

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-1-1

ТЕСТИРОВАНИЕ МАГНЕТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КОДА НА ЗАДАЧАХ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ И ГЕОДИНАМО

И. В. Бычин

Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация, igor-bychin@yandex.ru

Аннотация: в рамках метода контрольного объема разработан программный код для численного решения задач неидеальной магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости на структурированных разнесенных сетках в сферических координатах. При дискретизации уравнения индукции магнитного поля использован алгоритм ограниченного переноса (Constrained Transport Algorithm) и схема QUICK с методом отложенной коррекции для аппроксимации конвективных членов. Для решения уравнений гидродинамики использован алгоритм SIMPLER. Программный код разработан для моделирования естественной конвекции и гидромагнитного динамо во вращающемся шаре или сферическом слое. Представлены результаты решения тестовых задач естественной конвекции и геодинамо с вакуумными граничными условиями, демонстрирующие достаточно точное соответствие результатам эталонных расчетов. Программное обеспечение разработано для ускорителей вычислений, поддерживающих технологию CUDA, с использованием набора расширений к языку программирования Фортран.

Ключевые слова: естественная конвекция, гидромагнитное динамо, сферическая геометрия.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-04-60123).

Для цитирования: Бычин И. В. Тестирование магнетогидродинамического кода на задачах естественной конвекции и геодинамо. *Успехи кибернетики*. 2021;2(1):6–13. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-1-1.

TESTING THE MAGNETOHYDRODYNAMIC ANALYSIS SOFTWARE WITH NATURAL CONVECTION AND GEODYNAMO PROBLEMS

Igor V. Bychin

*Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”,
Surgut State University, Surgut, Russian Federation, igor-bychin@yandex.ru*

Abstract: using the control volume method we developed the software for the numerical solution of viscous incompressible fluid resistive magnetohydrodynamics problems on structured staggered meshes in spherical coordinates. The constrained transport algorithm and the QUICK method with delayed correction for the approximation of the convective terms were used for the discretization of the magnetic field induction equation. The SIMPLER algorithm was applied to solving the hydrodynamic equations. We developed software for modeling natural convection and the hydromagnetic dynamo in a rotating sphere or spherical shell. We proposed an algorithm for the numerical solution of the geodynamo problem with vacuum boundary conditions. The results of solving natural convection and geodynamo benchmark problems with vacuum boundary conditions are presented; they demonstrate a fairly accurate agreement with the reference calculations. The software supports CUDA-enabled accelerators and uses a set of extensions to the Fortran programming language.

Keywords: natural convection, hydromagnetic dynamo, spherical geometry.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project #20-04-60123).

Cite this article: Bychin I. V. Testing the Magnetohydrodynamic Analysis Software with Natural Convection and Geodynamo Problems. *Russian Journal of Cybernetics*. 2021;2(1):6–13. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-1-1.

Введение

Последние 30 лет международными и отечественными исследовательскими группами интенсивно разрабатываются новые и усовершенствуются существующие магнитогидродинамические вычислительные коды (МГД-коды) для математического моделирования гидромагнитного динамо. Тестирование и верификация таких кодов проводится на ряде стандартных бенчмарк-задач естественной конвекции и геодинамо [1–4]. На сегодняшний день можно выделить пятнадцать наиболее известных и верифицированных МГД-кодов, таких как MagIC, UCSC code, Rayleigh, SPmodel, Calypso и т. д. [4]. Увеличение производительности и доступности вычислительной техники позволило с помощью вышеупомянутых кодов получить ряд новых результатов вычислительных экспериментов по изучению геодинамо и существенно продвинуться в понимании процессов, формирующих магнитное поле Земли [5–7]. Тем не менее остаются вопросы о реалистичности полученных результатов, т. к. значения используемых параметров в моделях далеки от истинных. В подавляющем большинстве МГД-кодов, используемых для моделирования геодинамо, реализованы спектральные и псевдоспектральные методы, что обусловлено лучшей скоростью сходимости и вычислительной эффективностью для сферической геометрии. Несмотря на преимущества таких методов, для численной реализации более сложных и реалистичных математических моделей геодинамо актуально использование универсальных и стандартных для вычислительной гидродинамики конечно-объемных методов [8–9]. Особенностью задач планетарного динамо и в частности геодинамо является необходимость использования так называемых вакуумных граничных условий для уравнения магнитной индукции. При постановке задач с вакуумными граничными условиями магнитное поле считается всюду непрерывным, а в вакууме (диэлектрике) — потенциальным и соленоидальным [10]. Для того чтобы получить однозначные решения уравнения индукции, необходимо на границе задать тангенциальные составляющие магнитного поля. Нормальная составляющая определяется непосредственно из уравнения индукции. В работе [11] приведено описание алгоритма реализации вакуумных граничных условий. Таким образом, разработка МГД-кодов нового поколения остается актуальной задачей для моделирования гидромагнитного динамо в астрофизике и геодинамике с точки зрения реализации в них более реалистичных моделей и использования гибридных вычислительных систем с GPU как наиболее перспективных для увеличения вычислительной производительности.

В данной работе представлены результаты тестирования ранее разработанного программного комплекса CVMHD code (Control Volume MagnetoHydroDynamics) [11–12] на двух тестовых задачах, одна из которых — задача естественной конвекции во вращающемся шаре, а вторая — задача геодинамо в сферическом слое с внутренним диэлектрическим твердым ядром. Комплекс предназначен для численного решения задач неидеальной магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости на гибридных вычислительных системах с GPU. Программный код написан на языке Фортран с использованием технологии CUDA. В CVMHD code реализованы следующие основные численные методы и алгоритмы: метод контрольного объема для сферических координат на структурированных разнесенных сетках, схема QUICK и метод отложенной коррекции для аппроксимации уравнения индукции магнитного поля, алгоритм ограниченного переноса [13–14] для решения проблемы численного магнитного заряда, алгоритм SIMPLER для расчета поля течения жидкости.

Тест 1. Задача естественной конвекции в равномерно вращающемся шаре [1]

В тесте 1 рассматривается вращающийся вокруг оси z с угловой скоростью $\Omega = \Omega \mathbf{e}_z$ шар радиуса r_0 , заполненный вязкой несжимаемой теплопроводящей жидкостью. Граница шара изотермическая. Сила тяжести $\mathbf{g} = g \frac{\mathbf{r}}{r_0}$ направлена к центру шара и линейно зависит от радиуса. Предполагается, что влияние центробежной силы пренебрежимо мало. Задача решается в сферической системе координат (r, θ, φ) , равномерно вращающейся со скоростью Ω . Плотность тепловых источников в шаре постоянна.

Система уравнений естественной конвекции в приближении Буссинеска может быть записана в безразмерной форме, соответствующей работе [1]:

$$0 \leq r < 1, \tau > 0 :$$

$$E \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u} \right) + \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + \nabla P = Ra^* \mathbf{r} \Theta, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\mathbf{u} \nabla \Theta) = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \Theta + S, \quad (S = \text{const}). \quad (3)$$

Здесь τ , \mathbf{r} , \mathbf{u} , P , Θ – безразмерные время, радиус-вектор точки, скорость жидкости, давление и температура соответственно. Безразмерные параметры задачи: $E = \frac{\nu}{2\Omega r_o^2}$ – число Экмана, $Pr = \frac{\nu}{k}$ – число Прандтля, $Ra^* = \frac{g \alpha \beta r_o^3}{2\Omega k}$ – модифицированное число Рэлея, где ν – кинематическая вязкость, r_o – радиус шара, k – коэффициент теплопроводности, g – ускорение свободного падения, α – коэффициент теплового расширения, Ω – скорость вращения шара, $\beta = \frac{s}{3k}$ (s – плотность тепловых источников [1]).

Граничные условия ($r = 1$):

$$\Theta = 0, u_r = 0,$$

$$r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta = 0, r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - u_\varphi = 0 \text{ (условия отсутствия касательных напряжений)}.$$

Начальные условия ($\tau = 0$):

$$\mathbf{u} = 0,$$

$$\Theta = \frac{1}{2}(1 - r^2) + \frac{10^{-5}}{8} \sqrt{\frac{35}{\pi}} r^3 (1 - r^2) (\cos 3\varphi + \sin 3\varphi) \sin^3 \theta.$$

Значения параметров теста 1: $E = 3 \cdot 10^{-4}$, $Pr = 1$, $Ra^* = 95$.

В тестовом расчете вычислялись интегральные величины: кинетическая энергия $E_{kin} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{u}^2 dV$ и частота дрейфа f_d установившегося квазистационарного решения, в котором энергия течения постоянна, структура конвективных ячеек неизменна и как целое вращается (дрейфует) вокруг оси z с постоянной угловой скоростью.

Таблица 1

Результаты расчета для тестовой задачи естественной конвекции в шаре ($\tau = 7$)

Результаты	E_{kin}	f_d
Эталонные значения теста 1 из [1]	29,1206	12,3862
MJ code	29,12068	12,38619
H code	29,12053	12,3862
S code	29,13501	12,38648
CVMHD code сетка: $82 \times 122 \times 122$ шаг: $\Delta\tau = 5 \cdot 10^{-6}$	29,1088 (0,04 %)	12,2592 (1,03 %)

Полученные количественные результаты сравнивались с данными, представленными в работе [1], в которой для решения тестовой задачи использовались шесть вычислительных кодов: MJ code, H code, S code, TSH code, SB code, A code, разработанных в рамках спектрального или псевдоспектрального метода, а также предложены эталонные значения интегральных величин: E_{kin} , f_d . Приведенные в табл. 1 результаты сравнения (в круглых скобках указаны отклонения от эталонных значений) демонстрируют достаточно хорошее соответствие. Качественное сопоставление полученного решения (рис. 1–3) также показывает хорошую согласованность результатов [1] с данной работой. На рис. 1 представлена зависимость от времени кинетической энергии, которая иллюстрирует процесс выхода решения на установившийся квазистационарный режим. Рис. 2а, 2б, 3 представляют распределения радиальной, азимутальной компонент скорости и температуры в экваториальном сечении в квазистационарном режиме. На рис. 3 продемонстрирована трехлучевая симметрия установившегося течения.

Тест 2. Задача геодинamo в сферическом слое с вакуумными граничными условиями [2]

В качестве теста рассматривается одна из задач (case 1), решенных в работе [2]. В [2] представлены результаты решения задач конвекции и геодинamo шестью различными МГД-кодами, разработанными группами исследователей из Германии, Франции, Великобритании, США и Японии. В данных

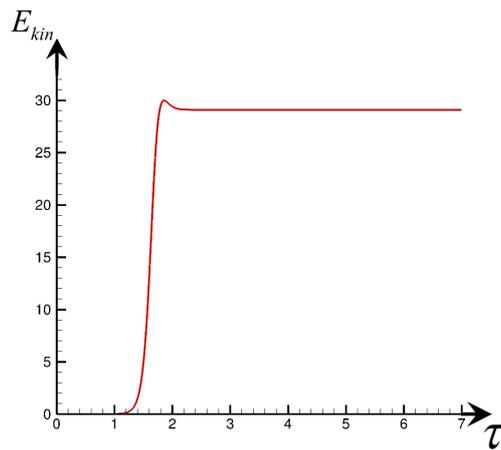


Рис. 1. График зависимости кинетической энергии E_{kin} от времени

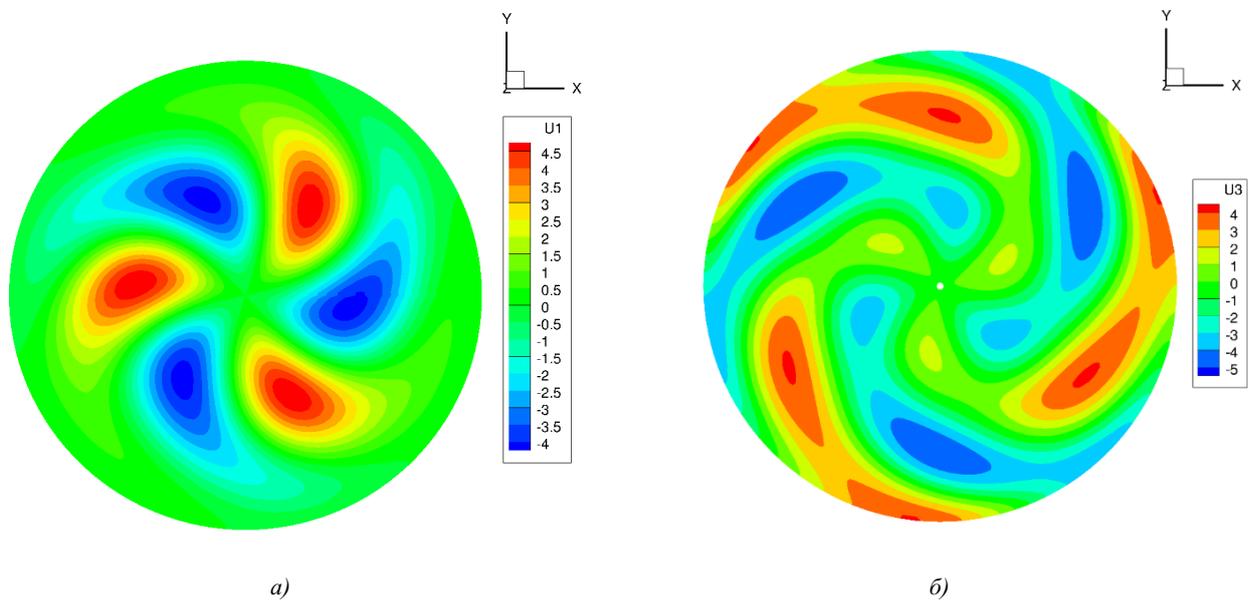


Рис. 2. Распределение компонент скорости в экваториальном сечении: а) радиальная компонента скорости u_r ; б) азимутальная компонента скорости u_φ

вычислительных кодах использованы спектральные и псевдоспектральные методы. Результаты решения тестовых задач конвекции и геодинамики [2], полученные различными МГД-кодами, хорошо согласуются между собой, что позволяет говорить о высокой степени их достоверности. Далее приводится постановка и математическая модель тестовой задачи (case 1), при этом используются оригинальные обозначения из [2].

Рассматривается вращающийся вокруг оси z с угловой скоростью $\Omega = \Omega e_z$ сферический слой, заполненный вязкой несжимаемой электропроводящей жидкостью. Отношение внутреннего радиуса сферического слоя r_i к внешнему радиусу r_o равно 0.35. Температуры на границах фиксированы, ΔT – разность температур на внутренней и внешней границах слоя ($\Delta T > 0$). Используется приближение Буссинеска. Сила тяжести направлена к центру слоя и линейно зависит от радиуса. В качестве характерного размера выбирается толщина слоя $H = r_o - r_i$, что делает безразмерные радиусы равными $r_o = 20/13$ и $r_i = 7/13$.

Система уравнений магнитной гидродинамики в равномерно вращающейся системе отсчета в безразмерной форме имеет вид:

$$r_i < r < r_o, \tau > 0 :$$

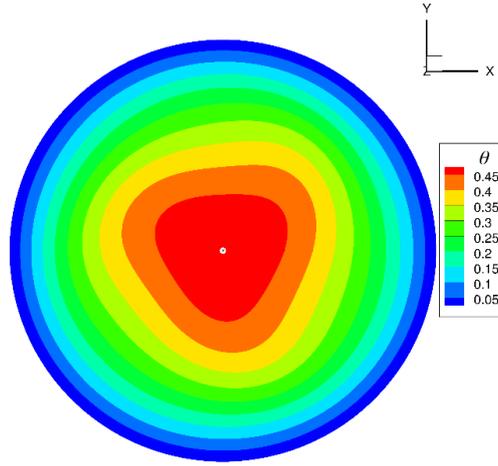


Рис. 3. Распределение температуры Θ в экваториальном сечении

$$E \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u} \right) + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + \nabla P = Ra^* \frac{\mathbf{r}}{r_o} \Theta + \frac{1}{Pm} \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} - \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Pm} \nabla^2 \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\mathbf{u} \nabla) \Theta = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \Theta, \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (7)$$

Здесь τ , \mathbf{r} , \mathbf{u} , P , Θ , \mathbf{B} — безразмерные время, радиус-вектор точки, скорость жидкости, давление, температура и вектор индукции магнитного поля соответственно. Безразмерные параметры задачи: $E = \frac{\nu}{\Omega H^2}$ — число Экмана, $Pr = \frac{\nu}{k}$ — число Прандтля, $Ra^* = \frac{\alpha g_0 \Delta T H}{\nu \Omega}$ — модифицированное число Рэлея, $Pm = \frac{\nu}{\eta}$ — магнитное число Прандтля, где ν — кинематическая вязкость, H — толщина сферического слоя, k — коэффициент теплопроводности, g_0 — ускорение свободного падения на внешнем радиусе, α — коэффициент теплового расширения, Ω — скорость вращения сферического слоя, ΔT — разность температур на внутренней и внешней границах слоя.

Граничные условия для поля температур Θ и поля скоростей \mathbf{u} :

$$r = r_i : \Theta = 1, \mathbf{u} = 0;$$

$$r = r_o : \Theta = 0, \mathbf{u} = 0.$$

В областях, заполненных изолятором ($0 \leq r < r_i$, $r > r_o$), $\mathbf{u} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{B} = \text{grad } \psi$. Потенциалы в диэлектрических областях являются решениями задач Неймана на уравнение Лапласа:

$$\begin{aligned} 0 \leq r < r_i : & \quad \Delta \psi^{(i)} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r} \right|_{r=r_i} = B_r, \\ r > r_o : & \quad \Delta \psi^{(o)} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi^{(o)}}{\partial r} \right|_{r=r_o} = B_r, \end{aligned}$$

где $\psi^{(o)}$ — регулярна на бесконечности.

Тогда тангенциальные составляющие магнитного поля на границах сферического слоя определяются по формулам (вакуумные граничные условия):

$$r = r_i : B_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \theta} \right)_{r=r_i}, B_\varphi = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \varphi} \right)_{r=r_i};$$

$$r = r_o : B_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(o)}}{\partial \theta} \right)_{r=r_o}, B_\varphi = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(o)}}{\partial \varphi} \right)_{r=r_o}.$$

Начальные условия ($\tau = 0$):

$$\mathbf{u} = 0, \Theta = \frac{r_o r_i}{r} - r_i + \frac{21}{\sqrt{17920\pi}} (1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6) \sin^4 \theta \cos 4\varphi, (x = 2r - r_i - r_o)$$

$$B_r = \frac{5}{8} \left(8r_o - 6r - 2\frac{r_i^4}{r^3} \right) \cos \theta,$$

$$B_\theta = -\frac{5}{8} \left(8r_o - 9r + \frac{r_i^4}{r^3} \right) \sin \theta,$$

$$B_\varphi = 5 \sin(\pi(r - r_i)) \sin 2\theta.$$

Значения параметров тестовой задачи: $E = 10^{-3}$, $Pr = 1$, $Pm = 5$, $Ra^* = 100$.

Количественное сравнение с результатами, представленными в работах [2, 3], проводилось по значениям температуры Θ , компоненты скорости u_φ и компоненты вектора магнитной индукции B_θ в точке с координатами $(r^*, \theta^*, \varphi^*)$: $r^* = (r_o + r_i)/2$; $\theta^* = \pi/2$, где координата φ^* определяется условиями: $u_r = 0$ и $\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} > 0$. Также вычислялись средние плотности кинетической энергии жидкости $E_{kin} = \frac{1}{2V_G} \int_G \mathbf{u}^2 dV$ (G – сферический слой, V_G – объем сферического слоя), магнитной энергии $E_{mag} = \frac{1}{2V_G E P m} \int_G \mathbf{B}^2 dV$ и скорость дрейфа ω установившегося квазистационарного решения. В табл. 2 представлены значения E_{kin} , E_{mag} , Θ , u_φ , B_θ , ω , полученные в данной работе (CVMHD code) на двух расчетных сетках, и соответствующие значения, предложенные в [2, 3], как эталонные для рассматриваемой задачи. В круглых скобках указаны отклонения от эталонных значений теста 2. Кроме того, в табл. 2 приведены результаты теста 2, полученные авторами работы [3], с использованием следующих МГД-кодов: MagIC, GeoFEM, Calypso.

Таблица 2

Результаты расчета для тестовой задачи геодинамо

Результаты	E_{kin}	E_{mag}	Θ	u_φ	B_θ	ω
Эталонные значения теста [2, 3]	30,773	626,41	0,37338	-7,6250	-4,9289	-3,1017
MagIC [3]	30,7743	626,409	0,373416	0,373416	-4,92877	-3,10157
GeoFEM [3]	31,404	632,98	0,37514	-7,58122	-4,99065	-3,12018
Calypso [3]	30,8475	628,31	0,373289	-7,61863	-4,94572	-3,1098
CVMHD code сетка: $52 \times 102 \times 102$	30,597 (0,57 %)	632,65 (1,00 %)	0,36892 (1,19 %)	-7,5445 (1,06 %)	-4,8727 (1,14 %)	-3,1337 (1,03 %)
CVMHD code сетка: $52 \times 142 \times 142$	30,474 (0,97 %)	628,16 (0,28 %)	0,37015 (0,87 %)	-7,5602 (0,85 %)	-4,8752 (1,10 %)	-3,0635 (1,23 %)

На рис. 4 представлены зависимости от времени средней плотности кинетической и магнитной энергий, демонстрирующие процесс выхода решения на установившийся квазистационарный режим. На рис. 5–6 приведены распределения изолинии радиальных компонент вектора магнитной индукции и скорости соответственно. Качественное и количественное сравнение полученных в тесте 2 результатов дает хорошее соответствие с работами [2, 3].

Заключение

Представленные в данной статье результаты тестов показывают достаточно хорошее соответствие эталонным решениям и тем самым демонстрируют возможность использования разработанного комплекса программ для математического моделирования трехмерных магнитогидродинамических течений и в частности задач планетарного динамо.

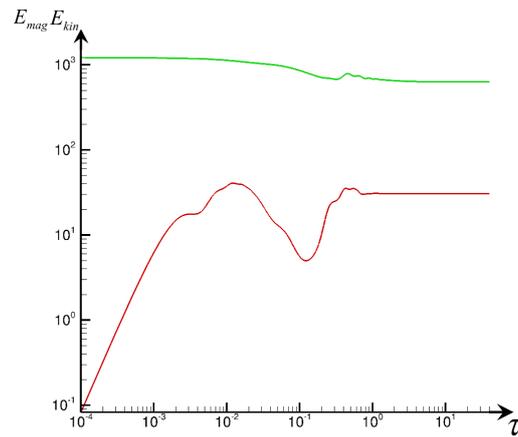


Рис. 4. Графики зависимостей средней плотности кинетической E_{kin} (красная кривая) и магнитной E_{mag} энергий (зеленая кривая) от времени

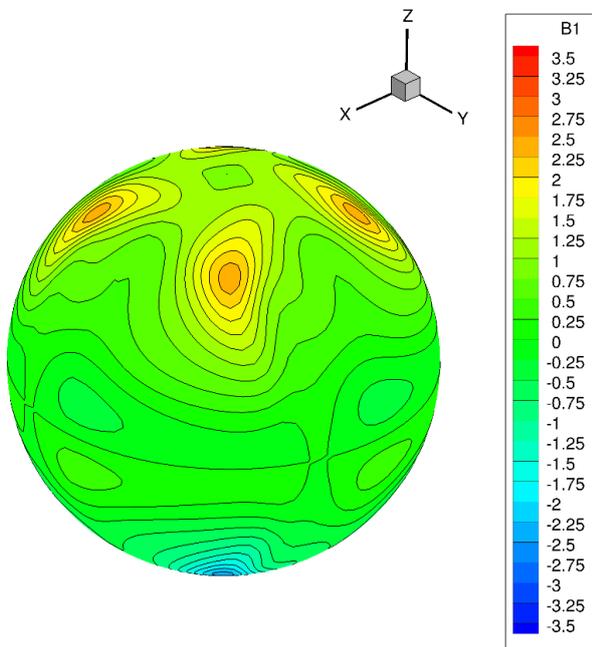


Рис. 5. Изолинии и распределение радиальной компоненты вектора магнитной индукции B_r на внешней границе сферического слоя

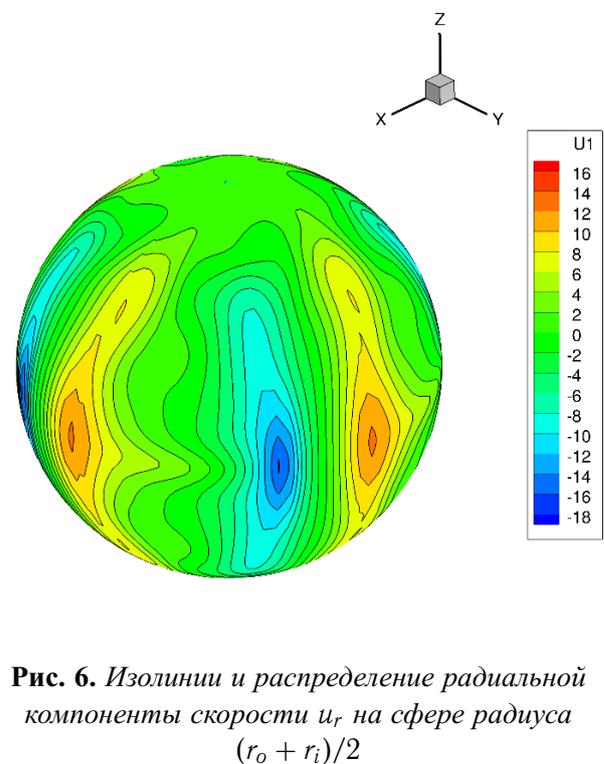


Рис. 6. Изолинии и распределение радиальной компоненты скорости u_r на сфере радиуса $(r_o + r_i)/2$

ЛИТЕРАТУРА

1. Marti P., Schaeffer N., Hollerbach R., Cébron D., Nore C., Luddens F., Guermond J.-L., Aubert J., Takehiro S., Sasaki Y., Hayashi Y.-Y., Simatev R., Busse F., Vantieghem S., Jackson A. Full Sphere Hydrodynamic and Dynamo Benchmarks. *Geophysical Journal International*. 2014;197(1):119–134. DOI: 10.1093/gji/ggt518.
2. Christensen U. R., Aubert J., Cardin P., Dormy E., Gibbons S., Glatzmaier G. A., Grote E., Honkura Y., Jones C., Kono M., Matsushima M., Sakuraba A., Takahashi F., Tilgner A., Wicht J., Zhang K. A Numerical Dynamo Benchmark. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2001;128(1–4):25–34. DOI: 10.1016/S0031-9201(01)00275-8.
3. Jackson A., Sheyko A., Marti P., Tilgner A., Cébron D., Vantieghem S., Simatev R., Busse F., Zhan X., Schubert G., Takehiro S., Sasaki Y., Hayashi Y.-Y., Ribeiro A., Nore C., Guermond J.-L. A Spherical Shell Numerical Dynamo Benchmark with Pseudo-Vacuum Magnetic Boundary Conditions. *Geophysical Journal International*. 2014;196(2):712–723. DOI: 10.1093/gji/ggt425.
4. Matsui H. et al. Performance Benchmarks for a Next Generation Numerical Dynamo Model. *Geochem.*

- Geophys. Geosyst.* 2016;17(5):1586–1607. DOI: 10.1002/2015GC006159.
5. Glatzmaier G. A., Roberts P. H. A Three-Dimensional Self-Consistent Computer Simulation of a Geomagnetic Field Reversal. *Nature.* 1995;377:203–209. DOI: 10.1038/377203a0.
 6. Olson P. L., Glatzmaier G. A., Coe R. S. Complex Polarity Reversals in a Geodynamo Model. *Earth Planet. Sci. Lett.* 2011;304:168–179. DOI: 10.1016/j.epsl.2011.01.031.
 7. Olson P., Driscoll P., Amit H. Dipole Collapse and Reversal Precursors in a Numerical Dynamo. *Phys. Earth. Planet. Inter.* 2009;173:121–140. DOI: 10.1016/j.pepi.2008.11.010.
 8. Vantighem S., Sheyko A., Jackson A. Applications of a Finite-Volume Algorithm for Incompressible MHD Problems. *Geophysical Journal International.* 2016;204(2):1376–1395. DOI: 10.1093/gji/ggv527.
 9. Harder H., Hansen U. A Finite-Volume Solution Method for Thermal Convection and Dynamo Problems in Spherical Shells. *Geophysical Journal International.* 2005;161(2):522–532. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2005.02560.x.
 10. Jones C. A. Convection-Driven Geodynamo Models. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 2000;358:873–897. DOI: 10.1098/rsta.2000.0565.
 11. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Численное решение начальнокраевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля в шаре. *Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика.* 2020;64:15–30. DOI: 10.17223/19988621/64/2.
 12. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Исследование установившихся режимов естественной конвекции во вращающемся сферическом слое. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2016;1:48–59.
 13. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений.* М.: ФИЗМАТЛИТ; 2001. 608 с.
 14. Iskakov A. B., Descombes S., Dormy E. An Integro-Differential Formulation for Magnetic Induction in Bounded Domains: Boundary Element-Finite Volume Method. *J. Comput. Phys.* 2004;197(2):540–554. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.12.008.