DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-3-5

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

С. И. Кабанихин

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация, ksi52@mai.ru

Аннотация: в данной работе приведен анализ взаимосвязей теории обратных и некорректных задач и математических аспектов искусственного интеллекта. Показано, что при анализе вычислительных алгоритмов, которые условно можно отнести к вычислительному искусственному интеллекту (машинное обучение, природоподобные алгоритмы, методы анализа и обработки данных), возможно, а подчас и необходимо, использовать результаты и подходы, развитые в теории и численных методах решения обратных и некорректных задач, такие как регуляризация, условная устойчивость и сходимость, использование априорной информации, идентифицируемость, чувствительность, усвоение данных.

Ключевые слова: обратные задачи, некорректные задачи, искусственный интеллект.

Благодарности: работа поддержана грантом РФФИ 20-51-54004 «Идентификация коэффициентов в эллиптических и параболических уравнениях».

Для цитирования: Кабанихин С. И. Обратные задачи и искусственный интеллект. *Успехи кибернетики*. 2021;2(3):33–43. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-3-5.

INVERSE PROBLEMS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE

S. I. Kabanikhin

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation, ksi52@mai.ru

Abstract: this paper analyzes the relationship between the theory of inverse and incorrect problems and the mathematical aspects of artificial intelligence. It is shown that computational algorithms that can be categorized as computational artificial intelligence (machine learning, nature-like algorithms, data analysis and processing) can or should be analyzed with the approaches developed for the theory and numerical methods for solving inverse and incorrect problems. They are regularization, conditional stability and convergence, the use of a priori information, identifiability, sensitivity, data assimilation.

Keywords: inverse problems, incorrect problems, artificial intelligence.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research grant 20-51-54004 Estimation of Coefficients in Elliptical and Parabolic Equations.

Cite this article: Kabanikhin S. I. Inverse Problems and Artificial Intelligence. *Russian Journal of Cybernetics*. 2021;2(3):33–43. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-3-5.

Обратные задачи

Основными проблемами в обратных задачах являются их нелинейность, а в линейном случае — неограниченность обратного оператора [1]. Численные методы решения обратных задач разделяются на две основных группы: итерационные и прямые. К итерационным относятся методы оптимизации, Ньютона–Канторовича и всевозможные их модификации; к прямым — метод линеаризации и методы Гельфанда–Левитана–Марченко–Крейна.

Наибольшую сложность при решении обратных задач представляет собой неустойчивость.

Для определения различных классов обратных задач следует отметить, что «обратное» бывает не иначе, как по отношению к чему-то «прямому». Рассмотрим в качестве примера задачи математической физики.

Для постановки прямой задачи задается область, в которой изучается процесс, уравнение, описывающее данный процесс, а также начальные и граничные условия.

Например, для уравнения акустики можно поставить начально-краевую прямую задачу следующим образом. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$, $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство, требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения акустики

$$c^{-2}(x)u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln \rho(x) \cdot \nabla u + h(x,t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad\qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g(x,t).$$

Эта задача (как большинство прямых задач математической физики) корректна, то есть однозначно разрешима и устойчива по отношению к малым вариациям данных.

В обратной задаче помимо $u(x,t)$ неизвестны какие-либо функции, входящие в прямую задачу. Эти неизвестные называются решением обратной задачи. Для их определения к заданным уравнениям добавляется какая-либо дополнительная информация о решении прямой задачи — данные обратной задачи. Пусть, например, дополнительной информацией будет значение решения прямой задачи на границе

$$u|_{\Gamma} = f(x,t).$$

Требуется по данным $f(x,t)$ определить неизвестные функции, входящие в формулировку прямой задачи. В зависимости от того, какие из функций являются неизвестными, обратные задачи математической физики можно разделить на различные типы.

Классификация по искомым функциям

Обратная задача называется **ретроспективной**, если требуется восстановить начальные условия. Обратная задача называется **граничной**, если требуется найти функцию, входящую в граничное условие. Обратная задача называется **задачей продолжения**, если начальные условия неизвестны, а дополнительная информация и граничные условия заданы только на части границы Γ области Ω и требуется определить решение $u(x,t)$ (продолжить решение внутрь области). Обратная задача называется **задачей об источнике**, если требуется определить источник, функцию $h(x,t)$. Обратная задача называется **коэффициентной,** если требуется восстановить коэффициенты $c(x)$ и $p(x)$, входящие в основное уравнение.

Сразу же отметим, что данная классификация не является полной. Бывает так, что неизвестны и начальные, и граничные условия. Бывает, что неизвестной оказывается сама область Q (или часть ее границы).

Классификация по дополнительной информации

Возможны и другие (помимо начально-краевой) постановки прямой задачи акустики (спектральная, рассеяния, кинематическая и т.д.), в которых требуется найти соответствующие характеристики акустического процесса (собственные частоты, отраженные волны, время пробега волны и т.д.). Измерения этих характеристик экспериментаторами порождают новые классы обратных задач акустики.

Наиболее доступными на практике являются измерения на границе исследуемой области, но иногда измерительные приборы могут быть размещены внутри объекта

$$u(x_m,t) = f_m(t), \qquad m = 1,2,\ldots$$

(**внутренние задачи**). В **ретроспективных** обратных задачах (по аналогии с задачами оптимального управления) используются так называемые «финальные» наблюдения

$$u(x,T) = f(x).$$

При гармоническом режиме колебаний

$$u(x,t) = e^{i\omega t}\bar{u}(x,\omega)$$

ставятся **обратные задачи рассеяния** и дополнительная информация задается, например, в виде

$$\bar{u}(x, \omega_\alpha) = \bar{f}(x,\alpha), \qquad x \in X_1, \qquad \alpha \in B,$$

где X_1 — множество точек наблюдений; B — множество частот, на которых ведутся наблюдения. В некоторых случаях известны собственные частоты соответствующего дифференциального оператора

$$\Delta U - \nabla \ln \rho \cdot \nabla U = \lambda U$$

и различные характеристики собственных функций (**спектральные обратные задачи**). Иногда удается фиксировать в точках времена прихода волн, порожденных локальными источниками, сосредоточенными в точках

$$\tau(x^m, x_k) = \tilde{f}(x^m, x_k), \qquad x_k \in X_1, \qquad x^m \in X_2.$$

В этом случае задача восстановления скорости $c(x)$ называется **обратной кинематической задачей**.

Классификация по уравнениям

Итак, только для уравнения акустики мы получаем набор M_1 различных обратных задач в зависимости от количества и вида неизвестных функций, совокупность которых будем обозначать символом q. С другой стороны, можно получить M_2 различных вариантов обратных задач в зависимости от количества и типа измеряемых величин (дополнительной информации) — данных обратной задачи, совокупность которых будем обозначать через f. Тогда символически обратную задачу можно записать в виде операторного уравнения

$$A(q) = f,$$

где A — оператор, действующий из пространства искомых элементов Q в пространство измеряемых величин F.

В заключение заметим, что вместо уравнения акустики мы могли бы рассмотреть уравнение теплопроводности, переноса излучения, Лапласа, Пуассона или систему уравнений Ламе, Максвелла и т. п., — скажем, M_3 различных вариантов. Но тогда только для уравнений математической физики можно определить порядка $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$ различных обратных задач, многим из которых посвящены целые монографии.

Замечание. Разумеется, можно еще более обобщить понятие обратной задачи, поскольку иногда и сам закон (уравнение) неизвестен. В этом случае требуется по результатам опытов (наблюдений) установить закон (уравнение). И эти обратные задачи связаны с задачами, решаемыми с помощью алгоритмов искусственного интеллекта.

Отметим еще раз, что интерес к обратным и некорректным задачам возник в начале XX века. В 1902 году Ж. Адамар сформулировал понятие корректности постановки задач для дифференциальных уравнений. Корректной по Адамару называют задачу, решение которой существует, единственно и непрерывно зависит от данных. Также Адамар привёл пример некорректной задачи (задача Коши для уравнения Лапласа). В 1943 году А. Н. Тихонов указал на практическую важность подобных задач и возможность устойчивого приближения их решения. В пятидесятых и шестидесятых годах XX века появился ряд новых подходов, которые стали основополагающими для теории некорректных задач и привлекли к ней внимание многих математиков.

С появлением мощных компьютеров интерес к обратным и некорректным задачам стал стремительно расти. К настоящему времени обратные и некорректные задачи превратились в бурно развивающуюся область знаний, проникающую практически во все сферы математики, включая алгебру, анализ, геометрию, дифференциальные уравнения, математическую физику, функциональный анализ, вычислительную математику. Отметим, что так или иначе каждую некорректную задачу можно сформулировать как обратную к некоторой корректной прямой задаче.

Отметим также, что теория обратных и некорректных задач широко применяется для решения практических задач почти во всех областях науки, в частности, в таких как:

• физика (квантовая механика, акустика, электродинамика, фотоника и т. д.);

• геофизика (сейсморазведка, электроразведка, гравиразведка, магниторазведка, каротаж, магнитотеллурическое зондирование и т. д.);

• медицина (рентгеновская томография, ЯМР-томография, УЗИ и т. д.);

• экология (диагностика состояния воздуха, воды, космический мониторинг и т. д.);

• экономика (теория оптимального управления, финансовая математика и т. д.);

• эпидемиология (SIR-модели и агентное моделирование COVID-19, распространение туберкулеза, ОРВИ, ВИЧ-инфекции).

Открытию новых законов в математической форме (уравнений) предшествует множество экспериментов, размышлений и дискуссий. Этот сложный (исторический) процесс вряд ли стоит называть решением обратной задачи. Однако термин «обратные задачи» все чаще проникает в самые разные разделы научной литературы. Например, можно взглянуть на математическую статистику как на обратную задачу по отношению к теории вероятностей. Очень много общего можно найти между теорией обратных задач и теорией управления, распознавания образов и многими другими областями знаний. Для того чтобы убедиться в популярности обратных задач, достаточно, например, набрать в поисковой системе Google несколько слов, скажем «inverse problems books». В момент написания этих строк упомянутая система выдала тысячи книг, в названии которых есть слова «inverse problems». Причем в ссылке на каждую книгу есть совет: «see more references in this book», т. е. в каждой из книг содержится еще список ссылок. А если убрать из темы поиска слово «books», то по теме «inverse problems» система выдает примерно 221 000 000 ссылок. Поэтому в данном разделе мы ограничились лишь несколькими математическими аспектами теории обратных задач.

Универсального метода решения некорректных задач нет. Кратко изложим основы теории некорректных задач, полученные основоположниками теории некорректных задач А. Н. Тихоновым [2], В. К. Ивановым [3] и М. М. Лаврентьевым [4]. Теорема о непрерывности обратного отображения, если M — компакт, а оператор A — непрерывный и взаимно однозначный, является основой теории условно-корректных задач и построения множества эффективных численных алгоритмов их решения. Понятие квазирешения, введенное В. К. Ивановым [3], во-первых, обобщает понятие решения, во-вторых, восстанавливает все условия корректности и, в-третьих, приводит к новым алгоритмам приближенного решения некорректных задач. Метод М. М. Лаврентьева [1, 4] позволяет построить численные алгоритмы решения широкого класса алгебраических систем уравнений, линейных и нелинейных интегральных и операторных уравнений первого рода. Фундаментальным для теории некорректных задач является понятие регуляризирующего семейства операторов. Коротко говоря, регуляризирующее семейство (или регуляризирующая последовательность) состоит из таких операторов R_α, каждый из которых позволяет устойчивым образом построить приближенное решение $q_{\epsilon\alpha} = R_\alpha f_\epsilon$ уравнения $Aq = f_\epsilon$, которое сходится к точному решению q при согласованном стремлении к нулю параметра регуляризации α и уровня погрешности ϵ.

Одним из самых эффективных и широко применяемых методов регуляризации является итерационная регуляризация, основанная на минимизации целевого функционала $J(q) = \|Aq - f\|^2$ и методах градиентного спуска. Основой градиентных методов является известное утверждение о том, что если в некоторой точке q из Q градиент функционала $J(q)$ не равен нулю, то, двигаясь в направлении антиградиента, можно уменьшить значение функционала $J(q)$ при условии, что шаг спуска достаточно мал. В самом деле, вспоминая определение градиента (полагаем для простоты, что Q — гильбертово пространство), мы можем записать

$$J(q - \alpha J'q) - J(q) = \langle J'q, -\alpha J'q\rangle + o(\alpha\|J'q\|) = -\alpha\|J'q\|^2 + o(\alpha\|J'q\|),$$

откуда видно, что правая часть становится отрицательной при достаточно малых альфа. Поэтому, выбирая различными способами шаг спуска альфа, а иногда и корректируя направления спуска (метод сопряженных градиентов), можно построить невозрастающую по функционалу минимизирующую последовательность. При этом даже в случае некорректности задачи $Aq = f$ для многих градиентных методов оказывается возможным оценить скорость убывания функционала $J(q_n)$. Сложнее обстоит дело с сильной сходимостью, которая, разумеется, возможна лишь в случае, если хотя бы одно точное решение уравнения $Aq = f$ существует. Сравнительно простыми средствами удается доказать монотонное стремление к нулю $\|q_n - q_T\|$ последовательностей, построенных по методам простой итерации, наискорейшего спуска или сопряженных градиентов. Однако, в силу некорректности, при численном решении особенно важно, во-первых, знать оценку скорости сходимости и, во-вторых, понять, на каком номере итерации следует остановиться. Давно замечено, что если некорректная задача $Aq = f$ решается градиентным методом и по приближенным данным, то минимизирующая последовательность сначала приближается к точному решению, а затем, с ростом итераций, величина минимизирующей последовательности может начать расти. Но как же тогда выбрать номер n, на котором следует остановиться? Наиболее часто применяемым на практике является принцип невязки, в основе которого лежит естественная гипотеза о том, что если невязка достигла уровня погрешности измерений, то вряд ли стоит продолжать процесс. Сказанное относится и к выбору параметра регуляризации альфа.

Если же удается более глубоко исследовать задачу $Aq = f$ и получить оценку условной устойчивости, то можно, во-первых, оценить скорость сильной сходимости, а, во-вторых, сформулировать новое правило выбора номера остановки итерационного процесса.

Корректные и некорректные задачи

Пусть оператор A отображает топологическое пространство Q в топологическое пространство F ($A : Q \mapsto F$). Для топологического пространства Q символом O(q) обозначим окрестность элемента q из Q. Всюду в дальнейшем D(A) — область определения, R(A) — область значений оператора A.

Определение корректности задачи (корректность по Адамару). Задача $Aq = f$ корректна на паре топологических пространств Q и F, если выполнены следующие три условия:

1) для любого элемента f из F существует решение q_T из Q уравнения $Aq = f$ (условие существования решения), т. е. R(A) = F;

2) решение q_T уравнения $Aq = f$ единственно в Q (условие единственности решения), т. е. существует обратный оператор $A^{-1} : F \mapsto Q$;

3) для любой окрестности $O(q_T)$ решения q_T уравнения $Aq = f$ найдется окрестность O(f) правой части f, такая, что для всех элементов из O(f) их прообраз принадлежит окрестности $O(q_T)$, т. е. обратный оператор непрерывен (условие устойчивости решения).

Определение можно обобщить и на другие пространства, заменяя топологические пространства на метрические, банаховы, гильбертовы, евклидовы. Иногда более естественно брать в качестве Q топологическое пространство, а в качестве F — евклидово и так далее. Неизменными в понятии корректности остаются лишь требования существования, единственности и устойчивости решения.

Определение. Задача $Aq = f$ **некорректна** на паре пространств Q и F, если хотя бы одно из трех требований корректности не выполнено.

Из всех некорректных задач М. М. Лаврентьев предложил выделить класс условно-корректных. Пусть Q, F — топологические пространства и M из Q — фиксированное множество. Через A(M) обозначим образ множества M при отображении A.

Определение условной корректности (корректность по Тихонову). Задача $Aq = f$ называется условно-корректной на множестве M, если f из A(M) и выполнены следующие условия:

1) решение q_T уравнения $Aq = f$ единственно на множестве M;

2) для любой окрестности решения уравнения $Aq = f$ существует такая окрестность $O(f)$, что при любом g из пересечения O(f) и A(M) решение уравнения $Ap = g$ содержится в $O(q_T)$ (условная устойчивость).

Важно отметить, что во втором условии допускаются только такие вариации данных, которые не выводят из класса существования A(M).

Определение. Множество M называется множеством корректности задачи $Aq = f$.

Замечание. Для доказательства корректности задачи $Aq = f$ необходимо доказать теоремы существования, единственности и устойчивости решения. Для доказательства условной корректности задачи $Aq = f$ необходимо выбрать множество корректности M, доказать единственность решения в M и условную устойчивость q относительно малых вариаций данных (правой части), не выводящих решение за пределы множества корректности M.

Важно отметить, что если для обоснования корректности задачи необходимо доказать существование решения, то в случае условной корректности существование решения предполагается. Разумеется, это не означает, что теорема существования решения не важна или что к доказательству этой теоремы не стоит стремиться. Просто условия существования решения для условно-корректной задачи

$Aq = f$, которым с необходимостью должны удовлетворять данные f, в наиболее интересных и важных случаях оказываются слишком сложными для проверки и непосредственного применения в численных алгоритмах (критерий Пикара, условия разрешимости обратной задачи Штурма–Лиувилля и др.). В этом смысле показательно название статьи В. П. Маслова «Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационного процесса» [5], которое вскрывает одну из основных проблем исследования существенно некорректных задач. Введение понятия условной корректности переносит центр тяжести на поиск устойчивых методов приближенного решения некорректных задач. Однако проблема детального математического изучения условий разрешимости каждой конкретной задачи не становится от этого менее интересной и важной. Отметим, что иногда при отсутствии точного решения можно построить регуляризирующие алгоритмы, сходящиеся к псевдорешению, или квазирешению [1].

Об определениях искусственного интеллекта

Определите значения слов, и вы избавите человечество от половины его заблуждений

Р. Декарт

Словами «искусственный интеллект» называют очень много различных систем: нейронные сети, экспертные системы, фреймы (структуры, содержащие некоторую информацию), генетические алгоритмы, семантические сети. Отметим, что многие методы искусственного интеллекта используют эти системы совместно. Например, вершины семантической сети могут быть фреймами, а нейронную сеть можно обучать с помощью генетического алгоритма.

Актуальность развития различных систем искусственного интеллекта можно иллюстрировать тем, что Правительство России выделяет более 5 миллиардов рублей на развитие технологий искусственного интеллекта.

Будущее ИИ в России — это тысячи компаний, 10 000 разработчиков, свои процессоры. На это планируется израсходовать 180 млрд рублей [6]. «Правительство продолжит поддерживать отечественную IT-индустрию. Речь идет о проектах с использованием технологий искусственного интеллекта. Для этого в бюджете на ближайшие три года предусмотрено более 5 миллиардов рублей», — заявил 29 марта Михаил Мишустин в ходе совещания с вице-премьерами [7].

По его словам, власти будут предоставлять гранты для IT-компаний, разработчиков электронных сервисов и открытых библиотек. В этом году на указанные цели заложено почти 1,5 миллиарда рублей.

В рамках реализации мероприятий федерального проекта «Цифровые технологии» национальной программы «Цифровая экономика» Сбербанк подготовил проект дорожной карты по развитию направления «Нейротехнологии и искусственный интеллект». Российский рынок решений в сфере ИИ в 2018 году составил 2,1 млрд руб., а к 2024 году этот рынок увеличится до 160 млрд руб., то есть в 76 раз.

В широком смысле слова понятие искусственного интеллекта применяется для описания и оценивания технических систем, функциональность которых определяется не столько возможностями управления энергией или механизмами, сколько мощностью вложенных в них знаний (наукоемкостью). Возможности использования такой мощности ограничены объемом памяти, скоростью обмена данными, способностью к обучению и применению полученных знаний. Поэтому ИИ включает в себя класс компьютерных систем, в которых находятся решения как «прямых» — расчеты по известным математическим моделям, так и «обратных» задач — построение параметров моделей и алгоритмов обработки данных.

Понимание «интеллектуальности» и возможностей ее имитации с помощью различных механизмов в процессе развития научных знаний видоизменялось. До середины XIX века даже задачи простого счета представлялись интеллектуальными. При этом если человек умел быстро и без ошибок вычислять, используя математические формулы, и на этой основе управлять, например, своей коммерческой деятельностью, то его интеллектуальные способности оценивались как высокие. Благодаря математической формализации алгоритмов вычислений задачи счета удалось постепенно автоматизировать. В 1822 году Чарльз Бэббидж создал разностную машину, позволяющую автоматизировать процессы вычислений путем аппроксимации функций многочленами и вычисления их конечных разностей с использованием строго упорядоченной последовательности операций, устройства ввода/вывода и хранения данных. Работа такого механического автомата, а главное, составление самой последовательности операций, которая приводит к решению, — это, видимо, первая интеллектуальная задача в современном смысле слова.

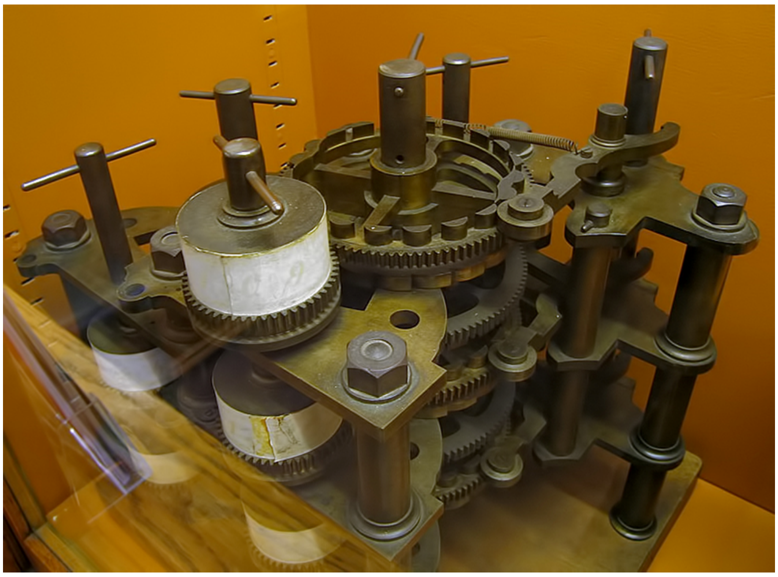

Рис. *Одна из шести демонстрационных моделей вычислительной части разностной машины Чарльза Бэббиджа, собранная после его смерти сыном Генри из деталей, найденных в лаборатории*

Фактически такой автомат, но вместе с человеком, понимающим цели вычисления, образует естественную «интеллектуальную» систему, которой Платон сопоставил слово «киберно», характеризующее возможности человека управлять материальными объектами для реализации своего замысла. В XX веке после работ Алана Тьюринга, Норберта Винера и Джона фон Неймана появилось более глубокое понимание сути механических манипуляций с символами.

В утвержденной 10 октября 2019 г. Национальной стратегии развития искусственного интеллекта на период до 2030 года (НС) сказано, что она является основой разработки программ и проектов, при реализации которых требуется использование технологий ИИ.

Ключевое понятие НС «искусственный интеллект» определяется как «комплекс технологических решений, позволяющих имитировать когнитивные функции человека, получая результаты, сопоставимые как минимум с результатами интеллектуальной деятельности человека».

Это весьма емкое, но, по сути, «рекурсивное» определение ИИ через когнитивные функции и интеллектуальную деятельность допускает различные интерпретации. Чтобы придать введенным в НС понятиям инженерный аспект, целесообразно провести ретроспективный анализ данной проблемы одновременно с рассмотрением современных подходов и методов моделирования функций, непосредственно характеризующих когнитивные способности человека [8].

Одно из математических оснований ИИ — это машинное обучение — класс методов искусственного интеллекта, характерной чертой которых является не прямое решение задачи, а обучение в процессе применения решений множества сходных задач. Для построения таких методов используются средства математической статистики, численных методов, методов оптимизации, теории вероятностей, теории графов, различные техники работы с данными в цифровой форме.

Имеется множество объектов (ситуаций) q и множество возможных ответов (откликов, реакций) f. Существует некоторая зависимость между ответами и объектами $A(q) = f$, но она неизвестна.

Известна только конечная совокупность прецедентов — пар «объект, ответ», $\{q_i, f_i\}$, $i = 1,2,3,\ldots,N$, называемая обучающей выборкой.

На основе этих данных требуется восстановить неявную зависимость, то есть построить алгоритм, способный для любого возможного входного объекта выдать достаточно точный классифицирующий ответ.

В терминологии обратных задач требуется восстановить оператор A.

Если зависимость описывается уравнением, то мы приходим к коэффициентной обратной задаче. Но зависимость не обязательно выражается аналитически, и здесь нейросети реализуют принцип эмпирически формируемого решения. Важной особенностью при этом является способность обучаемой системы к обобщению, то есть к адекватному отклику на данные, выходящие за пределы имеющейся обучающей выборки [9]. Для измерения точности ответов вводится оценочный функционал качества.

Данная постановка является обобщением классических задач аппроксимации функций. В классических задачах аппроксимации объектами являются действительные числа или векторы. В реальных прикладных задачах входные данные об объектах могут быть неполными, неточными, нечисловыми, разнородными. Эти особенности приводят к большому разнообразию методов машинного обучения.

Для любой алгоритмически разрешимой задачи существует множество различных алгоритмов решения, а процессы формирования алгоритмов и разработка технических средств их реализации — суть технологии интеллектуализации вычислительных процессов.

В этом контексте основополагающую идею А. Тьюринга можно перефразировать так: цифровые автоматы могут точно имитировать работу цифровых автоматов, поэтому существующие в настоящее время алгоритмы работы с множествами больших данных могут быть декомпозированы с помощью когнитивных возможностей человека на алгоритмы решения задач генерации алгоритмов, которые используются для выбора и обработки целевых подмножеств больших данных.

Таким образом, фактическая мощность множества обрабатываемых цифровых данных становится сопоставима с мощностью множества алгоритмов их обработки. Надежда на то, что по мере роста скорости обработки данных будет неуклонно расти и число решаемых интеллектуальных задач, не сбылась, поскольку рост производительности вычислителей, естественно, приводил к увеличению объемов обрабатываемых данных и соответствующему увеличению мощности множества алгоритмов их обработки.

Опыт применения вычислительных технологий показывает, что на любом экстенсивном пути их развития неизбежно возникают практически неразрешимые проблемы масштабирования. Учитывая приведенную в НС формулировку понятия ИИ, а именно ту ее часть, где сказано: «получая результаты, сопоставимые как минимум с результатами интеллектуальной деятельности человека», необходимо принять во внимание следующие количественные данные. В среднестатистическом мозге человека примерно 86 млрд нейронов и 150 трлн синапсов. Каждый синапс содержит около 1 тысячи молекулярных переключателей. Таким образом, если пересчитать вычислительные ресурсы мозга в условные логические элементы (ЛЭ), получится 150 кдрл, или $1{,}5 \times 10^{17}$ ЛЭ, которые для своей работы потребляют около 20 Вт. Если теперь сравнить удельные показатели энерговычислительной эффективности лидера списка TOP-500 суперкомпьютера SUMMIT, а именно величину 14,7 ГФлопс/Вт с аналогичным показателем мозга человека, то даже для лучших современных компьютеров результаты будут удручающие, и не только с точки зрения удельных затрат энергии, но и по количеству используемых ЛЭ.

Продолжая анализ возможности получения результатов «как минимум сопоставимых с результатами интеллектуальной деятельности человека», следует отметить, что современные микропроцессоры или программируемые вентильные матрицы (FPGA) содержат около 2×10^{10} ЛЭ, что как минимум на семь порядков меньше, чем число ЛЭ в мозге человека.

Судя по всему, именно здесь проходит «количественная» граница, разделяющая способности решать задачи класса NP методами «брутфорс» с помощью современных программируемых вычислителей и природные когнитивные системы, способные не только к вычислениям, но и к опережающей адаптации своего «вычислительного поля» [8].

Один из ключевых разделов ИИ — это теория и практическое применение распознавания образов. Достаточно отметить теорию локальных алгоритмов — одно из активно развивающихся направлений дискретной математики, в рамках которой доказаны фундаментальные теоремы единственности и мажорантности, исследована трудоемкость локальных алгоритмов для различных задач дискретной оптимизации. Большое число эвристических алгоритмов для решения плохо формализованных задач поддержки принятия решений, включая распознавание, классификацию и прогнозирование по прецедентам, описано в рамках единой параметрической модели, включая результаты по синтезу оптимальных по точности алгоритмов данной модели. Большое теоретическое и практическое значение для развития ИИ получило ведение и изучение алгебр над алгоритмами, исследование корректирующих свойств алгоритмов из алгебр, доказательство теорем об устойчивости и на их основе обоснование корректности «почти всюду» алгоритмов из алгебр [11–14].

Все большее значение в алгоритмах машинного обучения приобретают методы исследования операций, многокритериальной и стохастической оптимизации, алгоритмы точного дифференцирования функций, возникающих в сложных многошаговых процессах, заданных на графах, в задачах оптимизации систем с распределенными параметрами [15–17].

Обратные задачи акустики и сейсморазведки

Сейсмические волны проходят через исследуемые объекты, рассеиваются, отражаются и приносят информацию на поверхность Земли об искомых объектах. Обычно обратные задачи решаются методом минимизации целевого функционала.

На каждом этапе итерационного алгоритма минимизации функционала необходимо решать прямые задачи.

Одним из важнейших в современной теории обратных задач является класс многомерных обратных задач для гиперболических уравнений и систем, которые имеют большое практическое значение в сейсморазведке, акустике, электродинамике. На примере задачи определения плотности в уравнении акустики поясним необходимость применения методов обработки больших данных (тензорное разложение и стохастический подход) и машинного обучения (применение явных решений волновых уравнений в однородных средах) в многомерным случае.

Зададим последовательность прямых задач, которые описывают зондирование полупространства специальным набором источников.

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}^{(k)} = \Delta u^{(k)} - \nabla \ln \rho(x,y) \nabla u^{(k)}, \qquad x > 0, \qquad y \in R^2, \qquad t > 0, \qquad k = (k_1,k_2) \in Z^2,\\
&u^{(k)}|_{t<0} \equiv 0,\\
&u_x^{(k)}(+0,y,t) = e^{i(k,y)}\delta(t),
\end{aligned}
$$

Предположим, что на поверхности полупространства измеряются колебания $f(y,t)$.

$$
\begin{aligned}
&u^{(k)}(+0,y,t) = f^{(k)}(y,t),\\
&f^{(k)}(y,t) = \sum_m f_m^{(k)}(t) e^{i(m,y)}.
\end{aligned}
$$

Доказано, что обратная задача сводится к системе линейных интегральных уравнений (1),

$$
2\Phi^{(k)}(x,t) - \sum_m \int_{-x}^{x} f_m^{(k)}(t-s)\Phi^{(m)}(x,s)ds = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k,y)}}{\rho(0,y)} dy \tag{1}
$$

$$
t \in (-x,x), \qquad y_j \in (-\pi,\pi), \qquad j = 1,2, \qquad k \in Z^2.
$$

решая которую, мы сможем найти неизвестную плотность по формуле (2).

$$
\rho(x,y) = -\frac{\pi^2}{\rho(0,y)} \left[\sum_m \Phi^{(m)}(x,x-0) e^{-i(m,y)} \right]^{-2} \tag{2}
$$

После дискретизации системы (1) мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений с блочно-теплицевой матрицей большой размерности.

$$
2\Phi(x,t) - \sum_{|m|\le N} \int_{-x}^{x} F(t-s)\Phi(x,s)ds = G, \quad t \in (-x,x), \quad k_j = \overline{-N,N}, \quad j = 1,2.
$$

$$\Phi(x,t) = \left(\Phi^{(-N)}(x,t), \ldots, \Phi^{(0)}(x,t), \ldots, \Phi^{(N)}(x,t)\right)^T,$$

$$G = \left(G^{(-N)}, \ldots, G^{(0)}, \ldots, G^{(N)}\right)^T \quad G^{(k)} = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k,y)}}{\rho(0,y)} dy.$$

$$F(t) = \begin{vmatrix} f_{-N}^{(-N)'} & f_{-N+1}^{(-N)'} & \cdots & f_0^{(-N)'} & \cdots & f_N^{(-N)'} \\ f_{-N}^{(-N+1)'} & f_{-N+1}^{(-N+1)'} & \cdots & f_0^{(-N+1)'} & \cdots & f_N^{(-N+1)'} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{-N}^{(0)'} & f_{-N+1}^{(0)'} & \cdots & f_0^{(0)'} & \cdots & f_N^{(0)'} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{-N}^{(N)'} & f_{-N+1}^{(N)'} & \cdots & f_0^{(N)'} & \cdots & f_N^{(N)'} \end{vmatrix}$$

Отметим, что даже решение одной прямой многомерной задачи требует исключительно много вычислительных ресурсов. Например, в двумерном пространстве решение прямой задачи в области 2 км x 2 км, при шаге сетки = 1 метр, на кластере на одном узле (12 ядер, OpenMP, MPI) для одного источника занимает 30 минут на 12 ядрах.

Решение прямой задачи для 40 источников на одном узле занимает 20 часов. А решение трехмерной прямой задачи займет около 50 000 часов (около 6 лет). На этом этапе необходимо применять методы тензорного разложения [20–22], а также стохастический подход к работе с матрицами большой размерности [23].

Особенно важно эффективно использовать методы решения обратных задач и искусственного интеллекта для эффективного прогнозирования развития пандемии COVID-19 (см., например, [24, 25]).

Заключение

Анализ взаимосвязей теории обратных и некорректных задач и математических аспектов искусственного интеллекта показывает много общего в постановках и методах решения. Регуляризация и максимально возможное использование априорной информации при анализе и подборе параметров нейронных сетей, методы исследования идентифицируемости и чувствительности моделей все более эффективно применяются как в обратных задачах, так и в машинном обучении. Сказанное относится и к использованию природоподобных алгоритмов, методов анализа и обработки больших данных, алгоритмов усвоения данных, стохастической оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи (о первой международной молодежной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач»). *Сиб. электрон. матем. изв.* 2010;7:380–394.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1986.
3. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*. М.: Наука; 1978.
4. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. *Некорректные задачи математической физики и анализа*. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние; 1980.
5. Маслов В. П. Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационного процесса. *УМН.* 1968;23(3):183–184.
6. Королев И. *Российскому искусственному интеллекту нужны 180 миллиардов*. https://www.cnews.ru/news/top/2019-07-26_rossijskomu_iskusstvennomu_intellektu_nuzhno_180.
7. *Искусственный интеллект в России будут развивать за 5 миллиардов*. https://www.fontanka.ru/2021/03/29/69837446/.
8. Каляев И., Заборовский В. Искусственный интеллект: от метафоры к техническим решениям. *Control Engineering Россия*. 2019;5(83):26–31. Режим доступа: https://controleng.ru/wp-content/uploads/8326.pdf.

9. Иванова Ю. К. Применение инструментов планирования и прогнозирования в деятельности коммерческого банка с использованием машинного обучения. *Бенефициар*. 2019;46:22–26. Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39323684.
10. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи*. Новосибирск: Сибирское научное издательство; 2008. 450 с.
11. Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. *Проблемы кибернетики*. 1978;33:5–68.
12. Журавлев Ю. И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I. *Кибернетика*. 1977;4:5–17.
13. Журавлев Ю. И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. III. *Кибернетика*. 1978;2:35–43.
14. Журавлев Ю. И., Рязанов В. В., Сенько О. В. *Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения*. М.: Фазис; 2006. 147 с.
15. Евтушенко Ю. Г., Голиков А. И. Метод решения задач линейного программирования большой размерности. *Докл. РАН*. 2004;397(6):727–732.
16. Евтушенко Ю. Г., Брежнева О. А., Третьяков А. А. Новые численные методы и некоторые прикладные аспекты теории p-регулярности. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*. 2006;46(11):1987–2000.
17. Евтушенко Ю. Г., Малкова В. У., Станевичюс А. А. Распараллеливание процесса поиска глобального экстремума. *Автоматика и телемеханика*. 2007;5:46–58.
18. Koptyug I. V. , Kabanikhin S. I., Iskakov K. T., Fenelonov V. B., Khitrina L. Y., Sagdeev R. Z., Parmon V. N. A Quantitative NMR Imaging Study of Mass Transport in Porous Solids during Drying. *Chemical Engineering Science*. 2000;55(9):1559–1571.
19. Эпов М. И., Миронов В. Л., Музалевский К. В., Кабанихин С. И. Применение дискретных источников для расчёта полей СШП импульсного электромагнитного дипольного зонда в средах нефтегазового коллектора. *Изв. вузов. Физика*. 2010;53(9–3):257–262.
20. Тыртышников Е. Е. Тензорные аппроксимации матриц, порожденных асимптотически гладкими функциями. *Матем. сб.* 2003;194(6):147–160.
21. Tyrtyshnikov E., Oseledets I. Breaking the Curse of Dimensionality, or How to Use SVD in Many Dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.* 2009;31(5):3744–3759.
22. Kabanikhin S. I., Novikov N. S., Oseledets I. V., Shishlenin M. A. Fast Toeplitz Linear System Inversion for Solving Two-Dimensional Acoustic Inverse Problem. *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2015;23(6):687–700.
23. Kabanikhin S. I., Sabelfeld K. K., Novikov N. S., Shishlenin M. A. Numerical Solution of an Inverse Problem of Coefficient Recovering for a Wave Equation by a Stochastic Projection Methods. *Monte Carlo Methods and Applications*. 2015;21(3):189–203.
24. Kabanikhin S. I., Krivorotko O. I. Mathematical Modeling of the Wuhan COVID-2019 Epidemic and Inverse Problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2020;60(11):1889–1899.
25. Бетелин В. Б., Галкин В. А., Ряховский А. В. Точечные и распределенные модели распространения коронавирусной инфекции. *Успехи кибернетики*. 2021;2(2):12–20.