta}(x)}{\partial x} = 0\\ p_{\Delta}(x,t)|_{t=0} = p^{(0)}(x), \end{cases}$$
(3)

где

$$f_{\Delta}(x) = \begin{cases} f(x), |x| > \Delta, \\ \bar{f}_{\Delta}(x), |x| \le \Delta, \end{cases} = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(x), & |x| > \Delta, \\ -\frac{x}{\Delta}, & |x| \le \Delta, \end{cases}$$

Построим решение задачи (3) методом характеристик, описываемых динамической системой:

$$\frac{dx}{dt} = f_{\Delta}(x).$$

Исследуем предельное поведение решения при  $\Delta \to 0$ . Для этого умножим  $p_{\Delta}(x,t)$  на финитную функцию  $\varphi(x,t)$  и проинтегрируем по x от  $-\infty$  до  $\infty$  и по t от 0 до  $+\infty$ .

Переходя к пределу  $\Delta \to 0$  в полученном таким образом интегральном выражении, устанавливаем, что обобщенным решением (в интегральной форме С.Л. Соболева) задачи Коши (1), (2) является обобщенная функция:

$$p_t(x) = p^{(0)}(x + t \operatorname{sgn}(x)) + \delta_0(x) \int_0^t \left( p^{(0)}(t - z) + p^{(0)}(z - t) \right) dz,$$

где  $\delta_0$  — мера Дирака, сосредоточенная в точке x=0. Главной причиной возникновения функционального решения в рассмотренном примере служит наличие разрыва поля скоростей.

Для транспортных потоков образование в решении меры Дирака означает формирование «пробки».

Уравнения Власова представляют собой, по существу, некоторую модификацию уравнения Лиувилля, порожденного дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \qquad t \in \Delta$$
 (4)

где функция f принадлежит совокупности функций  $\tilde{G}$  при аргументах  $t \in \Delta$ ,  $x \in \mathbb{R}_n$   $(n = 1, 2, \ldots)$  со значениями в  $\mathbb{R}_n$  таких, что существуют непрерывные градиенты  $D_x f(t,x)$  по x, ограниченные равномерно по  $x \in \mathbb{R}_n$  и  $t \in \Delta'$ , где  $\Delta' \subseteq \Delta$  — любой конечный интервал, и что функции f(t,x) и  $D_x f(t,x)$  непрерывны по  $t \in \Delta$  при любом  $x \in \mathbb{R}_n$ . В рассматриваемом случае к уравнению (4) применимы обычные теоремы о существовании и единственности на всем интервале  $\Delta$ . Зафиксировав  $t^{(0)} \in \Delta$ , обозначим через  $x(t,u), t \in \Delta, u \in \mathbb{R}_n$  решение уравнения (1) с начальным условием:

$$x(t^{(0)}, u) = u. (5)$$

Ниже следуем обозначениям, принятым в [6].

В работах [6–8] исследована и обоснована асимптотика при  $N \to \infty$  решения системы N дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = A(x_i(t)) + N^{-1} \sum_{j=1}^{N} B(x_i(t) - x_j(t)), \quad i = 1, \dots, N, \quad t \in \mathbb{R}_1,$$

где  $x_1, \ldots, x_N$  и  $A \in L^1(\mathbb{R}_n)$ ,  $B \in C_b^1(\mathbb{R}_n)$  — гладкие, ограниченные вместе со своими производными функции со значениями в  $\mathbb{R}_n$ . Ситуации, рассматриваемой в механике, соответствует случай, когда n=6, точки  $x \in \mathbb{R}_6$  записываются в виде x=(q,p), где  $q \in \mathbb{R}_3$  интерпретируются как положения, а  $p \in \mathbb{R}_3$  — как импульсы частиц,

$$A(x) = (p,Q(q)),$$

где  $Q \in L^1(\mathbb{R}_3)$  — внешняя сила, действующая на систему,

$$B(x) = (0, F(q)),$$

где

$$F(q) = -D\hat{O}(q),$$

и  $\hat{O} \in C^2_h(\mathbb{R}_3)$  — потенциал парного взаимодействия частиц.

Решение  $(x_1(t),...,(x_N(t)))$  рассматриваемой гамильтоновой системы удобно описывать при помощи дискретных вероятностных мер:

$$\mu_t^N(B) = \frac{1}{N} \sum_i 1, \qquad i: x_i(t) \in B, \qquad B \in B_n, \qquad t \in \mathbb{R}_1,$$

задающих распределение частиц в фазовом пространстве в момент времени t на борелевских множествах B из  $\mathbb{R}_n$ .

Для любого заряда  $\mu \in M_n$  положим:

$$B_{\mu}(x) = \mu(B(x-\cdot)) = \int_{R_n} B(x-\hat{x})\mu(d\hat{x}), \qquad x \in \mathbb{R}_n.$$

Семейство зарядов  $M = \{\mu_t, t \in M_n\}$ , для которого выполнено условие равномерной ограниченности норм зарядов  $M = \{\mu_t, t \in \Delta\}$ , является слабым решением уравнения Власова–Лиувилля для динамики (3) с начальным условием  $\mu^{(0)} = \mu_{t^{(0)}}$  из множества неотрицательных зарядов  $M_n^+$ , если для любой финитной (пробной) функции  $h \in D(\mathbb{R}_n)$  семейство зарядов  $\mu_t(h)$  дифференцируемо по  $t \in \Delta$  и выполнено следующее соотношение (слабое уравнение Власова–Лиувилля):

$$\frac{d\mu_t(h)}{dt} = \mu_t(f(t, Dh), \qquad t \in \Delta.$$
 (6)

Если заряды  $\mu_t$  заданы непрерывно дифференцируемыми плотностями по мере Лебега  $p_t(x)$ ,  $t \in \Delta$ ,  $x \in \mathbb{R}_n$ , то семейство M образует слабое решение уравнения Власова–Лиувилля в том и только в том случае, когда  $p_t(x)$  является сильным решением уравнения Власова–Лиувилля, т.е.

$$\frac{\partial p_t(x)}{\partial t} + \operatorname{div}_x(p_t(x)f(t,x)) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}_n, \qquad t \in \Delta.$$
 (7)

Справедливы следующие утверждения [6]:

• для любых  $t^{(0)} \in \Delta$ ,  $\mu^{(0)} \in M_n^+$  и интервала  $\Delta \subseteq \mathbb{R}_1$  слабое решение  $M = \{\mu_t, t \in \Delta\}$  уравнения Власова–Лиувилля для динамики (4) с начальным условием  $\mu^{(0)}$  в точке  $t^{(0)}$  существует и единственно. Это решение задано соотношением

$$\mu_t(B) = \mu^{(0)}(u \in \mathbb{R}_n : x(t,u) \in B), \qquad B \in B_n, \qquad t \in \Delta,$$
(8)

и однопараметрическое семейство зарядов  $\mu_t \in M_n^+$  при всех  $t \in \Delta$ , где  $B \in B_n$  — борелевские множества в  $\mathbb{R}_n$ ;

• если мера  $\mu^{(0)}$  задана непрерывно дифференцируемой плотностью  $p^{(0)}(u)$  на множестве  $u \in \mathbb{R}_n$ , и функция  $f \in \tilde{G}$  имеет непрерывные вторые частные производные по x, ограниченные равномерно по  $x \in \mathbb{R}_n$ ,  $t \in \Delta'$ , где  $\Delta' \subseteq \Delta$  — любой конечный интервал, то функция

$$p_t(u) = p^{(0)}(x^{-1}(t,u))S_t(u), (9)$$

где  $x^{-1}(t,\cdot)$  — функция, обратная к x(t,u), и  $S_t(u)$  — якобиан преобразования  $u \to x^{-1}(t,u)$ , удовлетворяет сильному уравнению Власова–Лиувилля (7).

Важнейшим для практического исследования и применения такого класса моделей для изучения устойчивого и управляемого поведения автоматизированных аппаратов при их взаимодействии [13] в трафике является экспериментальная оценка приближения потенциала  $\hat{O}$  сил, определяющих взаимодействие БРА на основе заложенных в них алгоритмов поведения в зависимости от их расположения в фазовом пространстве. По сути, это определяет ситуационную оценку и прогноз динамики коллектива («стаи») программно-однородных одинаковых по своим техническим характеристикам БРА. Естественно, что это лишь грубое приближение реальности. Но при математическом исследовании таких простейших задач выявляются основные черты возникающих проблем для разработки стандартов управления такими большими системами и требования к их безопасному применению, т.е. границы применимости. Очевидно, что коллективные явления, возникающие при моделировании плазмы, найдут свое место в моделях автоматизированного (роботизированного) трафика.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1. Самарский А. А., Михайлов А. П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.* 2-е изд., испр. М.: Физматлит; 2001. 320 с.
- 2. Бетелин В. Б., Еськов В. М., Галкин В. А., Гавриленко Т. В. Стохастическая неустойчивость в динамике поведения сложных гомеостатических систем. Доклады Академии наук. 2017;472(6):642–644.

- 3. Рудычева Н. *Рынок цифровизации транспорта и логистики к 2030 г. вырастет в 7 раз.* Режим доступа: https://www.cnews.ru/reviews/it\_v\_transportnoj\_otrasli\_2021/articles/rynok\_tsifrovizatsii transporta i.
- 4. Левинская А., Тадтаев Г. *Власти назвали срок пуска беспилотников по трассе от Москвы до Петербурга*. Режим доступа: https://rbcru.turbopages.org/rbc.ru/s/business/03/06/2021/60b878a09a7947f108341ffb.
- 5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука; 1978.
- 6. Добрушин Р. Л. Уравнения Власова. Функциональный анализ и его приложения. 1979;13(2):48-58.
- 7. Braun W., Hepp K. The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the 1/N Limit of Interacting Classical Particles. *Commun. Math. Phys.* 1977;36:101–113.
- 8. Маслов В. П. Уравнения самосогласованного поля. *Современные проблемы математики*. 1978;11:153–234.
- 9. Кощеев В. П., Моргун Д. А., Панина Т. А., Штанов Ю. Н. *Компьютерное моделирование стохастической динамики эффекта каналирования*. Сургут: Печатный мир; 2017. 169 с.
- 10. Линдхард Й. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц. *Усп.* физ. наук. 1969;99(10):249–296.
- 11. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. *Мат. сб.* 1960;51(1):101–128.
- 12. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи математических наук. 1959;14(2):87–158.
- 13. Бетелин В. Б., Галкин В. А., Гавриленко Т. В., Дибижев А. К., Коваленко О. В., Никитин Н. Ф., Соловьев В. П. Проблемные вопросы реализации технологий искусственного интеллекта в высокотехнологичных отраслях отечественной промышленности (жизненно стратегически важных сегментах российского общества). Успехи кибернетики. 2021;2(3):8–18. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-3-2.

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-8

## О ПРОБЛЕМЕ СНИЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ СЕТОЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

## В. Б. Бетелин $^1$ , В. А. Галкин $^2$

Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,
 Москва, Российская Федерация, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6646-2660, betelin@inbox.ru
 Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,
 Сургут, Российская Федерация, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

Аннотация: предложен общий подход к развитию методов математического моделирования сложных систем. Центральной проблемой, связанной с использованием вычислительной техники, являются сеточные аппроксимации большой размерности и суперЭВМ высокой производительности с большим числом параллельно работающих микропроцессоров. В качестве возможных альтернатив сеточным аппроксимациям большой размерности разрабатываются кинетические методы решения дифференциальных уравнений и методы «склейки» точных решений на грубых сетках.

*Ключевые слова*: кинетические методы, сеточные аппроксимации, понижение размерности аппроксимаций.

Для цитирования: Бетелин В. Б., Галкин В. А. О проблеме снижения размерности сеточных аппроксимаций. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):75–77. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-8.

#### REDUCING THE DIMENSIONALITY OF GRID APPROXIMATIONS

## V. B. Betelin<sup>1</sup>, V. A. Galkin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Moscow, Russian Federation, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6646-2660, betelin@inbox.ru
<sup>2</sup> Surgut Branch of Federal State Institute "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Surgut, Russian Federation, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

Abstract: a general approach to the development of complex systems simulation is proposed. The key computer applications problem is the high-dimensional grid approximations and high-performance supercomputers with a large number of parallel CPUs. Kinetic methods for solving differential equations and methods for "gluing" exact solutions produced with coarse meshes are developed as possible alternatives to high-dimensional grid approximations.

Keywords: kinetic methods, grid approximations, approximation dimensionality reduction.

Cite this article: Betelin V. B., Galkin V. A. Reducing the Dimensionality of Grid Approximations. Russian Journal of Cybernetics. 2021;2(4):75–77. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-8.

Последние двадцать пять лет по показателю производительность/стоимость лидировали и лидируют в настоящее время суперЭВМ на основе коммуникационной сети параллельно работающих массовых коммерческих микропроцессоров таких зарубежных компаний, как Intel, AMD и др. [1]. Все эти годы в экономических условиях России именно это обстоятельство являлось и является решающим при выборе и приобретении суперкомпьютера для использования и в науке, и в образовании, и в промышленности, и в бизнесе. Поскольку российской альтернативы массовым коммерческим продуктам Intel и AMD не было и нет, то практически все отечественные суперЭВМ создавались и создаются на основе этих зарубежных продуктов. Основная проблема, которую решали все эти годы и решают в настоящее время российские пользователи этих суперЭВМ — разработка, по сути дела, импортозависимых суперкомпьютерных технологий, включающих методы, алгоритмы и программы, обеспечивающих максимальную загрузку при параллельной работе все возрастающего числа массовых коммерческих микропроцессоров Intel, AMD, а последние годы и NVIDIA, при решении практических задач.

Это одна из основных причин того, что разрабатываемые в нашей стране и за рубежом технологии моделирования сложных физических процессов существенно основываются на использовании сеточных аппроксимаций большой размерности (с числом узлов до  $10^{10}$  [2]) и суперЭВМ высокой производительности с большим числом параллельно работающих микропроцессоров (экстрамассивный параллелизм [2]).

Прогресс в этих технологиях в настоящее время связывается только с увеличением размерности сеточных аппроксимаций и, как следствие, ростом требований к производительности/стоимости суперЭВМ. То есть, в конечном счете, к увеличению числа параллельно работающих микропроцессоров и их производительности. Поскольку производительность микропроцессора, в основном, определяется технологическим уровнем его производства, то, по сути дела, в настоящее время прогресс в вычислительных технологиях на основе сеточных аппроксимаций большой размерности определяется прогрессом в области микроэлектронных технологий. То есть отставание в микроэлектронных технологиях влечет за собой отставание в технологиях моделирования на основе сеточных аппроксимаций большой размерности.

Из вышеизложенного следует, что снижение размерности сеточных аппроксимаций обеспечит снижение требований к числу и производительности микропроцессоров суперЭВМ и, следовательно, снижение требований к технологическому уровню их производства. Тем самым будут созданы предпосылки для обеспечения импортонезависимости страны в области суперкомпьютерных технологий.

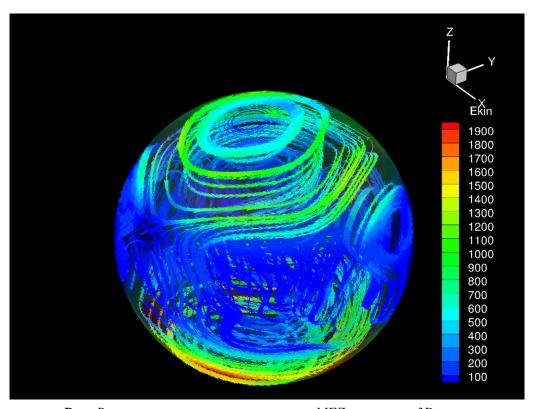


Рис. Визуализация расчета структуры МГД-течения в 3D шаре

Решением этой проблемы занимается коллектив Сургутского филиала ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, возглавляемый профессором, доктором физико-математических наук В.А. Галкиным. В качестве возможных альтернатив сеточным аппроксимациям большой размерности разрабатываются кинетические методы решения дифференциальных уравнений и методы «склейки» точных решений на грубых сетках, которые были реализованы при расчетах термоядерного оружия в 50-х годах прошлого века [3, 4].

Показано, что на данном классе задач применение этих методов позволяет на 1–2 порядка сократить размерность расчетной сетки и требования к производительности суперЭВМ при сохранении точности вычислений.

В вычислительных экспериментах установлено, что при условии одинаковой точности для задачи приближенного расчета МГД-течений в инвариантном 3D шаре на рабочей станции с производительностью 7,45 ТФЛОПС на расчетной сетке N=84000 узлов время расчета равно приблизительно

2 неделям, а сочетание точных решений и грубой сетки из  $0.1 \times N$  узлов позволяет снизить время расчета до 1 часа.

В частности, реализация упомянутых подходов, основанных на сочетании точных решений задач гидродинамики, магнитной гидродинамики и физической кинетики на сложных многообразиях, позволяет выявить тонкую структуру трехмерных течений, интерпретация которой стандартными средствами компьютерной визуализации представляется весьма затруднительной из-за крайней сложности их структуры (см. рис.) [3]. При этом сравнительный анализ эффективности вычислительных систем позволяет сделать вывод о необходимости развития организации вычислений, основанных на целочисленной арифметике в сочетании с универсальными приближенными методами [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Велихов Е. П., Бетелин В. Б., Кушниренко А. Г. *Промышленность*, инновации, образование и наука в России. М.: Наука; 2010. 139 с.
- 2. Осипов В. П., Четверушкин Б. Н. Вычислительные алгоритмы для систем с экстрамассивным параллелизмом. Ж. вычислительной математики и математической физики. 2020;60(5):802–814.
- 3. Бетелин В. Б., Галкин В. А. Универсальные вычислительные алгоритмы и их обоснование для приближенного решения дифференциальных уравнений. *Доклады Академии наук*. 2019;488(4):351—357.
- 4. Бетелин В. Б., Галкин В. А., Дубовик А. О. Точные решения системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в случае задач, связанных с нефтегазовой отраслью. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020;495(1):13–16.

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-9

# ОБОСНОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛАСТА-КОЛЛЕКТОРА БАЖЕНОВСКОЙ СВИТЫ

## С. Г. Вольпин, О. В. Ломакина, И. В. Афанаскин, В. А. Юдин

Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация sergvolpin@gmail.com, ovllom@mail.ru, ivan@afanaskin.ru, yudinval@yandex.ru

Анномация: опыт изучения нефтяных месторождений, приуроченных к отложениям баженовской свиты, показывает, что продуктивность нефтенасыщенных пластов является существенно неоднородной как по площади, так и по разрезу месторождения. Выявление зон повышенной продуктивности в отложениях баженовской свиты является одной из первоочередных задач по вовлечению в разработку значительных, но трудноизвлекаемых запасов, приуроченных к отложениям баженовской свиты. С целью выявления зон повышенной продуктивности необходимо определять типы пласта-коллектора, выявлять особенности энергетического состояния залежи нефти, строить гидродинамическую модель залежи нефти в баженовской свите.

Ключевые слова: Баженовская свита, гидродинамическая модель.

*Благодарности*: публикация выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИ-СИ РАН «Проведение фундаментальных научных исследований (47 ГП)» по теме № FNEF-2021-0019 «Создание методики выявления невыработанных зон на нефтяных месторождениях и подсчета остаточных запасов нефти на основе комплексирования математического моделирования, анализа разработки с исследованиями скважин и пластов. 0580-2021-0019» (рег. № 121031300099-5).

*Для цитирования*: Вольпин С. Г., Ломакина О. В., Афанаскин И. В., Юдин В. А. Обоснование гидродинамической модели пласта-коллектора баженовской свиты. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):78-86. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-9.

#### FEASIBILITY OF THE BAZHENOV FORMATION RESERVOIR HYDRODYNAMIC MODEL

## S. G. Volpin, O. V. Lomakina, I. V. Afanaskin, V. A. Yudin

Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Moscow, Russian Federation

sergvolpin@gmail.com, ovllom@mail.ru, ivan@afanaskin.ru, yudinval@yandex.ru

Abstract: the studies of the oil fields confined to the sediments of the Bazhenov formation shows that the productivity of oil-saturated formations is significantly heterogeneous both in terms of the area and thickness of the productive formations. Identification of higher productivity zones in the Bazhenov formation sediments is one of the primary problems enabling to development of the large, but hard-to-recover reserves confined to the sediments of the Bazhenov formation. To identify such zones, it is necessary to determine the type of the reservoir, identify the features of its energy state, and build a hydrodynamic model of the oil reservoir in the Bazhenov formation.

Keywords: Bazhenov formation, hydrodynamic model.

Acknowledgements: this study is a part of the SRISA Basic Research (47 GP) government contract, project No. FNEF-2021-0019 Identification of Remaining Oil Field Zones and Remaining Recoverable Reserves Estimation with Comprehensive Simulation, Oil Field Analysis, and Well/Formation Surveys (ref. No. 121031300099-5).

*Cite this article*: Volpin S. G., Lomakina O. V., Afanaskin I. V., Yudin V. A. Feasibility of the Bazhenov Formation Reservoir Hydrodynamic Model. *Russian Journal of Cybernetics*. 2021;2(4):78–86. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-9.

#### Введение

По оценкам Минприроды России, рентабельных запасов нефти в России хватит на 20 лет [1]. Ситуация с запасами нефти в России требует принятия срочных мер для повышения нефтеотдачи пластов. Основным резервом поддержания нефтедобычи в стране является ввод в разработку

трудноизвлекаемых запасов, приуроченных к баженовским, доманиковым, хадумским и аналогичным нетрадиционным коллекторам – керогеносодержащим отложениям.

В настоящее время нефтяными компаниями применяются не методы увеличения нефтеотдачи, требующие больших капиталовложений, а методы интенсификации добычи нефти, в первую очередь, гидроразрыв пласта, который из отложений баженовской свиты позволяет добывать лишь 3–5 % геологических запасов нефти. Необходима разработка специальных методов, позволяющих повысить нефтеотдачу баженовских отложений.

Следует отметить, что за 50 лет, прошедших с начала первых крупных дебитов скважин из пластов баженовской свиты, не выявлены какие-либо особенности строения месторождений, которые позволили бы создавать гидродинамические модели месторождений. Разработка баженовской свиты на 55 месторождениях ведется до сих пор фактически вслепую.

### Основные геолого-фильтрационные характеристики баженовской свиты

Баженовские отложения на территории Западной Сибири вскрыты сотнями поисковых, разведочных и эксплуатационных скважин. Собран и проанализирован большой массив сейсмических данных, материалов геолого-промысловых, геофизических и лабораторных исследований керна и нефтей. Тем не менее многие вопросы до сих пор остаются дискуссионными.

В истории изучения строения баженовской свиты рассматривались разные версии образования и строения нефтяных залежей. Ряд исследователей высказывали мнение о том, что источником возникновения коллекторов явились трещины, которые образовались при преобразовании керогена в жидкое состояние — в нефть. [2]. Существование на достаточно близких расстояниях друг от друга высоко и низкопродуктивных скважин вызывало появление версий о том, что высокопродуктивные скважины вскрывают отдельные высокопродуктивные линзы [3]. Существует мнение, что формирование залежи нефти в баженовской свите обусловлено проявлением тектонической активности, приведшей к образованию сети глубинных разломов, к которым приурочены наиболее продуктивные скважины Салымского месторождения [4].

Многолетний опыт разработки нефтяных залежей, приуроченных к баженовской свите на разных месторождениях, показывает, что продуктивность коллекторов является существенно различной в пределах одного месторождения. Залежь баженовской свиты является замкнутой. Эксплуатация залежи на начальном этапе разработки ведется на естественном упругом режиме, который затем при снижении пластового давления ниже давления насыщения, переходит в режим растворенного газа.

С целью повышения эффективности поисковых работ и разработки выявленных месторождений необходимо определить причины неоднородности продуктивных пластов. Следует изучить типы пласта-коллектора и выявить особенности энергетического состояния залежи, возникающие в процессе разработки, в итоге обосновать геологическую и гидродинамическую модель пласта-коллектора, приуроченного к баженовской свите.

При построении гидродинамической модели пласта решаются две задачи подземной гидродинамики:

- 1. Прямая задача заключается в расчете поля давлений в пласте с известной геометрией и с известными фильтрационными характеристиками при известных дебитах скважин.
- 2. Обратная задача заключается в определении фильтрационных и геометрических характеристик пласта по замеренным кривым изменения дебита и давления.

При решении обратных задач в процессе анализа замеряемой информации можно выбрать адекватную модель, оценить ее характеристики и начальные и граничные условия. Получаемые решения обратных задач позволяют оценить обоснованность рассматриваемых моделей и определять их неизвестные характеристики. При решении обратной задачи следует использовать комплексирование информации, получаемой по данным геолого-промысловых, геофизических, геохимических и гидродинамических исследований пластов и скважин.

Решение обратных задач позволяет получить большую информацию о строении продуктивного пласта и нефтяной залежи:

- 1. Определение фильтрационно-емкостных свойств пласта в околоскважинном и межскважинном пространстве.
  - 2. Определение модели пласта.
  - 3. Восстановление истории пластового давления.

- 4. Восстановление истории изменения коэффициентов продуктивности скважин.
- 5. Прогноз работы скважин по давлению или по жидкости.
- 6. Оптимизация работы скважин. Подбор наиболее эффективного режима работы.
- 7. Анализ взаимовлияния скважин (изучение интерференции).
- 8. Оптимизация системы поддержания пластового давления.
- 9. Поиск скважин-кандидатов для проведения геолого-технологических мероприятий.
- 10. Оценка параметров трещин гидроразрыва пласта.
- 11. Поиск трещин автогидроразрыва пласта.
- 12. Оценка длины и проводимости разломов.
- 13. Поиск непроницаемых границ (зон замещения или выклинивания) и зон неоднородности в пласте.

### Определение модели пласта по результатам решения обратной задачи

Авторами данной работы были проведены большие объемы гидродинамических исследований скважин – основного способа решения обратной задачи на ряде нефтяных месторождений, приуроченных к баженовским отложениям.

В результате анализа индикаторных диаграмм по ряду высокопродуктивных скважин за различные годы их эксплуатации можно отметить, что при работе скважин выше давления насыщения их прямолинейные участки практически параллельны между собой, т.е. коэффициенты продуктивности этих скважин остаются постоянными. Из этого следует вывод о том, что в продуктивном пласте трещины отсутствуют или они не смыкаются в большом диапазоне изменения забойных давлений — порядка 20 МПа.

Исследования скважин методом гидропрослушивания позволили при высоких импульсах возмущения установить гидродинамическую связь между скважинами на расстояниях от сотен метров до нескольких километров.

В результате исследований скважин методом восстановления давления можно определить фильтрационные характеристики продуктивного пласта и особенности его строения.

Совместный анализ результатов гидродинамических, промыслово-геофизических и геохимических исследований позволил установить, что коллектор состоит из двух сред. Первая приурочена к пласту малой толщины в подошве баженовской свиты – кровле абалакской свиты. Между баженовской и абалакской свитами нет четкой границы. Существует переходная зона, в которой породы обладают характерными особенностями двух свит одновременно. Этот пласт имеет высокую проницаемость и сформировавшееся в процессе разработки низкое текущее пластовое давление. Первоначально везде пластовое давление было аномально высоким. Пласт, расположенный в подошвенной части свиты, является флюидоподводящей средой: она обеспечивает основные притоки нефти к скважинам. Следует отметить, что на участке опытно-промышленной эксплуатации Салымского месторождения этот прослой уверенно выделяется в подошве баженовской свиты и прослеживается по площади. По комплексу геофизических исследований основной приток в высокодебитных скважинах отмечается из нижнего интервала, приуроченного к зоне контакта баженовской и абалакской свит.

Вторая среда охватывает всю залегающую выше толщу баженовских отложений. Она имеет низкую проницаемость и высокое текущее пластовое давление. Притоки из этой толщи к скважинам весьма незначительные. Таким образом, для двухслойного пласта рассматриваемого вида отчетливо выделяются два периода. На протяжении первого периода происходит истощение первого пласта, а движение в малопроницаемом верхнем пласте незначительно, на второй стадии нижний пласт значительно истощен и происходит истощение верхнего пласта.

По данным термометрических исследований, в простаивающих малодебитных скважинах фиксируются межпластовые перетоки из верхних и средних частей баженовской свиты в ее нижнюю часть.

Начальное пластовое давление во всей залежи Салымского месторождения, по данным разведочных скважин, было аномально высоким -45–46 МПа. За 10 лет разработки между двумя средами сформировался перепад давления в 10–20 МПа, за счет которого происходит переток из слабопроницаемой среды с высоким давлением в высокопроницаемую среду с низким давлением.

Следует отметить, что высокопроницаемые прослои малой толщины установлены во многих районах распространения баженовской свиты. Этот высокопроводящий прослой может залегать в иных

частях разреза, может существовать несколько таких пластов либо разветвленная система высокопроницаемых путей фильтрации. Суть подобной гидродинамической модели от этого не меняется.

В модели двойной проницаемости принимается осреднение давления по толщине в каждом из пластов. В модели двойной проницаемости высокопроницаемый пласт обозначается проницаемостью  $k_1$  и толщиной  $h_1$ , а низкопроницаемый пласт — проницаемостью  $k_2$  и толщиной  $h_2$ .

Система, состоящая из высоко- и низкопроницаемого пласта, характеризуется тремя безразмерными параметрами [5].

Относительная проводимость высокопроницаемого пропластка К:

$$K = \frac{k_1 h_1}{k_1 h_1 + k_2 h_2}. (1)$$

Относительная емкость высокопроницаемого пропластка  $\omega$ :

$$\omega = \frac{(\beta^* h)_1}{(\beta^* h)_1 + (\beta^* h)_2}.\tag{2}$$

Коэффициент обмена — параметр, характеризующий переток жидкости между высокопроницаемым и низкопроницаемым пропластками,  $\lambda$ :

$$\lambda = \alpha r_c^2 \frac{k_2 r_c^2}{k_1},\tag{3}$$

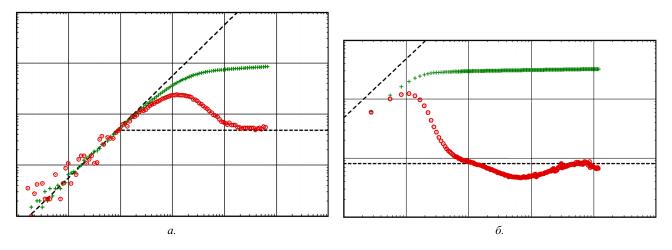
где  $\beta^*$  — коэффициент упругоемкости пласта,  $\mathbf{r}_c$  — радиус скважины,  $\alpha$  — фактор формы (геометрический параметр).

Уравнение пьезопроводности записывается для каждого из пластов. Для высоко- и низкопроницаемого пластов — уравнения (4) и (5):

$$\frac{k_1}{\mu} \left[ \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r} \right] = \beta_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\alpha}{\mu} k_2 \left[ P_2 - P_1 \right], \tag{4}$$

$$\frac{k_2}{\mu} \left[ \frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_2}{\partial r} \right] = \beta_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{\alpha}{\mu} k_2 \left[ P_2 - P_1 \right]. \tag{5}$$

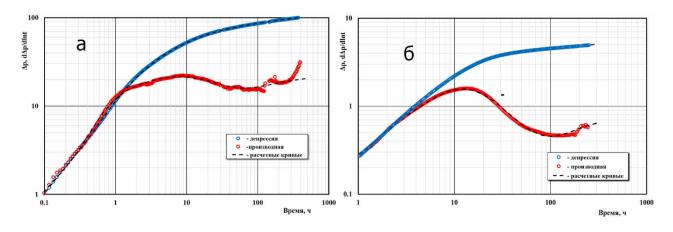
Определение модели пласта по данным гидродинамических исследований скважин производится путем регистрации кривой восстановления давления, ее обработки с использованием производной Бурде [5] — производной депрессии на пласт по логарифмическому времени. Построенное изменение производной в билогарифмических координатах является весьма чувствительным диагностическим графиком — интерпретационной моделью для определения типа пласта-коллектора, формы залежи, различных неоднородностей в строении продуктивного пласта.



**Рис. 1.** Диагностические графики [5]: a- однородный бесконечный пласт, b- пласт c двойной проницаемостью

На рис. 1 приведены два из существующего множества диагностических графиков. Каждый график представляет собой семейство двух кривых. Одна кривая (на графиках верхняя) — это изменение депрессии на пласт во времени, а вторая кривая (на графиках нижняя) — это изменение во времени производной от депрессии. Аргументом, по которому производится дифференцирование кривой давления, является функция суперпозиции, позволяющая учитывать историю работы скважины. На рис. 1а наблюдается рост производной, сменяющийся ее падением с постепенным выходом на горизонтальный участок. Участок роста и последующего падения производной обусловлен влиянием притока жидкости, продолжающегося в ствол скважины после ее остановки. Горизонтальный участок производной характерен для модели бесконечного однородного пласта (в зоне, рассматриваемой в данном исследовании). Этот участок производной обусловлен процессом радиальной фильтрации в пласте.

На рис. 16 производная ведет себя сначала аналогично: под влиянием продолжающегося притока из пласта сначала растет, затем падает. Затем после очень малого горизонтального участка начинает снова расти. Именно такую форму имели диагностические графики в скважинах, вскрывающих баженовскую свиту на Салымском и Северо-Салымском месторождениях [6]. Такую же форму имеют диагностические графики в скважинах, вскрывающих баженовскую свиту на Средне-Назымском месторождении, рис. 2.



**Рис. 2.** Диагностические графики по скважинам Средне-Назымского месторождения: a- скважина N $\!\!\!\! _{2}$  1. 6- скважина N $\!\!\!\!\! _{2}$  2

Следовательно, можно сделать вывод о том, что, по крайней мере, на трех месторождениях Западной Сибири коллектор баженовской свиты представляет собой систему, состоящую из двух сред. Первая приурочена к пласту малой толщины в подошве баженовской свиты. Она имеет высокую проницаемость и низкое текущее пластовое давление. Эта среда является флюидоподводящей: она обеспечивает основные притоки нефти к скважинам. Вторая среда охватывает всю залегающую выше толщу баженовских отложений. Она имеет низкую проницаемость и высокое текущее пластовое давление. Притоки из этой толщи к скважинам незначительные. В общем случае высокопроводящий пласт может залегать в иных частях разреза, может существовать несколько таких пластов либо разветвленная система высокопроницаемых путей фильтрации. Суть подобной гидродинамической модели от этого не меняется.

С целью прогнозирования и изучения эффективности выработки баженовской свиты на естественном режиме была создана принципиальная секторная гидродинамическая модель. Расчеты велись на трехфазном композиционном симуляторе NCOMP [7]. При проведении моделирования учитывались результаты промыслово-геологических, геофизических, геохимических и гидродинамических исследований, а также имеющаяся история эксплуатации скважин, вскрывающих залежи нефти в баженовской свите Салымского месторождения. Модель является односкважинной.

Глубина залегания пласта 2700 м. Начальное пластовое давление на кровле пласта 450 кгс/см<sup>2</sup>, начальная пластовая температура — 120 ∘С. Продуктивный пласт состоит из двух прослоев. Вышележащий прослой представлен низкопроницаемыми породами баженовской свиты с толщиной 30 м, пористостью 0.05 д. ед. и проницаемостью 0.0001 мД. Нижний прослой является флюидоподводящей средой толщиной 1 м, пористостью 0.15 д. ед. и проницаемостью 4 Д. Общая толщина продуктив-

ного пласта 31 м. Коэффициент вертикальной анизотропии проницаемости 0,1 д. ед. Коэффициент сжимаемости порового пространства  $2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{krc}$ .

Доля коллектора 100 %. Нефтенасыщенность 100 %. Плотность нефти в поверхностных условиях 820 кг/м $^3$ . Вязкость нефти в пластовых условиях 0.7 мПа·с. Объемный коэффициент нефти 1.29 м $^3$ /м $^3$ . Растворимость газа в нефти 180 м $^3$ /м $^3$ . Давление насыщения нефти газом 200 кгс/см $^2$ . Плотность газа в поверхностных условиях 1.13 кг/м $^3$ . Относительные фазовые проницаемости системы нефть-газ для верхнего и нижнего пропластков представлены на рис. 3 и 4 соответственно.

Размеры ячеек сетки в горизонтальной плоскости 100 х 100 м. Толщины ячеек по слоям сверху вниз 10, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1 и 1 м соответственно. Всего 10 слоев. Скважина находится в центре модели. Центральные ячейки глобальной расчетной сетки в горизонтальной плоскости имеют локальное измельчение 11\*11\*1 для каждой ячейки. Количество ячеек расчетной сетки в горизонтальной плоскости для верхнего пропластка 21\*21 шт. Количество ячеек расчетной сетки в горизонтальной плоскости для нижнего пропластка 11\*11 шт., что моделирует линзовидное (нерегулярное) распространение по площади высокопроводящей среды с проницаемостью 4000 мД. В вертикальных сечениях модели расчетная сетка симметрична относительно скважины. На рис. 5 и 6 приведены вертикальные разрезы модели, показаны кубы проницаемости и пористости соответственно.

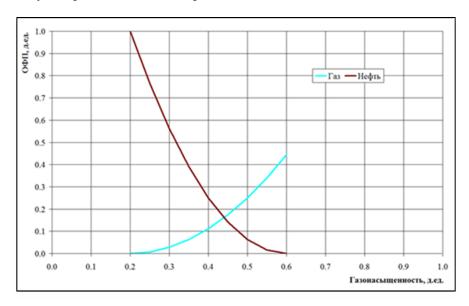


Рис. 3. Относительные фазовые проницаемости системы нефть-газ для верхнего прослоя

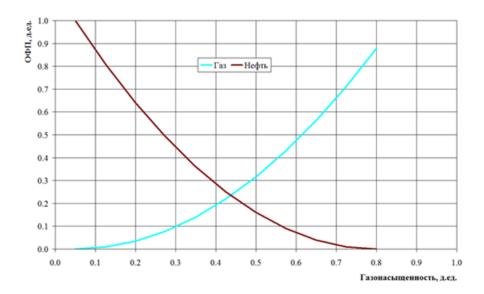
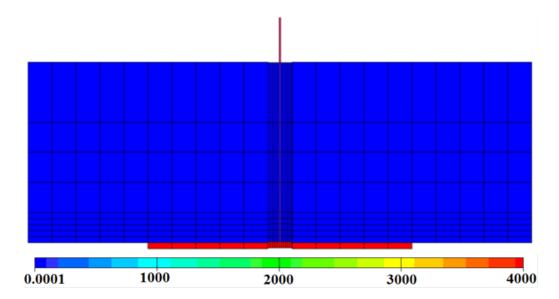
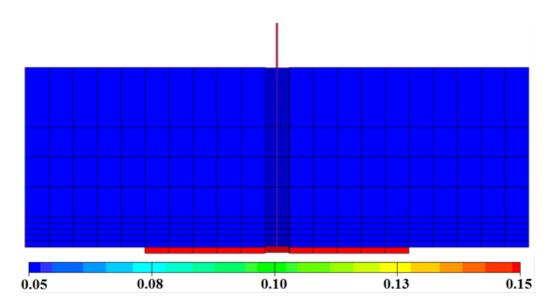


Рис. 4. Относительные фазовые проницаемости системы нефть-газ для нижнего пропластка



**Рис. 5.** Вертикальный разрез модели, показан куб проницаемости, мД. Масштаб по вертикальной оси увеличен в 15 раз



**Рис. 6.** Вертикальный разрез модели, показан куб пористости, д. ед. Масштаб по вертикальной оси увеличен в 15 раз

Добывающая скважина вскрывает весь продуктивный пласт. Она работает с постоянным дебитом 200 м³/сут. Скважина прекращает фонтанировать при забойном давлении 50 кгс/см². Скважина при этом давлении останавливается, и начинается перераспределение давления в пласте. Скважина работает в течение 8 месяцев, затем она отключается и в течение 24 месяцев рассчитывается перераспределение давления в пласте. На рис. 7 представлена динамика забойного давления и газового фактора. На рис. 8 представлена динамика профиля давления в околоскважинной зоне пласта

## Выводы

На основании совместного анализа результатов решения обратной задачи подземной гидромеханики — гидродинамических исследований в комплексе с результатами геолого-промысловых, геофизических и геохимических исследований, динамики пластовых давлений и дебитов, а также численного моделирования можно сделать выводы о строении пласта-коллектора баженовской свиты.

Пласт-коллектор баженовской свиты состоит из двух сред. Первая приурочена к пропласткам малой толщины и характеризуется высокой проницаемостью. Вторая среда охватывает практически всю толщу баженовских отложений. Она имеет существенно большую толщину и весьма низкую проницаемость. Основные притоки к скважинам происходят по первой среде. Притоки из второй среды

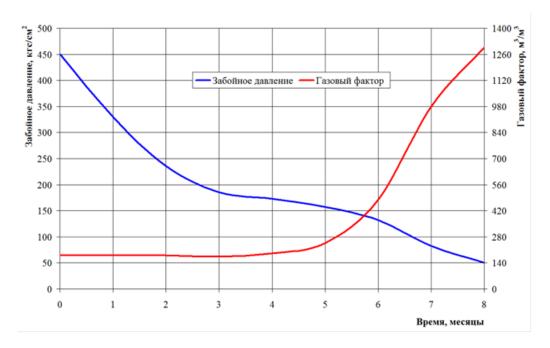


Рис. 7. Динамика забойного давления и газового фактора

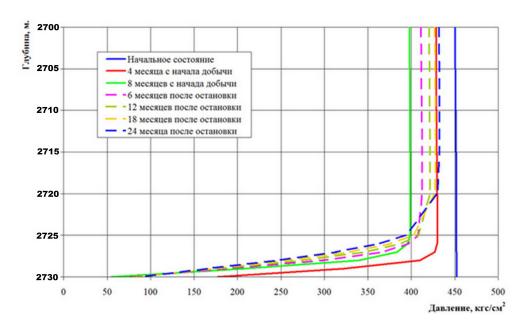


Рис. 8. Динамика профиля давления в околоскважинной зоне пласта

непосредственно к скважинам весьма незначительные. В результате сформировавшегося в процессе разработки перепада давления между двумя средами происходит переток из слабопроницаемой средыматрицы с высоким давлением в высокопроницаемую флюидоподводящую среду с более низким давлением.

Промыслово-геофизические исследования указывают на то, что основные притоки нефти наблюдаются из пропластка малой толщины, приуроченного к подошвенной части баженовской свиты. Это отмечалось на всех трёх исследованных авторами данной статьи месторождениях: Салымском, Северо-Салымском и Средне-Назымском. Перепад давления между двумя средами достигает в процессе разработки 20–30 МПа. Это было подтверждено результатами промыслового эксперимента по полной остановке Салымского месторождения [6]. Такие же результаты были получены при моделировании, рис. 8.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Кошкин В. В. *Роснедра оценили срок добычи в России рентабельных запасов нефти*. Режим доступа: https://rg.ru/2021/09/15/v-rosnedrah-ocenili-srok-dobychi-v-rossii-rentabelnyh-zapasov-nefti.html.
- 2. Нестеров Н. И. Новый тип коллекторов нефти и газа. Геология нефти и газа. 1979;10:26–29.
- 3. Зарипов О. Г., Сонич В. П., Юсупов К. С. Модель пласта Ю<sub>0</sub> баженовской свиты. *Нефтеносность* баженовской свиты Западной Сибири. М.: ИГиРГИ; 1980:57–67.
- 4. Фурсов А. Я., Вендельштейн Б. Ю., Постников А. В., Постников Е. В. и др. *Разработка методики,* подсчет геологических и оценка извлекаемых запасов нефти и газа Салымского месторождения (пласт  $HOC_0$ ). М.; 2002.
- 5. Houze O., Viturat D., Fjaere O. S. Dynamic Data Analysis. V 5.40. Kappa Engineering. 2021. 874 p.
- 6. Вольпин С. Г., Ломакина О. В., Афанаскин И. В., Штейнберг Ю. М. Комплексирование численного моделирования и различных видов исследований при изучении геологического строения месторождений с трудноизвлекаемыми запасами нефти на примере баженовской свиты. *Нефтепромысловое дело.* 2018;11:5–13.
- 7. Афанаскин И. В., Королев А. В., Вольпин С. Г., Ялов П. В. Моделирование многофазной многокомпонентной фильтрации при разработке месторождений углеводородов. *Вестник кибернетики*. 2016;3:51–61.

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-10

## К ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ЯКОБИ

#### В. П. Кошеев

НИУ МАИ, филиал «Стрела», г. Жуковский, Российская Федерация, koshcheev1@yandex.ru

Аннотация: показано, что как произведение дифференциалов независимых переменных, так и произведение частных производных функции многих (нескольких) переменных преобразуются как кососимметрическая форма с одним и тем же определителем Якоби при переходе от одной системы координат к другой.

Ключевые слова: кососимметрическая форма, определитель Якоби.

Благодарности: исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-07-00236 а.

Для цитирования: Кощеев В. П. К задаче построения определителя Якоби. Успехи кибернетики. 2021;2(4):87-89. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-10.

#### ON THE JACOBIAN CONSTRUCTION

#### V. P. Koshcheev

Strela Branch, Moscow Aviation Institute, Zhukovsky, Russian Federation koshcheev1@yandex.ru

Abstract: it is shown that both the product of independent variable differentials and the product of partial derivatives of a multivariable function can be rearranged as an antisymmetric form with the same Jacobian as we convert from one reference system to another one.

Keywords: antisymmetric form, Jacobian.

Acknowledgements: this study is supported by RFBR, research project No. 20-07-00236 a.

Cite this article: Koshcheev V. P. On the Jacobian Construction. Russian Journal of Cybernetics. 2021;2(4):87-89. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-10.

Известно, что инвариантность формы первого дифференциала функции многих (нескольких) переменных в разных системах координат достигается с помощью дополнительного условия, согласно которому дифференциалы независимых переменных преобразуются как компоненты контравариантного вектора, а частные производные преобразуются как компоненты ковариантного вектора (см., например, [1-4]). Сперва рассмотрим функцию двух независимых переменных

$$f = f(u.v), \tag{1}$$

где

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases}
du = u_x dx + u_y dy, \\
dv = v_x dx + v_y dy,
\end{cases}$$
(2)

где  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \ v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \ v_y = \frac{\partial v}{\partial y}.$  Запишем систему уравнений (2) в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где 
$$J = \left( egin{array}{cc} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{array} 
ight) -$$
 матрица Якоби.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В результате получим

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$
(5)

Так как матрица  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  не равна нулю, то

$$\begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Так как определитель произведения матриц одинаковых порядков в (6) равен произведению определителей этих матриц, то

$$\det\begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В результате получим

$$du \wedge dv = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} dx \wedge dy, \tag{8}$$

где  $\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$  — определитель Якоби.

Произведения дифференциалов в (8) записаны в обозначениях, которые приняты при записи дифференциальных форм [2, 4]. Тем не менее в замечательном учебнике [3] используются другие обозначения: «причем считают, что dxdx = dydy = 0 и dxdy = -dydx» [3, с. 136]. Покажем, что

$$du \wedge du = dv \wedge dv = 0$$
 и  $du \wedge dv = -dv \wedge du$ . (9)

Так как

$$\begin{cases} dv = v_x dx + v_y dy, \\ du = u_x dx + u_y dy, \end{cases}$$

то

$$\det \left( \begin{array}{cc} dv & 0 \\ 0 & du \end{array} \right) = \det \left( \begin{array}{cc} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{array} \right) \cdot \det \left( \begin{array}{cc} dx & 0 \\ 0 & dy \end{array} \right) = -\det \left( \begin{array}{cc} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{array} \right) \cdot \det \left( \begin{array}{cc} dx & 0 \\ 0 & dy \end{array} \right).$$

Тогда с помощью (7) и (8) получим

$$dv \wedge du = \det \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix} dx \wedge dy = -\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} dx \wedge dy = -du \wedge dv.$$

Если

$$\begin{cases} du = u_x dx + u_y dy, \\ du = u_x dx + u_y dy, \end{cases}$$

то

$$\det\begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & du \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix} = 0 \cdot \det\begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда

$$du \wedge du = \det \left( \begin{array}{cc} u_x & u_y \\ u_x & u_y \end{array} \right) dx \wedge dy = 0 \cdot dx \wedge dy = 0.$$

Если определитель Якоби не равен нулю, то легко получить

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$$
  $u \wedge dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ .

Исходя из инвариантности формы первого дифференциала функции многих (нескольких) переменных в разных системах координат можно показать, что частные производные в разных системах координат связаны между собой с помощью транспонированной матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Легко увидеть, что произведение частных производных функции многих (нескольких) переменных преобразуется как кососимметрическая форма с тем же самым определителем Якоби при переходе от одной системы координат к другой

$$\det \left( \begin{array}{cc} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{array} \right) = \det \left( \begin{array}{cc} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array} \right) \cdot \det \left( \begin{array}{cc} f_u & 0 \\ 0 & f_v \end{array} \right)$$

или

$$f_x \wedge f_y = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} f_u \wedge f_v, \tag{11}$$

где  $\det \left( egin{array}{cc} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array} 
ight)$  — определитель Якоби.

Можно видеть, что произведение частных производных обладает свойствами кососимметрической формы

$$f_x \wedge f_x = f_y \wedge f_y = 0$$
 и  $f_x \wedge f_y = -f_y \wedge f_x$ .

Таким образом, как произведение дифференциалов независимых переменных, так и произведение частных производных функции многих (нескольких) переменных преобразуются как кососимметрическая форма с одним и тем же определителем Якоби при переходе от одной системы координат к другой. Видно, что данный подход легко обобщается на случай большего числа независимых переменных. Можно говорить о дуальности отношения произведения дифференциалов к произведению частных производных.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа*. Том 2. М.: Наука, Главная редакция физикоматематической литературы; 1968.
- 2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. *Основы математического анализа*: В 2-х частях. Часть 2. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы; 2008.
- 3. Яковлев Г. Н. Лекции по математическому анализу. Ч. 2: Учеб, пособие для вузов. М.: Издательство физико-математической литературы; 2001.
- 4. Зорич В. А. Математический анализ: В 2-х частях. Часть 2. М.: Наука, Главная редакция физикоматематической литературы; 1984.

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-11

## В-КОМПЬЮТЕРЫ: ГЕНЕЗИС, РАЗВИТИЕ, ПРИЛОЖЕНИЯ

## Г. Е. Деев, С. В. Ермаков

Обнинский институт атомной энергетики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Обнинск, Российская Федерация, georgdeo@mail.ru, ermakov@iate.obninsk.ru

Аннотация: показан генезис В-компьютера как результата решения проблемы обозначения для чисел. Первым В-компьютером, появляющимся при решении этой проблемы, является автомат сдвига. Далее в результате применения метода последовательного синтеза появляются все остальные В-компьютеры. Показано, что В-компьютеры обладают неограниченным потенциалом развития. Принципиальных ограничений такого развития не существует. Это приводит к перманентному обогащению вычислительных возможностей В-компьютера. На основании этого факта делается вывод о том, что в полной мере решение таких задач, как создание суперкомпьютера, создание искусственного интеллекта может быть осуществлено на базе В-компьютеров.

*Ключевые слова*: В-компьютер, мыслящее существо, искусственный интеллект, шаблон заготовки, абстрактное вычислительное устройство, В-схема.

Благодарности: работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-07-00862.

Для цитирования: Деев Г. Е., Ермаков С. В. В-компьютеры: генезис, развитие, приложения. Успехи кибернетики. 2021;2(4):90–106. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-11.

## **B-COMPUTERS: GENESIS, EVOLUTION, AND APPLICATIONS**

### G. E. Deev, S. V. Ermakov

Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering, National Nuclear Research University MEPhI, Obninsk, Russian Federation,

georgdeo@mail.ru, ermakov@iate.obninsk.ru

Abstract: this study presents the B-computer genesis arising from the number designation problem. The first B-computer that emerges as we solve this problem is shift automation. Other B-computers are generated through sequential synthesis. It is shown that the B-computers have an unlimited potential for evolution. There are no basic restrictions to it. The B-computer capabilities keep expanding. With this fact, we concluded that B-computers are suitable for building a supercomputer and creating artificial intelligence.

Keywords: B-computer, thinking creature, artificial intelligence, template, abstract computer, B-layout.

Acknowledgements: this work was supported by RFBR Grant 20-07-00862.

Cite this article: Deev G. E., Ermakov S. V. B-Computers: Genesis, Evolution, and Applications. Russian Journal of Cybernetics. 2021;2(4):90–106. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-11.

#### Предварительное пояснение

В-компьютеры — это объекты, собираемые из абстрактных вычислительных устройств (АВУ) (использованная в названии «В-компьютеры» буква «В» латинская). В свою очередь, АВУ — это обобщение понятия абстрактного автомата, распространенное на все возможные устройства, вычисляющие математические функции. Одним из важнейших требований, предъявляемых к АВУ, является требование их минимальности, сводящееся, в случае автоматов, к минимальности количества состояний; в случае общего АВУ — к требованию, родственному требованию минимальности состояний. При выполнении условия минимальности получается новое устройство, не помнящее своего происхождения и с этого момента функционирующее как самостоятельный независимый объект. Часто используемым АВУ могут даваться имена, отражающие их функциональное назначение. Например, «автомат сложения», «умножитель на три» и т.д. АВУ задаются таблицами, формулами, В-схемами и в «железе». Наличие материальных объектов, представляющих АВУ, позволяет вести их полноценное исследование. АВУ — это объект, с необходимостью возникающий при решении принципиальных и прикладных

задач. К изначальным принципиальным задачам относятся задачи, связанные с понятием числа, и задачи, связанные с решением важнейшей проблемы обозначений для чисел. Фундаментальное и глубинное понятие числа само по себе никак не используется в приложениях и, в частности, в вычислениях до тех пор, пока для него не будет разработано обозначение. Без обозначений число оказывается ускользающим от нас, его невозможно применять на практике. Без обозначений невозможно существование никаких вычислительных устройств. Лишь тогда, когда число получает обозначение, лишь с этого момента оно оказывается включенным в практическую и научную деятельность. Проблема обозначений для чисел является важнейшей как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Ее решение естественным образом, с необходимостью, приводит к появлению первого вычислительного устройства — автомата сдвига. В свою очередь, появление автомата сдвига приводит к порождению всех остальных вычислительных устройств. Таким образом, автомат сдвига является прародителем всех вычислительных устройств, используемых в настоящее время. Помимо автомата сдвига в каждой системе счисления существуют другие автоматы, которые могут быть взяты в качестве первичных автоматов. Каждый из них порождает свое дерево вычислительных устройств, отличных от тех, которые порождает автомат сдвига, которые, однако, в настоящее время не находят себе применения. Возможно, это наш скрытый потенциал при решении проблем будущего. Основными инструментами, служащими для построения вторичных АВУ по отношению к автомату сдвига, являются метод последовательного синтеза и его развитие — метод сетевого синтеза. Эти методы на языке устройств реализуют основные инструменты построения функций — суперпозицию и обобщенную суперпозицию. Применение этих методов принципиально может продолжаться до бесконечности, однако на практике возникает непреодолимое препятствие, связанное со сложностью вычислений. Никакие вычислительные машины не могут помочь преодолеть это препятствие. Судя по всему, это означает наличие предела нашим знаниям, основанным на понятии числа. Как известно, Д. Гильберт в свое время сказал знаменитую красивую фразу «Wir müßen wissen und wir werden wissen» («Мы должны знать и мы будем знать»). Однако наличие предела, связанного со сложностью вычислений, заставляет нас в этом усомниться. Наши знания могут постоянно возрастать, но они никогда не преодолеют некую невидимую границу. Исследуя АВУ и их вычислительные возможности, мы узнаем немало нового о природе чисел и о природе вычислений.

Для практической реализации В-компьютеров нет принципиальных препятствий. Они могут быть созданы в любой технологии и для любой системы счисления, а не только для двоичной. Производства, создающие В-компьютеры, должны быть проще, чем аналогичные производства современных компьютеров.

## Проблема обозначений для натуральных чисел

Вычисления проводятся не над числами, а над их представителями — обозначениями для чисел. Этим обусловлена важность решения проблемы обозначений для чисел. При этом первое вычислительное устройство — автомат сдвига — появляется естественным образом в результате решения проблемы обозначений для натуральных чисел.

Насколько велик произвол в создании обозначений для чисел? Отвечая на этот вопрос, надо учитывать, что обозначения для чисел создает человек, создает для себя, используя свои ограниченные возможности. Учет ограниченности этих возможностей необходим, так как он дает представление об ареале доступного человеку, но вместе с тем он показывает, что ограниченность эта не чрезмерна и что такое мыслящее существо, как человек, может решить проблему обозначений для чисел. Однако могло бы быть и так, что ограничения настолько велики, что человек не смог бы решить проблему обозначений для чисел и такой инструмент научных исследований, как вычислительное устройство, был бы ему недоступен. Понятие числа оказалось бы для него бесполезным. Кроме того, выяснилось, что ограничения мыслительных возможностей человека таковы, что они с необходимостью приводят к позиционной системе счисления.

Проследим за созданием какой-либо конкретной системы обозначений.

Пусть процесс порождения чисел запущен. Этот процесс носит индуктивный характер и выражается записью:  $n \to A(n)$ , где A(n) — мыслительное действие, состоящее в порождении непосредственно следующего числа по отношению к числу n (Пеано для A(n) использует термин nocnedosamenb).

#### Пусть

число «ноль» обозначено символом: 0, число «один» обозначено символом: 1, число «два» обозначено символом: 2, число «три» обозначено символом: 3.

В этом процессе на каждом шаге происходит изобретение имени и символа для каждого вновь порожденного числа. При этом число как количественная идея первично, а имя и символ вторичны. Как соотносится этот процесс с возможностями человека? Этот процесс требует: 1) изобретения и запоминания имени вновь порожденной количественной идеи, т.е имени числа; 2) изобретения и запоминания символа для каждого числа; 3) чтобы в результате изобретения порождались новые имена и символы, не встречавшиеся на предыдущих шагах; для этого нужно каждый символ, который предлагается изобретательской мыслью, сравнивать на предмет отличия его от всех ранее порожденных символов. Но чисел много, количество их стремится к бесконечности, поэтому процесс сравнения становится невообразимо большим. Все сказанное требует (1) бесконечной памяти, (2) сколь угодно большой скорости передачи сигналов (это необходимо, чтобы осуществить процедуру сравнения друг с другом сколь угодно большого количества объектов за конечное время). Эти требования не соответствуют ни возможностям человека (у него конечная память), ни возможностям природы (в природе, насколько известно, скорость передачи сигналов ограничена). Поэтому описанный процесс изобретения индивидуальных обозначений для каждого вновь порожденного натурального числа должен быть по необходимости прерван на некотором шаге. Мы можем изобрести лишь конечное число различных знаков для нескольких первых натуральных чисел. Назовем это множество знаков множеством цифр. Для остальных чисел описанный процесс индивидуального изобретательства знаков должен быть прерван. На каком шаге будет прерван процесс изобретательства знаков, принципиального значения не имеет. Все зависит от объема памяти мыслящего существа. У разных существ она может быть различной, но в любом случае конечной.

На этом этапе мы фиксируем следующие два момента:

- 1. Процесс изобретательства обозначений и запоминания их должен быть остановлен после проведения нескольких начальных шагов, причем количество начальных шагов принципиального значения не имеет. (Произвол в количестве первых изобретенных знаков. В этот момент рождается многообразие будущих систем счисления.)
- 2. Значки для первых чисел могут изобретаться произвольно, при условии, что они различны. (Здесь имеется ограниченный произвол в **начертании** знаков.)

Итак, на начальном этапе процесса изобретательства обозначений для чисел возможен произвол в количестве первых изобретенных знаков и в их начертании. Мы остановимся на приведенном выше шаге: самое большое число, для которого мы изобрели индивидуальный знак, – это число три.

Далее нужно решить проблему обозначений всех чисел, порождаемых вслед за числом три. Индивидуальное изобретательство знаков, проводимое на начальном этапе, в общем-то, простой по замыслу и тривиальный по видимости (но не по сути), процесс: придумывай и запоминай. Но если на «придумывание» нет принципиальных ограничений, то на запоминание ограничения есть. Ограниченность памяти является тем препятствием, которое стоит на пути присвоения числам представляющих их знаков. Раз так, то делаем необходимый вывод: нужно учитывать ограниченность памяти в дальнейшем процессе присвоения числам знаков. Ограниченность участия памяти имеет место как на начальной фазе процесса присвоения знаков числам, так и в дальнейшем. На начальном этапе изобретательство и запоминание необходимы. На последующем этапе процесса порождения обозначений для чисел память понадобится по необходимости, в ограниченном объеме и не в таком, как раньше, «тривиальном» виде. Если раньше требовалась «тривиальная» память (т.е. появился знак — запоминай), то на новой фазе порождения обозначений запоминанию должно подвергаться нечто иное: с одной стороны, что-то компактное, обязательно конечное, а с другой стороны, эквивалентное в некотором смысле бесконечности, заменяющее бесконечность. Такое возможно, и оно соответствует метасистемному переходу. Нам известны случаи, когда бесконечные структуры оказывались эквивалентными конечным структурам. Процесс порождения обозначений должен быть передан чему-то, напоминающему механизм. Этот конечный механизм должен быть *создан* в результате *мыслительной* деятельности. Таким образом, окажется, что работа мысли заменит бесконечную память. Отсюда можно прийти к идее: мысль нам дана для того, чтобы возместить отсутствие бесконечной памяти. Таким образом, мы

мыслим, в частности, потому, что не обладаем бесконечной памятью. (Могут быть и другие причины, приводящие нас к необходимости мыслить, в том числе и при наличии бесконечной памяти.)

Процесс создания обозначений должен быть алгоритмизован.

После этих размышлений вернемся к уже созданным обозначениям: 0, 1, 2, 3 и продолжим процесс создания обозначений для чисел. Согласно процедуре  $n \to A(n)$  в мыслительном аппарате мыслящего существа (МАМС) рождается новая количественная идея (число) A(3). Таким образом, число, следующее за числом 3, как идея, порождено. Для него требуется создать обозначение. Новые простые знаки типа 0, 1, 2, 3 изобретать нельзя. Следовательно, новый знак должен быть сложным и представлять собой комбинацию из уже изобретенных простых знаков. Так как мы владеем понятиями чисел 2, 3, то мы можем составлять комбинации из двух или трех знаков. (Если бы мы не владели понятиями чисел 2, 3, то составление комбинаций из двух и трех знаков было бы невозможно. Так достигнутая стадия развития обеспечивает выполнимость следующих шагов.) Это будут комбинации типа ba, cba.

Начнем с двухзначных комбинаций ba.

Bonpoc: что ставить на место a и что ставить на место b? Чтобы определиться с ответом, надо сформулировать требования, которые должны выполняться при такой простановке.

*Требование* 1: комбинация *ba* должна быть новым знаком по сравнению с уже существующими. Но любая простановка знаков даст *новый* знак. Например, ba = 32. Как выбрать среди возможных комбинаций знаков ту, которую нужно взять в качестве обозначения для вновь порожденной количественной идеи? Пока нет никаких предпочтений. Поэтому примем произвольно написанную комбинацию 32 как одну из равновозможных в качестве обозначения для появившегося числа. Таким образом, у нас появились числа, обозначаемые символами: 0, 1, 2, 3, 32. Количественной идее (числу), изображаемой сложным знаком 32, мы даем имя «четыре» (мы даем знакомое имя для облегчения ориентировки; можно было бы дать любое другое имя). С появлением нового числа процесс порождения чисел  $n \to A(n)$  может быть продолжен и мы получаем новое число A(32), которое также изображаем комбинацией типа ba, удовлетворяющей требованию 1. Например, изобразим новое число символом 12, так что будем иметь: A(32)=12. И т.д. Когда исчерпаем возможности двухсимвольных обозначений, перейдем к трехсимвольным, потом четырехсимвольным (этот термин после появления числа 32, «четыре», становится осмысленным) и т.д. Новые обозначения будут появляться. Но этот вариант введения обозначений предъявляет чрезмерные требования к памяти. Действительно, в этом способе обозначений нет, по существу, никакой системы (точнее, имеется минимальная), ибо происходит случайная простановка символов 0, 1, 2, 3 вместо букв  $a, b, \ldots$  В итоге каждую новую комбинацию символов приходится запоминать, что при растущем неограниченно количестве чисел невозможно. Поэтому мы должны сформулировать

*требование* 2: простановка символов 0, 1, 2, 3 вместо букв  $a, b, \ldots$  в комбинациях типа  $ba, cba, \ldots$  не должна быть случайной, ибо случайная простановка символов требует бесконечной памяти.

Следствие из требований 1 и 2 состоит в том, что система обозначений для чисел, следующих за уже порожденными числами 0, 1, 2, 3, должна описываться конечным образом (тогда память справится), но так, чтобы она могла быть применена сколь угодно много раз в согласии с бесконечной процедурой  $n \to A(n)$  (тогда обозначениями потенциально будут охвачены все натуральные числа).

Такую систему обозначений будем называть регулярной.

Регулярная система обозначений должна содержать в себе некоторое конечное описание, которое можно повторить неограниченное число раз. Костяком такого конечного описания должен быть конечный порядок. Этот конечный порядок мы должны извлечь из уже имеющегося у нас материала. Есть ли у нас такой порядок? Есть. Это естественный порядок порождения первых чисел:

$$0 \prec 1 \prec 2 \prec 3. \tag{1}$$

Этот порядок лежит в основе понятия отношения непосредственного следования, являясь его «затравочной» частью. Но он не определен для элементов 0 и 3. У элемента 0 нет непосредственно предшествующего элемента, а у элемента 3 нет непосредственно следующего. Мы доопределяем описанный порядок также естественным образом, естественным потому, что он единственно возможен:

$$0 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec 0. \tag{2}$$

Единственность его следует из того, что простановка за элементом 3 любого другого числа (1 или 2) приводит к противоречию, к нарушению хотя бы одного из свойств, характеризующих отношение непосредственного следования.

Выясним, возможно ли его использование при решении проблемы обозначений.

Прежде всего, отметим, что с помощью двух знаков *ba* невозможно изобразить все множество натуральных чисел, потому что с помощью двух знаков можно изобразить лишь конечное множество чисел. Это можно обнаружить экспериментально. Точно так же невозможно изобразить все числа с помощью трех, четырех и т.д. знаков. *Следовательно, для изображения множества всех натуральных чисел требуются комбинации из бесконечного числа простых знаков*. Отметим, что каждый такой знак будет занимать определенное *место (позицию)* в пространстве, что два разных знака не могут находиться на одном и том же месте, что должна быть *система прочтения знаков* в зависимости от мест (т.е. опять должен быть *порядок*, но на этот раз во множестве мест).

Таким образом, для представления *всех* натуральных чисел требуется использование бесконечно местных записей.

Кроме того, как уже выяснено ранее, на места в этих записях ставить цифры случайным образом нельзя. Их нужно ставить каким-то регулярным способом.

Множество мест, на которых будут стоять цифры, изобразим следующим образом

$$\dots \dots$$
 (3)

Это один из простейших и удобных способов расположения мест в пространстве. Возможны и другие способы, например, по вертикали (как у инков) или логарифмической спирали и т.д., важно, чтобы была система прочтения знаков в зависимости от мест. Каждая черточка «—» символизирует собою место для цифры. Первое многоточие, встречающееся в (3) при движении слева направо, означает, что слева располагается бесконечное количество мест, которые мы не изображаем ввиду невозможности этого сделать. Второе многоточие между черточками означает, что здесь должно стоять некоторое конечное количество мест, которое мы также не изображаем, но по другой причине, а именно, по той, что количество этих мест при общем рассмотрении вопроса не определено. Места упорядочиваются естественным образом справа налево: действительно, учет происходящего на местах справа налево нам доступен даже при нашей конечной памяти. Происходящее же слева, в бесконечности, нам недоступно. Поэтому мы и говорим о естественной упорядоченности мест справа налево.

Итак, любое число должно быть представлено бесконечно местной записью.

После порождения числа 0 и обозначения его цифрой 0, мы цифру 0 ставим на все места справа налево вплоть до бесконечности. Будем считать, что именно эта знаковая строка представляет число 0:

$$\dots 0 \dots 000. \tag{4}$$

Таким образом, количественная идея  $A\{\ \}$ , сформировавшаяся при обозрении пустого множества, имеет два обозначения:

$$A\{ \} = 0 \text{ M } A\{ \} = \dots \underline{0} \dots \underline{000}.$$
 (5)

В этом месте мы отступаем от требования взаимной однозначности между объектом и обозначением для него. Как видно, это отступление необходимо и обусловлено конечностью памяти мыслящего существа (МС). При бесконечной памяти МС требование взаимной однозначности между идеей и знаком могло бы быть реализовано «без труда». Конечность памяти МС заставляет нас отступить от требования взаимной однозначности между объектом и обозначением для него. Это обстоятельство с практической точки зрения может оказаться удобным, поскольку а'priori понятно, что в одних случаях может оказаться целесообразным использовать одно обозначение, а в других — другое. В частности, уже сейчас мы воспользуемся этой возможностью. Дело в том, что введенные нами новые объекты — места — целесообразно отличать друг от друга не только по их пространственному расположению, но и по именам. Это можно сделать с помощью порождаемых обозначений для порождаемых чисел. В частности, назовем самое правое в (5) место словосочетанием «место ноль» и, воспользовавшись появившимся удобством, обозначим его простейшим из двух обозначением для нуля:

На место с номером 0 оператор порождения чисел A может ставить символы 0, 1, 2, 3, а остальные места при этом заполняются символом 0. В результате простановки символа 1 получится запись:

$$\dots \underline{0} \dots \underline{0} \, \underline{1}, \tag{7}$$

что означает

$$(\dots 0\dots 00) = \dots \underline{0}\dots \underline{0} \underline{1}_{\underline{0}}. \tag{8}$$

Это еще один вариант записи равенства:  $A\{0\} = 1$ .

Введем упрощенное обозначение для результата действия оператора A на множество:  $A\{0,\ldots,n\}\stackrel{>}{=} A(n)$ . Таким образом, мы имеем три варианта записи того, что последователь A вслед за числом 0 порождает число 1:

$$\{0\} = 1, \qquad A(0) = 1, \qquad A(\dots \underline{0} \dots \underline{0} \underline{0}) = \dots \underline{0} \dots \underline{0} \underline{1}.$$
 (9)

Число 1, появившееся вслед за числом 0, используется в упрощенном варианте, как и число 0, для нумерации мест:

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 0
\end{array},$$
(10)

так что помимо «места ноль» у нас появилось «место один». (В дальнейшем каждое вновь порожденное число нумерует соответствующее место.)

Третий вариант в (9), с участием мест, может быть записан так:

$$A(\dots \underline{0} \dots \underline{0} \underline{0} \underline{0}) = \dots \underline{0} \dots \underline{0} \underline{1} \underline{1} \underline{0}.$$

$$(11)$$

Понятно, что это чересчур подробная запись, и потому мы будем использовать ее лишь на начальной стадии решения проблемы обозначений для чисел, а также в случае необходимости. В основном же будут использоваться записи типа A(0) = 1.

Далее генератор чисел, т.е. последователь A, породит еще два числа: 2 и 3 согласно равенствам: A(1) = 2, A(2) = 3. Порожденные числа будут использоваться для нумерации мест, и для них равенства типа (11) будут иметь вид:

$$(\dots \underline{0} \dots \underline{0} \underbrace{0}_{1} \underbrace{1}_{0}) = \dots \underline{0} \dots \underline{0} \underbrace{0}_{1} \underbrace{2}_{0}. \tag{12}$$

$$(\dots \underline{0} \dots \underline{0} \underbrace{0}_{2} \underbrace{0}_{1} \underbrace{0}) = \dots \underline{0} \dots \underline{0} \underbrace{0}_{2} \underbrace{0}_{1} \underbrace{0}_{0}. \tag{13}$$

Число 2, появившееся в (12), используется в (13) для нумерации мест (появилось «место два»); аналогично используются для нумерации мест все появляющиеся в последующем числа. Их мы писать не будем, но сейчас обратим внимание на то, что с помощью двух мест: «места ноль» и «места один» — можно изобразить 16 чисел, которыми можно пронумеровать 16 мест; а с помощью трех мест: «места ноль», «места один», «места два» — можно изобразить 64 числа и ими пронумеровать 64 места и т.д. Другими словами, два процесса: процесс порождения чисел и процесс нумерации мест непротиворечивы. В том смысле, что не может случиться так, чтобы для нумерации мест не хватило уже порожденных чисел.

Что писать вслед за соотношением (13)? Согласно (2), вместо цифры 3, стоящей на месте 0, надо ставить 0. Если при этом не произвести никаких изменений на всех остальных местах, то мы вернемся к уже встречавшемуся обозначению для числа 0, что неправильно. Следовательно, изменения надо произвести на других местах. Мы уже ранее сказали, что места естественным образом упорядочены справа налево (это вытекает из конечности памяти МС). Поэтому следующим по порядку местом для включения его в работу должно быть «место один». Согласно (2), на месте с номером 0 нужно ставить цифру 0, а на месте с номером 1 вместо цифры 0 надо поставить цифру 1. Появившееся

изображение для числа будет новым по сравнению со всеми ранее встречавшимися и в то же время согласованным с формирующимся регулярным процессом обозначения чисел. Получим:

$$(A(\ldots \underline{0}\ldots \underline{0}\underline{0}\underline{3}) = \ldots \underline{0}\ldots \underline{0}\underline{1}\underline{1}\underline{0}.$$

$$(14)$$

В общем, понятно: на «месте ноль» надо последовательно согласно порядку, определяемому последовательностью (2), менять цифры. Если на «месте ноль» происходит переход от цифры 3 к цифре 0, то на «месте один», также согласно порядку (2), нужно совершить переход к следующей цифре. Если при этом на «месте один» происходит переход от цифры 3 к цифре 0, то на «месте два», также согласно порядку (2), нужно совершить переход к следующей цифре. Если при этом на «месте два» . . . и т.д.

Повторяющиеся фразы являются не чем иным, как упомянутым ранее *конечным описанием процедуры*, которая должна применяться *бесконечное число раз*. Той самой процедуры, о которой шла речь ранее.

Эта процедура возникла с необходимостью в результате приведенных рассуждений, каждый шаг которых обоснован и вытекает из предыдущих. Теперь уместно отметить, что описанная процедура никак не касается порождения чисел как количественных идей, а работает только на множестве многоместных обозначений для чисел. Она работает не в ареале идей, а в ареале обозначений. Поэтому она может быть отделена от оператора A, имеющего идейный характер, и объявлена оператором, действующим на множестве обозначений и порождающим из каждого существующего обозначения для натурального числа обозначение для следующего числа.

Сформулируем это в виде вывода (для выбранного множества цифр): для оператора-последователя A(n), единственным образом порождающего число как идею, существует и соответствует ему единственный оператор-последователь S(n), единственным образом порождающий многоместное обозначение для числа.

Результатом действия оператора-последователя S(n) является выписанный ниже столбец обозначений для нескольких первых натуральных чисел. Столбцовая запись выбрана для усиления зрительного впечатления.

...0000; ...0001; ...0002; ...0003; ...0010; ...0011; ...0012;

В связи с многоместными обозначениями для чисел установилась терминология для мест, занимаемых цифрами (см. рис. 1):

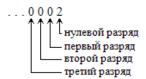


Рис. 1. Разрядная сетка

Позиции, занимаемые цифрами, называются *разрядами*, а совокупность разрядов — *разрядной сеткой*. Это одна из возможных реализаций упомянутого выше требования, что *для изображения натуральных чисел требуется бесконечно местная разрядная сетка*.

Таким образом, на поставленный в начале параграфа вопрос можно ответить так: если учесть ограничения, предъявляемые к мыслительным возможностям МС, то произвол в выборе обозначений для чисел не так уж и велик: для представления всех натуральных чисел мы с необходимостью приходим к позиционной системе представления чисел.

Продолжим работу теперь уже с парой операторов A(n) и S(n).

#### Автоматное решение проблемы обозначений для чисел

В предыдущем разделе проблема обозначений для натуральных чисел решена в принципиальном плане. Здесь мы ее четко оформим и алгоритмизуем.

- 1. Для обозначения чисел используется конечное множество цифр  $Z_4 = \{0,1,2,3\}$  (в общем случае  $Z_k = \{0, \dots, k-1\}, k \ge 2$ ; в дальнейшем эту оговорку делать не будем).
- 2. Создается шаблон, состоящий из бесконечного количества мест. Каждое место в шаблоне изображается черточкой, под черточкой пишется номер места:

$$\begin{array}{ccc} & & & & \\ & & & 1 & 0 \end{array} \tag{15}$$

В роли номеров выступают порождаемые числа. Процесс нумерации мест обгоняет процесс порождения чисел, следовательно, процесс нумерации и процесс порождения чисел взаимно согласованы,

3. Процесс обозначения чисел начинается с того, что на все места ставится цифра 0. Получается символический объект:

$$\dots \underline{0} \dots \underline{0} \underline{0} \underline{0} \underline{0}, \tag{16}$$

обозначающий число 0.

4. Назовем циклическим цифровым порядком последовательность цифр

$$0 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec 0. \tag{17}$$

Если цифры x и x' связаны записью:  $x \prec x'$ , то будем говорить, что x' непосредственно следует за x. (Отношение непосредственного следования « ≺ » нетранзитивно.)

5. Для обозначения чисел на места шаблона ставятся цифры из  $Z_4=\{0,1,2,3\}$ . Пусть  $\underline{x}$  обозначает цифру  $_{x\in Z_4}$ , которая ставится на место с номером i. Тогда обозначение для произвольного натурального числа будет иметь вид:

$$\dots \frac{0}{n'} \frac{x}{n} \dots \frac{x}{2} \frac{x}{1} \frac{x}{0}, \tag{18}$$

где n' — следующее за n число. На месте n' и всех последующих стоят нули.

- 6. Подобно тому, как оператор A из числа n порождает следующее за ним число, оператор S, порождающий обозначения для чисел, из уже обозначенного числа порождает обозначение для следующего за ним числа. Пусть (18) — обозначение для некоторого числа. Оператор S действует следующим образом.
- А0) Цифру  $\frac{x}{0}$ , согласно циклическому цифровому порядку (17), заменяет на цифру  $\frac{x'}{0}$ . Если  $x' \neq 0$  , то действие оператора S на этом заканчивается.

Если  $x^{'}=0$  , то действие оператора S переходит на цифру  $\frac{x}{1}$  .

А1) Цифру  $\frac{x}{1}$ , согласно циклическому цифровому порядку (17), заменяет на цифру  $\frac{\chi'}{1}$ .

Если  $x' \neq 0$ , то действие оператора S на этом заканчивается.

Если x'=0 , то действие оператора S переходит на цифру  $\frac{x}{9}$  .

На этом описание действия оператора S заканчивается. Как видим, *описание действия опера*тора S конечно, но применяется бесконечное число раз, т.е. мы удовлетворили требованию о создании процедуры, имеющей конечное описание (его, следовательно, МС с конечной памятью способно воспринять и запомнить), но которая может применяться (потенциально) бесконечное число раз. Каждое

натуральное число получает свое обозначение. В системе цифр  $Z_4$  разные числа получают разные обозначения. При переходе в другую систему счисления  $Z_k = \{0, \dots, k-1\}, \ k \geq 2$  числа также получат разные обозначения. Поэтому, вообще говоря, число имеет столько различных обозначений, сколько имеется систем счисления, определяющий параметр которых (т.е. (k-1)) не превосходит величины этого числа. Например, пусть число  $\bar{E}=7$ . Тогда возможные обозначения для числа 7 в различных системах счисления будут такие:

$$[k = 2] \rightarrow 7_2 = \dots 00111; \qquad Z_2 = \{0,1\}.$$

$$[k = 3] \rightarrow 7_3 = \dots 00021; \qquad Z_3 = \{0,1,2\}.$$

$$[k = 4] \rightarrow 7_4 = \dots 00013; \qquad Z_4 = \{0,1,2,3\}.$$

$$[k = 5] \rightarrow 7_5 = \dots 00012; \qquad Z_5 = \{0,1,2,3,4\}.$$

$$[k = 6] \rightarrow 7_6 = \dots 00011; \qquad Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}.$$

$$[k = 7] \rightarrow 7_7 = \dots 00010; \qquad Z_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}.$$

$$[k = 8] \rightarrow 7_8 = \dots 00007; \qquad Z_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}.$$

$$[k = 9] \rightarrow 7_9 = \dots 00007; \qquad Z_9 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

$$[k = 10] \rightarrow 7_{10} = \dots 00007; \qquad Z_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Хорошо видно, что число  $\bar{x}=7$  имеет 7 различных обозначений, т.е. количество различных обозначений для числа 7 равно количеству различных систем счисления, определяющий параметр которых (т.е. (k-1)) не превосходит 7 (это системы  $Z_2,\ldots,Z_8$ ); для всех систем счисления, для которых  $k\geq 8$ , число 7 имеет одно и то же обозначение (это явление будем называть *автонотацией*). В этом примере мы не писали под цифрами номера мест, на которых они стоят. В силу небольшого количества знаков в изображении числа 7 номера мест легко восстанавливаются в уме; кроме того, так делается всегда: во избежание громоздкости в записях обозначений для чисел номера мест, на которые ставятся цифры, не пишут.

Обозначения для чисел являются достаточно содержательными представителями чисел, настолько содержательными, что после непродолжительного привыкания к ним их отождествляют с самими числами. Мы также, говоря далее о числах, будем иметь в виду обозначения для них. Тогда действие оператора A рождения чисел можно представить как действие оператора S, дающего обозначение для вновь порожденного числа, и мы можем записать (приняв для краткости  $\frac{x}{i} \stackrel{\text{oб}}{=} x_i$ ):

$$S(...0x_n...x_2x_1x_0) = \begin{cases} ...0x_n...x_2x_1x_0', \text{ если } x_0' \neq 0; \\ ...0x_n...x_2x_1'0, \text{ если } x_1' \neq 0; \\ ...0x_n...x_2'0, \text{ если } x_2' \neq 0; \\ ....0x_n...x_2' = 0; \end{cases}$$
(20)

В формуле (20) предполагается, что результатом действия является первый реализованный случай при движении сверху вниз в правой части.

Формула (20) дает описание действий, которые надо выполнить над данным числом  $\bar{x} = ...0x_n...x_2x_1x_0$ , чтобы получить следующее за ним число Мы видим, что *позиционная система для обозначений чисел появляется с необходимостью*. Мы промоделировали с помощью МС процесс появления этой системы. Однако у (20) есть особенность, состоящая в том, что она требует наличия наблюдателя, находящегося извне по отношению к (20) и выполняющего действия, согласовываясь с (20). Наблюдатель должен: 1) посмотреть на цифру  $x_0$ ; 2) пользуясь циклическим цифровым порядком (17), найти цифру  $x_0'$ ; 3) выяснить, отлична ли она от 0; если отлична, то принять ... $0x_n...x_2x_1x_0'$  за следующее число и на этом закончить работу; если нет, то перейти к рассмотрению цифры  $x_1$  и т.д. Нам бы хотелось другого: отделить функцию S от наблюдателя. Роль наблюдателя желательно свести к минимуму: чтобы он только подавал на вход функции S число, после этого в работу функции S не вмешивался и после работы функции S получал бы на выходе число, идущее в ряду чисел вслед за поланным.

Другими словами, мы хотим, чтобы функция S, если использовать терминологию теории систем, представляла собою самостоятельно функционирующую систему со входом и выходом или, если использовать аппаратную терминологию, была бы устройством по переработке информации, т.е. вычисляющим устройством.

## Появление автомата сдвига $S \bar{x} | \bar{q}$

Проследим за работой функции S еще раз.

При переходе к следующему числу на «месте ноль» обязательно происходит замена цифры  $x_0$  на цифру  $x_0'$  согласно циклическому цифровому порядку (3), §3.

Эту замену мы изобразим как соответствие:

$$\begin{array}{cccc}
x_0 & \rightarrow & x'_0 \\
\hline
0 & \rightarrow & 1 \\
1 & \rightarrow & 2 \\
2 & \rightarrow & 3 \\
3 & \rightarrow & 0
\end{array} \tag{21}$$

Если была реализована последняя строка этого соответствия, то происходит переход к следующему «месту один» и выполняется такая же замена. Если же была реализована одна из первых трех строк, то на следующем «месте один» замена реализуется согласно другому соответствию:

$$\begin{array}{cccc}
x_1 & \rightarrow & x_1 \\
\hline
0 & \rightarrow & 0 \\
1 & \rightarrow & 1 \\
2 & \rightarrow & 2 \\
3 & \rightarrow & 3
\end{array}$$
(22)

Аналогичные действия при порождении следующего числа осуществляются и на других местах. Мы видим, что при работе функции *S* происходит переход от одного варианта соответствия к другому. Отметим это подробно, более информативно переписав соответствия, указывая на этот раз в каждой строке соответствия: а) какой вариант соответствия (21) или (22) реализуется при осуществлении замены цифры числа на данном месте числа, б) по какой строке соответствия осуществляется замена, в) к какому варианту соответствия нужно переходить на следующем месте порождаемого числа:

Прочитаем, например, строчку, отмеченную знаком \*:

- «а) на некотором месте шаблона числа замена цифры, стоящей на этом месте, происходит согласно соответствию (21);
  - б) цифра 2 заменяется на цифру 3;
- в) на следующем месте шаблона числа замена происходит согласно соответствию (22).» Аналогично прочитаем строчку, отмеченную знаком \*\*:
- «а) на некотором месте шаблона числа замена цифры, стоящей на этом месте, происходит согласно соответствию (22);
  - б) цифра 1 заменяется на цифру 1;
  - в) на следующем месте шаблона числа замена происходит согласно соответствию (22).»

Как видно из (23), при переходе к следующему месту шаблона почти всегда замена цифр происходит по соответствию (22). Лишь в одном случае нарушается это наблюдение — в случае замены цифры 3 на цифру 0: в этом случае при переходе на следующее место шаблона числа нужно снова пользоваться соответствием (21). Информация о том, по какой схеме соответствия происходит замена цифры, есть, по существу, информация о том, в каком состоянии находится вычислительное устройство S: то ли в состоянии, когда срабатывает соответствие (21), то ли в состоянии, когда срабатывает соответствие (22). С этого момента введем термин «состояние вычислительного устройства» как рабочий термин при описании работы вычислительных устройств и дадим ему обозначение «q».

Вычислительное устройство S имеет, как уже сказано, два состояния. Эти два разных состояния мы будем различать, нумеруя их различными числами. Выберем, например, два числа: 0 и 1, так что в связи с q мы можем иметь два равенства: q=0 или q=1. Для упрощения изложения удобно столбцы цифр в соответствиях (21) и (22), стоящие слева от стрелок, называть входными (вход), а справа от стрелок — выходными (выход). Будем также считать, что работа устройства S в режиме соответствия (21) есть работа в состоянии q=1, а работа устройства S в режиме (22) есть работа в состоянии q=0. Это позволит нам переписать (23) с использованием символов состояний, которые мы теперь будем писать рядом с цифрами, отделив их от цифр запятыми:

Прочитаем строку, отмеченную символом \*:

«если устройство S находилось в состоянии 1 и на вход его поступила цифра 3, то на выходе его появляется цифра 0 и устройство переходит в состояние 1».

Аналогично читается строка \*\*:

«если устройство S находилось в состоянии 0 и на вход его поступила цифра 2, то на выходе его появляется цифра 2 и устройство переходит в состояние 0».

Аналогично читаются все остальные строки (24).

Столбцы (24) дают принципиальную математическую основу вычислительного устройства S.

Будем называть далее вычислительное устройство S абстрактным вычислительным устройством S или коротко — ABY S.

Введем часто употребляемый термин: наряду со словосочетанием «место в шаблоне числа» будем использовать также словосочетание «разряд числа».

Как мы видим, ABУ S при своей работе по порождению обозначения для нового числа осуществляет переходы от одного места шаблона числа к следующему месту. Этот переход совершается дискретно, и мы можем ввести дискретное время t со значениями  $0, 1, 2, 3, \ldots$  и говорить, что для ABУ S переход во времени от одного момента к следующему соответствует переходу от одного разряда числа к следующему. Мы будем по тому или иному закону увязывать моменты времени с номерами разрядов числа. В связи с появлением времени t удобна иная интерпретация взаимодействия ABУ S с преобразуемым числом: если раньше мы говорили о перемещении ABУ S от одного места шаблона числа к следующему, то теперь будем считать ABУ S неподвижным, а число подвижным и поступающим поразрядно от младших разрядов к старшим на вход ABУ S.

Теперь совершим еще одно преобразование соответствий (24). Запишем их в виде единой таблицы. Эта таблица по содержанию совпадает со столбцами соответствий (24), но более удобна для использования и четче оттеняет роль состояний ABY S.

Покажем, как пользоваться таблицей. Напомним, что если ABУ S находится в состоянии q=0, то поступающие на вход ABУ S цифры после работы ABУ не меняются, т.е. на выходе ABУ появляется то, что поступило на вход, а если ABУ S находится в состоянии q=1, то поступающие на вход цифры меняются согласно циклическому цифровому порядку (23).

Пусть, например, ABУ S в некоторый момент времени находилось в состоянии q=0 и на вход ABУ S поступила цифра 2. Тогда на пересечении строки, отмеченной цифрой 2, и на пересечении столбца, отмеченного состоянием q=0, мы найдем, что в следующий момент времени ABУ S окажется в состоянии q=0 и на выходе его появится цифра 2, которая ставится на место шаблона числа, увязанное с этим моментом времени.

Аналогично, пусть ABУ S в некоторый момент времени находилось в состоянии q=1 и на вход ABУ S поступила цифра 3. Тогда на пересечении строки, отмеченной цифрой 3, и на пересечении столбца, отмеченного состоянием q=1, мы найдем, что в следующий момент времени ABУ S окажется в состоянии q=1 и на выходе его появится цифра 0, которая ставится на место шаблона числа, увязанное с этим моментом времени.

Таблица 1

ABYS

q x	0	1
0	0, 0	0, 1
1	0, 1	0, 2
2	0, 2	0, 3
3	0, 3	1, 0

Работу АВУ S по преобразованию числа  $\bar{x}$  в следующее за ним число  $\bar{x}'$ удобно проследить с помощью так называемой *развертки во времени работы ABV* S (далее –развертка). Развертка представляет собою многострочную структуру, достаточно легко воспринимаемую и позволяющую без лишних слов следить за работой ABV S. Покажем это на примере. Пусть на вход ABV S поступает число  $\bar{x} = \dots 0001233$ . Требуется с помощью ABV S найти следующее за ним число  $\bar{x}'$ . Изобразим развертку:

5	4	3	2	1	0	t
	0	1	2	3	3	x
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
0						
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	
	0	1	3	0	0	x'

Читаем содержимое развертки.

При t=0 на вход ABV S поступает цифра  $x_0=3$  числа  $\bar{x}$  (цифра этого разряда соответствует моменту t=0). Устройство S в этот момент времени находится в состоянии q=1. По таблице 1 находим, что устройство S в следующий момент времени t=1 переходит в состояние q=1 (на развертке показано стрелочкой влево) и вырабатывает выходной сигнал x'=0 (на развертке показано стрелочкой вниз).

При t = 1 ситуация повторяется.

При t=2 на вход ABУ S поступает цифра  $x_2=2$  числа  $\bar{x}$  (цифра этого разряда соответствует моменту t=2). Устройство S в этот момент времени находится в состоянии q=1. По таблице 1 находим, что устройство S в следующий момент времени переходит в состояние q=0 (на развертке показано стрелочкой влево) и вырабатывает выходной сигнал  $x_2'=3$  (на развертке показано стрелочкой вниз).

При t=3 на вход ABУ S поступает цифра  $x_3=1$  числа  $\bar{x}$  (цифра этого разряда соответствует моменту t=3). Устройство S в этот момент времени находится в состоянии q=0. По таблице 1 находим, что устройство S в следующий момент времени переходит в состояние q=0 (на развертке показано стрелочкой влево) и вырабатывает выходной сигнал  $x_3'=1$  (на развертке показано стрелочкой вниз).

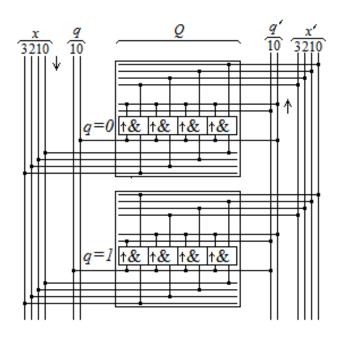
И т.д.

На выходе ABУ S получится число  $\bar{x}'=\dots 001300$ . Таким образом, ABУ S вычислило число  $\bar{x}'$ , следующее за числом  $\bar{x}=\dots 001233$  (напоминаем, что у нас было намерение отделить наблюдателя от ABУ S и следить за работой S как бы со стороны; по этой причине мы подчеркиваем самостоятельность работы ABУ). Запишем результат в виде равенства:

$$S(\dots 001233) = \dots 1300. \tag{25}$$

Итак, мы с необходимостью получили ABУ S, вычисляющее по каждому числу  $\bar{x}$  следующее за ним число  $\bar{x}'$ . В-схема ABУ S показана на рис. 2 [1].

 $S\ ar{x}|ar{q}$  — это полное обозначение для ABУ S, где S — символ вычисляемой функции,  $ar{x}$  — число на входе (аргумент),  $ar{q}$  — состояние, в которое ставится ABУ S в начальный момент времени (начальное состояние).



**Рис. 2.** *B-схема ABY*  $S\bar{x}|\bar{q}$ 

Устройство работает независимо от наблюдателя. Роль наблюдателя сводится только к подаче числа на вход устройства и к считыванию результата. Устройство, работу которого мы разобрали, функционирует в четверичной системе счисления с набором цифр  $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ . Но аналогичное устройство может быть создано для любой другой системы счисления, причем изменения, которые должны быть сделаны в устройстве S, заданном таблицей 1, совершенно очевидны. Устройство S осуществляет сдвиг в последовательности натуральных чисел (точнее, в последовательности обозначений для них) от произвольного числа к следующему за ним числу. Поэтому оно имеет другое название: «устройство сдвига». Про него говорят, что устройство сдвига реализует функцию сдвига.

Сделаем еще одно усовершенствование. Оно существенно как с принципиальной, так и с практической точек зрения. А именно, в числе  $\bar{x} = ...000x_n...x_2x_1x_0$  заменим бесконечное число нулей ... 000 на значок 0, в результате чего для числа  $\bar{x}$  будем иметь другую запись:

$$\bar{x} = \stackrel{\leftarrow}{0} x_n \dots x_2 x_1 x_0 \ . \tag{26}$$

Понятно, что, заменив бесконечное число нулей ... 000 на значок  $\stackrel{\leftarrow}{0}$ , мы совершили актуализацию бесконечности:

$$Act(...000) = \stackrel{\leftarrow}{0} . \tag{27}$$

Символ  $\stackrel{\frown}{0}$  информативно полезен: он показывает не только то, что влево идет бесконечное число нулей, но и то, что номера разрядов в записи числа растут влево. Это сразу наводит на мысль ввести не только символ  $\stackrel{\longleftarrow}{0}$ , но и символ  $\stackrel{\frown}{0}$ , который показывал бы, что в записи числа разряды растут не влево, а вправо, и что вправо идет, начиная с некоторого места, бесконечное число нулей. Это делает две возможные записи числа равноправными:

$$\bar{x} = 0 \quad x_n \dots x_2 x_1 x_0 = x_0 x_1 x_2 \dots x_n \vec{0}.$$
 (28)

Символ  $\overleftarrow{0}$  целесообразно ввести во множество цифр  $Z_4$ :

$$Z_4 = \left\{ \stackrel{\leftarrow}{0}, 0, 1, 2, 3 \right\}. \tag{29}$$

А принимая во внимание развертку во времени работы ABУ S, мы понимаем, что должно быть внесено также небольшое дополнение в таблицу 1.

Появление символа  $\stackrel{\frown}{0}$  повлияет также на развертку, упростив ее и обогатив дополнительным содержанием. В чем суть достигнутого упрощения и дополнительного содержания? Во-первых, развертка становится конечной, а не потенциально бесконечной, как раньше. Во-вторых, мы получили

Таблица 2

 $ABY S\bar{x}|\bar{q}$ 

q	0	1
$\stackrel{\leftarrow}{0}$	$0, \stackrel{\leftarrow}{0}$	0, 1
0	0, 0	0, 1
1	0, 1	0, 2
2	0, 2	0, 3
3	0, 3	1, 0

дополнительный информативный сигнал:  $nongeneous bulk} 0$  в nocnedheй строке развертки означает конец работы ABV S. Таким образом, мы получили признак, по которому можно судить о конце работы устройства. Так в ABV S решается проблема останова.

U, наконец, бросив ретроспективный взгляд на таблицу 2, мы легко приходим к выводу, что первую и вторую строчки таблицы (не считая «шапки» таблицы) можно объединить. В результате получается итоговая таблица 3 для устройства S.

В этой таблице стрелочки над нулями поставлены в скобки, что соответствует тому, что на вход устройства S нули поступают не всегда со стрелочками. В случае, если на вход поступил нолик со стрелочкой, скобки нужно удалить.

Таблица 3

$$ABY S\bar{x}|\bar{q}$$

q	0	1
( <del>←</del> )	$0, \overset{(\leftarrow)}{0}$	0, 1
1	0, 1	0, 2
2	0, 2	0, 3
3	0, 3	1, 0

АВУ S, задаваемое таблицей 3, *полностью решает проблему обозначений для натуральных чисел* и представляет множество натуральных чисел в следующих обозначениях:

$$N_0 = \left\{ \stackrel{\leftarrow}{0}, \stackrel{\leftarrow}{0} 1, \stackrel{\leftarrow}{0} 2, \stackrel{\leftarrow}{0} 3, \stackrel{\leftarrow}{0} 10, \stackrel{\leftarrow}{0} 12, \stackrel{\leftarrow}{0} 13, \stackrel{\leftarrow}{0} 20, \stackrel{\leftarrow}{0} 21, \dots \right\}. \tag{30}$$

Отметим, что ABУ S, будучи генератором натуральных чисел, предъявляемых нам g их обозначениях, отправляясь от 0, последовательно порождает свою область определения — множество  $N_0$ . Областью значений ABУ S при этом оказывается множество  $N_0 \setminus \{0\}$ , т.е. множество всех натуральных чисел без нуля. Действительно, при действии ABУ S на любое натуральное число 0 никогда не получается. ABУ S, будучи применено к любому числу упорядоченной последовательности (30), совершает переход по этому ряду чисел на один шаг вправо и тем самым выполняет операцию «сдвиг». Поэтому ABУ S называют автоматом сдвига, каноническая B-схема автомата сдвига S  $\bar{x}$   $|\bar{q}$  изображена на рис. 2.

## Порождение автоматом сдвига $S \bar{x} | \bar{q}$ других вычислительных устройств

В основе порождения других вычислительных устройств лежит метод последовательного синтеза устройств, который перерастает в метод сетевого синтеза. Оба метода моделируют историческое развитие математики и являются аппаратной реализацией построения функций посредством суперпозиции. Созданное таким образом многообразие функций вполне удовлетворяет практическим потребностям математики. А'priori функции, взятые «с потолка», могут не входить в это многообразие, являясь по отношению к этому многообразию его идеальными периферийными объектами или прародителями других семейств функций, могущих быть специально рассмотренными. Дело в том, что автоматов типа  $S \bar{x} | \bar{q}$ , способных порождать аналогичные многообразия функций, существует  $20^{20}$ , где 10 — основание k-ичной системы счисления. Эти многообразия могут быть рассмотрены наподобие рассмотрения функций, порождаемых автоматом сдвига, но в любом случае это будут В-автоматы, возможно, перспективные, но в настоящее время находящиеся за пределами как теоретических, так и практических рассмотрений.

Характерным признаком этого подхода является его «демократичность», состоящая в том, что ни одна система счисления не выделяется на фоне других, все системы равноправны. Схемная реализация этих устройств также обладает этой особенностью. Такой схемной реализацией является В-схемная реализация, одинаково применимая для всех систем счисления. Поэтому В-индустрия является компьютерной индустрией, допускающей потенциально неограниченное развитие не только по такому параметру, как система счисления, но и по многообразию потенциальных логик, со своими особыми арифметиками и математиками.

В результате применения метода последовательного синтеза получаются поэтапно семейство автоматов сдвига на целую константу, семейство сумматоров и вычитателей, семейство умножителей и делителей, семейство экспоненциаторов и т.д. Принципиально ясная схема построения устройств наталкивается на трудно преодолимую преграду, заключающуюся в сложности устройств высокого порядка. Тем не менее то, что удается получить, служит содержательной основой для построения В-компьютера с многообразными возможностями.

## В-компьютеры и искусственный интеллект

В-компьютеры в полной мере приспособлены к созданию искусственного интеллекта. Существует два подхода к пониманию искусственного интеллекта. Согласно первому подходу под искусственным интеллектом понимается искусственно созданный объект, обладающий способностью к самостоятельной интеллектуальной деятельности. Будем называть это понятие искусственным интеллектом в строгом смысле. Таким образом, первой отличительной чертой искусственного интеллекта является его искусственное происхождение, т.е. он должен быть создан кем-то другим, способным к достаточно высокой творческой деятельности, Роботы не являются примерами ИИ в строгом смысле по той причине, что, хотя они и созданы искусственно, но собственным интеллектом не обладают; они ведут себя, подчиняясь приказам, исходящим от встроенных в них компьютеров, в которых, в свою очередь, содержатся программы, написанные человеком. Эти программы определяют поведение роботов и их зависимость от человека.

Согласно второму подходу под искусственным интеллектом понимается искусственно созданный объект, обладающий способностью к разумной поведенческой деятельности в пределах запрограммированной компетенции. Будем называть это понятие искусственным интеллектом в слабом смысле. Все известные роботы реализуют искусственный интеллект в слабом смысле. В конечном счете поведение такого робота определяется человеком. Все роботы управляются компьютерами, атрибутом которых являются программы, создаваемые человеком. Поэтому поведение роботов целиком и полностью зависит от человека. Следовательно, эти роботы могли бы быть названы программируемыми роботами с разумным поведением, а не искусственным интеллектом в строгом смысле. До тех пор, пока они управляются программируемыми компьютерами, искусственным интеллектом в строгом смысле они названы быть не могут. В этих условиях никакой «бунт машин» невозможен. Простонапросто потому, что у этих машин нет собственного интеллекта и они полностью подчиняются человеку. Обычные вычислительные программы являются такими же роботами, как и те объекты, которые привычно называются роботами, потому что вычислительные программы ведут себя разумно в процессе вычислений, но их разумное поведение, в отличие от поведения роботов, не обнаруживается внешним образом. Еще одним примером роботов являются банкоматы, проявляющие искусственный

интеллект в слабом смысле. Они демонстрируют довольно сложное поведение в пределах своей компетенции, обусловленной управляющими программами. Примеры *программируемых роботов с разумным поведением* можно приводить до бесконечности.

Итак, *искусственный интеллект в слабом смысле* используется повсеместно. Именно он, искусственный интеллект в слабом смысле, обычно принимается в быту за полноценный искусственный интеллект. Мы, однако, будем отличать искусственный интеллект в строгом смысле от искусственного интеллекта в слабом смысле, понимая, что подлинный искусственный интеллект есть ИИ в строгом смысле.

Поскольку В-компьютеры обладают способностью неограниченно пополняться вычислительными устройствами различного целевого назначения и тем самым расширять свои возможности, то они вполне приспособлены к созданию искусственного интеллекта как в строгом, так и в слабом смыслах. При этом, поскольку в В-компьютерах вместо программ используются устройства, то управленческие функции, осуществляемые в них над искусственным интеллектом, будут выполняться с большей надежностью и с большей скоростью.

## В-компьютеры и нейронные сети

В-компьютеры обладают еще одним уникальным свойством: они могут внутри себя содержать собственное производство по созданию вычислительных устройств. Это обусловлено возможностью включать в конструкцию компьютера блок заготовок, на которых создаются вычислительные устройства. В дальнейшем созданное устройство встраивается в общую конструкцию компьютера и принимает участие в его работе на общих основаниях наряду с другими, уже существующими устройствами. Объем заготовок не имеет ограничений, вследствие чего компьютер имеет возможность неограниченно развиваться. Заготовки имеют предварительную классификацию и согласно этой классификации возможно создание устройств, принадлежащих тем или иным классам. Заготовка является аналогом полуфабриката и превращается в реальное изделие после дополнительной работы над ним. На заготовках создается вычислительное устройство, реализующее нужное отображение. Информацию об отображении первоначально мы имеем фрагментарно, и по имеющемуся фрагменту отображения создается устройство, реализующее отображение в целом. Ситуация здесь напоминает ситуацию с нейронными сетями, где также создается структура в результате процедуры, называемой обучением. Эта процедура по фрагментам отображения создает структуру (нейронную сеть), реализующую, как предполагается, отображение в целом. Почему предполагается? Потому что нейронная сеть представляет собою «черный ящик», а что находится в нем, неизвестно. Лишь по его работе делается суждение о том, что структура правильная. Так, например, на химфаке МГУ была создана нейронная сеть, расшифровывающая устройство сложных молекул, при этом создатели нейронной сети комментировали: «Пока она работает правильно. Но как она это делает, мы не знаем». Этот комментарий подчеркивает, что нейронная сеть - это черный ящик. В отличие от этого, устройство, синтезированное на заготовке, нам полностью известно, его схему мы можем посмотреть и изучить. Это устройство черным ящиком для нас не является, следовательно, и отображение, им реализуемое, нам может быть достаточно хорошо известно.

Обратим также внимание на тот факт, что синтезированное устройство k-ичное, не обязательно двоичное.

Таким образом, В-компьютеры могут содержать в себе отсеки, заменяющие работу нейронных сетей.

Зачем иметь в В-компьютере отсек с заготовками? В качестве примера, объясняющего причину этого, можно привести пример двух конкурирующих компьютеров и один из них – это В-компьютер с заготовками. Пусть В-компьютер имеет возможность получить информацию об отображении (естественно, частичную) компьютера-конкурента. Тогда он сможет по имеющимся у него фрагментам синтезировать устройство компьютера-конкурента и оказаться в результате способным предвидеть действия конкурента. Понятно, что это большое конкурентное преимущество.

Другие причины, по которым желательно иметь отсек с заготовками, могут быть связаны с оптимизацией работы исходного базового компьютера.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Деев Г. Е., Рахов Э. В. Устройство для сложения числа с константой. А. с. СССР № 1278836, кл. G06 F7/50, бюл. № 47, 1986.
- 2. Деев Г. Е. Абстрактные вычислительные устройства. Т. 2. М.: Энергоатомиздат; 2007. 332 с.
- 3. Деев Г. Е. Теория вычислительных устройств. Санкт-Петербург: Лань; 2019. 452 с.
- 4. Лорьер Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта. Москва: Мир; 1991.
- 5. Тейз А., Грибомон П. и др. Логический подход к искусственному интеллекту. Москва: Мир; 1991.
- 6. Нильсон Н. Искусственный интеллект. Москва: Мир; 1973.
- 7. Арбиб М. Метафорический мозг. Москва: Мир; 1976.
- 8. Артоболевский И., Кобринский А. Знакомьтесь роботы. Москва; Молодая гвардия; 1980.
- 9. Эндрю А. Искусственный интеллект. Москва: Мир; 1985.
- 10. Минский М. На пути к созданию искусственного разума. *Вычислительные машины и мышление* / Под ред. Э. Фейгенбаума и Дж. Фельдмана. Москва: Мир; 1967. С. 402–458.
- 11. Лем С. Сумма технологий. Москва: Мир; 1968.

Сетевое издание. Полные тексты статей размещаются на официальном сайте издания jcyb.ru. Адрес учредителя и издателя: Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», 117218, г. Москва, Нахимовский просп., дом 36, корпус 1. Телефон: +7 (495) 718-21-10. Дата выхода в свет 30.11.2021. Формат  $60 \times 84/8$ . Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 9,6. Цена свободная.