

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА–ПУАЗЕЙЛЯ С ТРЕНИЕМ РЭЛЕЯ

К. В. Губарева^{1,a}, Е. Ю. Просвирыков^{2,3,b}

¹ Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация

² Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация

³ Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация

^a ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>, ✉ r.kristina2017@mail.ru

^b ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>, evgen_pros@mail.ru

Аннотация: для уравнений Навье–Стокса с линейным трением Рэлея построено новое точное решение. Оно описывает трехмерное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале и обобщает классические течения Куэтта и Пуазейля. Продольная компонента скорости линейно зависит от одной поперечной координаты, а коэффициенты этой зависимости экспоненциально изменяются вдоль другой. На примере воды проведен численный анализ при различных значениях коэффициента трения Рэлея. Исследовано влияние параметра трения на толщину пристеночного слоя и на соотношение вязкой и рэлеевской диссипации энергии. Установлено, что при малых значениях коэффициента трения течение близко к классическим аналогам. При больших значениях формируются тонкие пограничные слои, а диссипация за счет трения Рэлея становится доминирующей. Полученное решение расширяет семейство точных решений гидродинамики и может применяться при моделировании течений в пористых средах, фильтрационных процессах, а также в задачах геофизической гидродинамики.

Ключевые слова: течение Куэтта–Пуазейля, трение Рэлея, точное решение, уравнения Навье–Стокса, пограничный слой, диссипация энергии, неоднородное течение, аналитическая гидродинамика.

Для цитирования: Губарева К. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение уравнений неоднородного течения Куэтта–Пуазейля с трением Рэлея. *Успехи кибернетики*. 2026;7(2):66–73.

Поступила в редакцию: 23.03.2026. *В окончательном варианте:* 11.05.2026.

EXACT SOLUTION OF THE EQUATIONS FOR INHOMOGENEOUS COUETTE–POISEUILLE SHEAR FLOW WITH RAYLEIGH FRICTION

K. V. Gubareva^{1,a}, E. Yu. Prosviryakov^{2,3,b}

¹ Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

² Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

³ Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation

^a ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>, ✉ r.kristina2017@mail.ru

^b ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>, evgen_pros@mail.ru

Abstract: we obtained a new exact solution of the modified Navier–Stokes equations with linear Rayleigh friction. The solution describes a three-dimensional steady flow of a viscous incompressible fluid in a plane channel and generalizes the classical Couette and Poiseuille flows. The longitudinal velocity component varies linearly with one transverse coordinate, while the corresponding coefficients vary exponentially with the second transverse coordinate. Using water as an example, we performed a numerical analysis for different values of the Rayleigh friction coefficient. We investigated the effect of the friction parameter on the thickness of the near-wall layer and on the ratio between viscous dissipation and energy dissipation caused by Rayleigh friction. The results show that at low values of the friction coefficient, the flow remains close to the classical solutions. At high values of the friction coefficient, thin boundary layers form, and Rayleigh friction becomes the dominant dissipation mechanism. The proposed solution extends the family of exact solutions in fluid dynamics and can be used to model flows in porous media, filtration processes, and geophysical fluid dynamics problems.

Keywords: Couette–Poiseuille shear flow, Rayleigh friction, exact solution, Navier–Stokes equations, boundary layer, energy dissipation, inhomogeneous flow, theoretical hydrodynamics.

Cite this article: Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu. Exact Solution of the Equations for Inhomogeneous Couette–Poiseuille Shear Flow with Rayleigh Friction. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(2):66–73.

Original article submitted: 23.03.2026.

Revision submitted: 11.05.2026.

Введение

Точные решения уравнений гидродинамики важны и для теории, и для проверки численных методов [1, 2]. Это, например, течение Пуазейля в трубах или течение Куэтта между пластинами. Эти решения на протяжении десятилетий служат базой для изучения вязких течений [3, 4]. На их основе проверяют экспериментальные установки и вычислительные алгоритмы [5].

В реальных условиях к уравнениям Навье–Стокса нередко добавляются дополнительные диссипативные члены. Один из них — объемное трение, пропорциональное скорости. Эту модель предложил Рэлей [6]. В геофизической гидродинамике ее применяют для учета турбулентного сопротивления [7], а в задачах фильтрации и течений в пористых средах — для описания сопротивления [8, 9]. Позже модель распространили и на другие задачи, где важно распределенное трение [10, 11]. Линейное трение Рэля сохраняет линейность уравнений, однако существенно видоизменяет структуру решений [12].

Класс точных решений, объединяющих эффекты Пуазейля (градиент давления), Куэтта (движение стенок) и объемного трения, остается малоизученным [13–16]. На первый взгляд, задача кажется простой, но это не так. Особый интерес представляют решения, в которых продольная скорость линейно зависит от одной поперечной координаты, а коэффициенты этой линейной формы изменяются вдоль другой поперечной координаты [17, 18]. Такая структура характерна для слоистых течений и течений с поперечным сдвигом. Для классических уравнений Навье–Стокса подобные решения известны. Однако их обобщение на случай трения Рэля практически не рассматривалось. Между тем трехмерные эффекты могут быть существенны, например, в каналах с неоднородными граничными условиями по ширине или при наличии вынужденной поперечной циркуляции [19–21].

В прикладных задачах — фильтрация, пористые среды, крупномасштабная динамика атмосферы и океана — трение Рэля часто доминирует над вязкостью. Аналитические модели, учитывающие объемное трение, остаются, в основном, одномерными. Точные трехмерные решения в таких постановках практически отсутствуют.

Отсутствие таких решений ограничивает возможности верификации численных моделей, предназначенных для расчета течений с распределенным сопротивлением. Кроме того, без аналитических примеров трудно оценить, как перераспределяется диссипация между вязкостью и трением Рэля при изменении параметров. Поэтому построение и исследование точного решения в данной постановке представляет не только теоретический, но и прикладной интерес. Фундаментальные вопросы существования и единственности решений уравнений Навье–Стокса обсуждаются в [22–26].

Цель — получение нового точного решения уравнений Навье–Стокса с линейным трением Рэля, описывающего неоднородное течение Куэтта–Пуазейля в плоском канале. Для достижения этой цели решаются следующие задачи: вывод аналитического решения; исследование условий разрешимости и ограничений; анализ влияния параметра трения Рэля на структуру течения; проведение численного эксперимента для изучения разных режимов; исследование пограничного слоя и диссипации энергии.

Постановка задачи и аналитическое решение

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале. Течение описывается модифицированными уравнениями Навье–Стокса с линейным членом трения Рэля [7, 27]:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 V_x - \lambda V_x, \quad (1)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 V_y - \lambda V_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где ν — кинематическая вязкость, $\lambda > 0$ — коэффициент трения Рэлея, ρ — плотность жидкости.

Решение будем искать в классе, который обобщает гибридное течение Куэтта–Пуазейля. Предположим, что продольная скорость линейно зависит от поперечной координаты y , а коэффициенты этого разложения могут изменяться в направлении z , перпендикулярном плоскости течения [17, 18]:

$$V_x(x, y, z) = U(z) + a(z)y, \quad V_y(x, y, z) = V(z), \quad V_z \equiv 0. \quad (4)$$

Давление примем линейной функцией горизонтальных координат:

$$P(x, y) = P_0 + P_1x + P_2y, \quad (5)$$

где P_1, P_2 — постоянные градиенты давления.

Подставим эти выражения в уравнения (1) — (3). Условие несжимаемости выполняется тождественно. После разделения слагаемых, зависящих от y , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$V(z)a(z) = -\frac{P_1}{\rho} + \nu U''(z) - \lambda U(z), \quad (6)$$

$$0 = \nu a''(z) - \lambda a(z), \quad (7)$$

$$0 = -\frac{P_2}{\rho} + \nu V''(z) - \lambda V(z). \quad (8)$$

Введем параметр $k = \sqrt{\lambda/\nu}$. Решения уравнений (7) и (8) запишем через экспоненты [20, 28]:

$$a(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}, \quad (9)$$

$$V(z) = Ce^{kz} + De^{-kz} - \frac{P_2}{\lambda\rho}. \quad (10)$$

Подставим (9) и (10) в уравнение (6). Получим уравнение для $U(z)$:

$$\nu U'' - \lambda U = -\frac{P_1}{\rho} - \left(ACe^{2kz} + (AD + BC) + BDe^{-2kz} \right). \quad (11)$$

Найдем его общее решение:

$$U(z) = Ee^{kz} + Fe^{-kz} - \frac{AC}{3\lambda}e^{2kz} - \frac{BD}{3\lambda}e^{-2kz} + \frac{P_1/\rho + AD + BC}{\lambda}. \quad (12)$$

Точное решение системы (1) — (3) представим в виде:

$$a(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}, \quad V(z) = Ce^{kz} + De^{-kz} - \frac{P_2}{\lambda\rho},$$

$$U(z) = Ee^{kz} + Fe^{-kz} - \frac{AC}{3\lambda}e^{2kz} - \frac{BD}{3\lambda}e^{-2kz} + \frac{P_1/\rho + AD + BC}{\lambda}, \quad (13)$$

$$V_x(x, y, z) = U(z) + a(z)y, \quad V_y(x, y, z) = V(z),$$

$$P(x) = P_0 + P_1x,$$

где $A, B, C, D, E, F, P_0, P_1$ — произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий.

Рассмотрим канал с нижней стенкой при $z = 0$ и верхней при $z = H$. Зададим условия прилипания:

$$V_x(x, y, 0) = U_0 + a_0y, \quad V_y(x, y, 0) = V_0, \quad V_x(x, y, H) = U_H + a_Hy, \quad V_y(x, y, H) = V_H, \quad (14)$$

где $U_0, a_0, V_0, U_H, a_H, V_H$ — заданные константы.

Подставим решение (13) в условия (14). Получим систему для постоянных:

$$\begin{aligned} A + B = a_0, \quad Ae^{kH} + Be^{-kH} = a_H, \quad C + D = V_0 + \frac{P_2}{\lambda\rho}, \quad Ce^{kH} + De^{-kH} = V_H, \\ E + F - \frac{AC + BD}{3\lambda} + \frac{P_1/\rho + AD + BC}{\lambda} = U_0, \\ Ee^{kH} + Fe^{-kH} - \frac{AC}{3\lambda}e^{2kH} - \frac{BD}{3\lambda}e^{-2kH} + \frac{P_1/\rho + AD + BC}{\lambda} = U_H. \end{aligned} \quad (15)$$

Систему решаем последовательно: сначала определим A и B , затем C и D , E и F . Градиент давления P_1 может быть задан или определен из дополнительных условий (например, расхода жидкости).

Введем характерные масштабы: H — для длины, U_0 — для скорости, $\rho\nu U_0/H$ — для давления. Определим безразмерные переменные:

$$\tilde{z} = \frac{z}{H}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{U_0}, \quad \tilde{a} = \frac{aH}{U_0}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{U_0}, \quad \tilde{P}_1 = \frac{P_1H^2}{\rho\nu U_0}.$$

Введем безразмерный параметр — число Рэлея (отношение силы трения к вязким силам):

$$\Lambda = \frac{\lambda H^2}{\nu} = (kH)^2. \quad (16)$$

В безразмерном виде решение (13) запишется как:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\tilde{z}) &= \tilde{A}e^{\sqrt{\Lambda}\tilde{z}} + \tilde{B}e^{-\sqrt{\Lambda}\tilde{z}}, \\ \tilde{V}(\tilde{z}) &= \tilde{C}e^{\sqrt{\Lambda}\tilde{z}} + \tilde{D}e^{-\sqrt{\Lambda}\tilde{z}} - \frac{\tilde{P}_2}{\Lambda}, \\ \tilde{U}(\tilde{z}) &= \tilde{E}e^{\sqrt{\Lambda}\tilde{z}} + \tilde{F}e^{-\sqrt{\Lambda}\tilde{z}} - \frac{\tilde{A}\tilde{C}}{3\Lambda}e^{2\sqrt{\Lambda}\tilde{z}} - \frac{\tilde{B}\tilde{D}}{3\Lambda}e^{-2\sqrt{\Lambda}\tilde{z}} + \frac{\tilde{P}_1 + \tilde{A}\tilde{D} + \tilde{B}\tilde{C}}{\Lambda}. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения (17) задают семейство решений, параметризованное константами $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2$. Конкретные значения определяются граничными условиями и выбором градиентов давления.

Численный эксперимент

Расчет проведен для воды в плоском канале высотой $H = 1$ см. Параметры модели: кинематическая вязкость $\nu = 10^{-6}$ м²/с, плотность $\rho = 1000$ кг/м³. Граничные условия: на нижней стенке ($z = 0$) $U_0 = 0$ м/с, $a_0 = 5$ с⁻¹, $V_0 = 0.01$ м/с; на верхней стенке ($z = H$) $U_H = 0.05$ м/с, $a_H = 0$ с⁻¹, $V_H = 0$ м/с. Продольный градиент давления $P_1 = -0.5$ Па/м, поперечный $P_2 = 0$. Рассмотрены четыре значения коэффициента трения Рэлея: $\lambda = 0.1; 1; 10; 50$ с⁻¹, что соответствует безразмерному параметру Λ в диапазоне от 10 до 5000. Для устойчивости вычислений при

$|x| > 50$ использована асимптотика $\sinh x \approx \text{sign}(x)e^{|x|/2}$, $\cosh x \approx e^{|x|/2}$. Расчеты выполнены в среде MATLAB 2023b [29].

На рис. 1 приведены профили скоростей. С ростом λ осевая скорость $U(z)$ концентрируется в тонком слое у верхней стенки, где задано ненулевое граничное условие $U_H = 0.05$ м/с. Градиент сдвига $a(z)$ при малом трении ($\lambda = 0.1$ с⁻¹) практически линейно убывает по высоте канала, а при больших λ экспоненциально затухает, локализуясь вблизи нижней стенки ($z = 0$). Поперечная скорость $V(z)$ также быстро падает от нижней стенки, формируя пристеночный слой. Полная продольная скорость $V_x(z)$ при $y = 1$ мм отличается от осевой скорости $U(z)$ на величину $a(z)y$, что особенно заметно вблизи нижней стенки, где градиент сдвига максимален; это подтверждает трехмерный характер течения даже при отсутствии явной зависимости от координаты x .

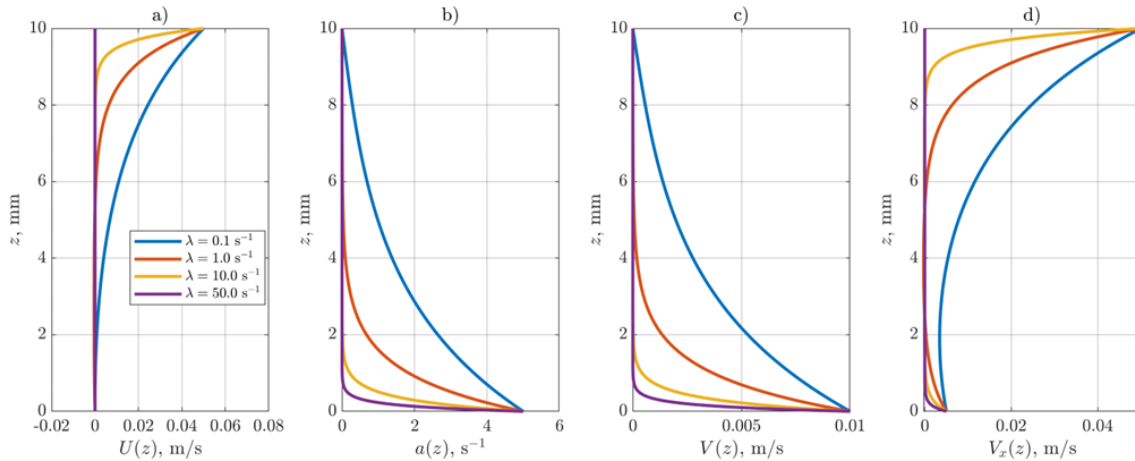


Рис. 1. Профили скоростей: а) $U(z)$; б) градиент сдвига $a(z)$; в) $V(z)$; д) полная продольная скорость $V_x(z)$ при $y = 1$ мм

Рис. 2 показывает структуру поля $V_x(y, z)$. В обоих случаях ($\lambda = 1$ и 10 с⁻¹) поверхность скорости имеет выраженную кривизну. С ростом λ область высоких градиентов сжимается к стенкам канала. Сечения поля при $\lambda = 10$ с⁻¹ (рис. 2с) показывают сильную зависимость от y : при $y = -2$ мм скорость отрицательна вблизи нижней стенки и положительна у верхней; при $y = 0$ профиль совпадает с $U(z)$; при $y = +2$ мм скорость положительна во всем канале и достигает максимальных значений у верхней стенки.

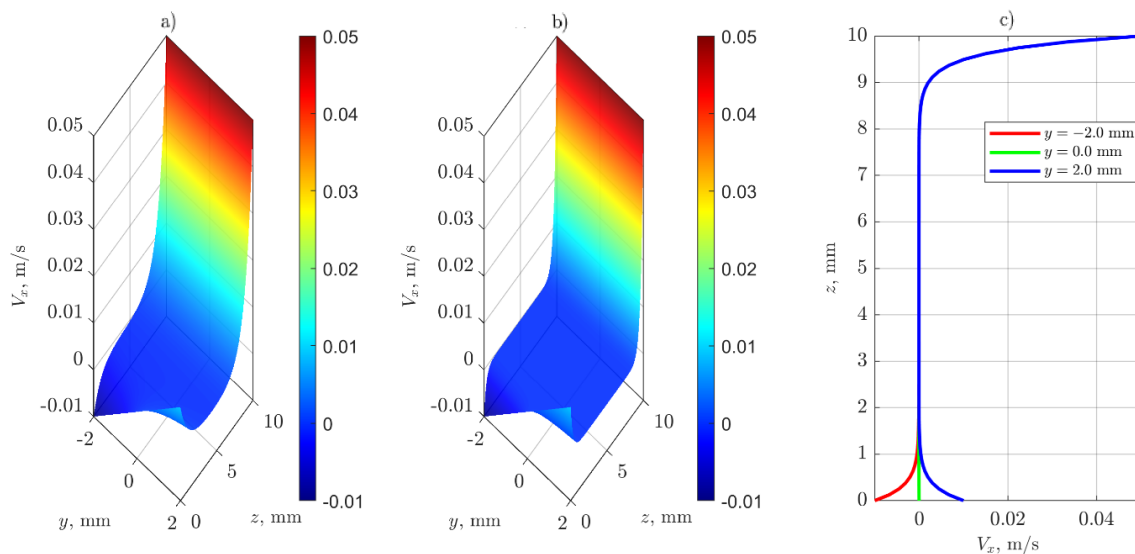


Рис. 2. Структура поля продольной скорости $V_x(y, z)$: а) $\lambda = 1$ с⁻¹; б) $\lambda = 10$ с⁻¹; в) сечения при различных значениях y

На рис. 3 представлены профили диссипации энергии. Вязкая диссипация ε_ν с ростом λ

концентрируется в узком слое у верхней стенки ($z = H$), где градиенты осевой скорости максимальны. Диссипация Рэлея ε_λ становится значимой уже при $\lambda \geq 1 \text{ с}^{-1}$; ее пики наблюдаются у обеих стенок: у верхней — за счет осевой скорости, у нижней — за счет поперечной. Суммарная диссипация при $\lambda = 50 \text{ с}^{-1}$ существенно превышает значения для слабого трения, причем основной вклад вносит рэлеевский механизм.

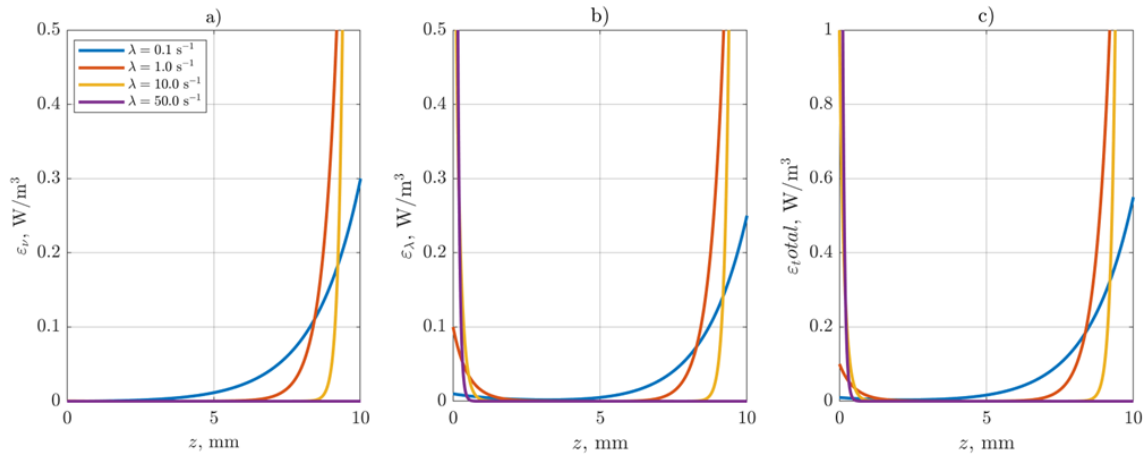


Рис. 3. Профили диссипации энергии по высоте канала: а) вязкая диссипация ε_ν ; б) диссипация Рэлея ε_λ ; в) суммарная диссипация $\varepsilon_{\text{общ}}$

На рис. 4 показаны толщина пограничного слоя и доля диссипации Рэлея. Толщину δ определяем как расстояние от нижней стенки, на котором градиент сдвига $a(z)$ падает до 37% от пристеночного значения. С ростом λ толщина уменьшается. Расчетные значения δ близки к теории: при $\lambda = 0.1 \text{ с}^{-1}$ $\delta = 3.13 \text{ мм}$ (теория 3.16 мм), при $\lambda = 50 \text{ с}^{-1}$ $\delta = 0.145 \text{ мм}$ (теория 0.141 мм). При $\lambda > 10 \text{ с}^{-1}$ толщина становится менее 1 мм ($\delta/H < 0,1$) — это переход к тонким пристеночным слоям. Доля диссипации Рэлея монотонно растет: 43,4% при $\lambda = 0.1 \text{ с}^{-1}$, 50,0% при $\lambda = 1 \text{ с}^{-1}$, 50,9% при $\lambda = 10 \text{ с}^{-1}$ и 100% при $\lambda = 50 \text{ с}^{-1}$. Значит, при сильном трении Рэлея этот механизм доминирует. Если учитывать только вязкую диссипацию, потери энергии будут сильно занижены.

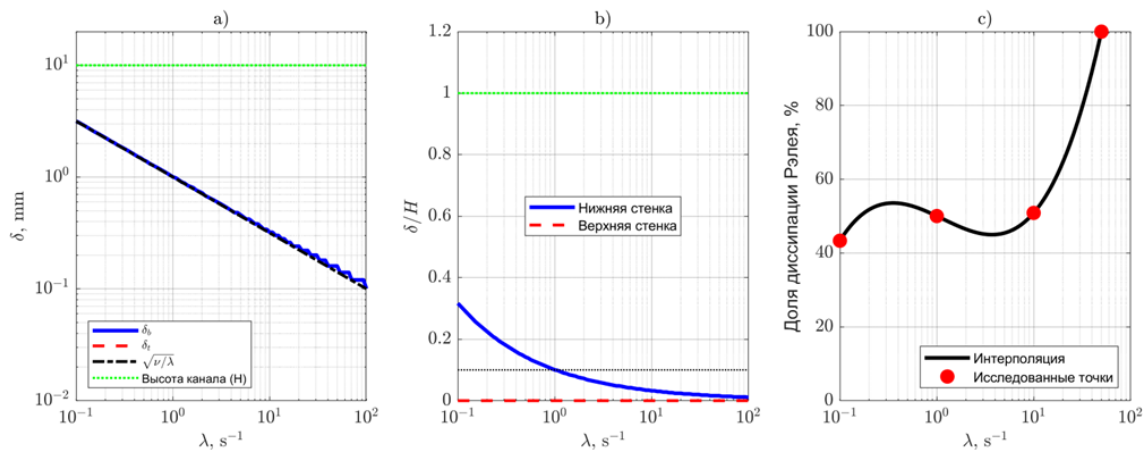


Рис. 4. Зависимость характеристик пограничного слоя и диссипации от параметра трения Рэлея: а) толщина пограничного слоя δ ; б) относительная толщина δ/H ; в) доля диссипации Рэлея в общей диссипации

Обсуждение результатов

Примечательная особенность решения: трение Рэлея, хотя и входит в уравнения линейно, приводит к появлению нелинейных по константам интегрирования членов в решении. Это значит, что продольное сдвиговое течение и поперечная циркуляция не независимы. В классических решениях Куэтта–Пуазейля без трения такой эффект отсутствует.

Введенный безразмерный параметр Λ определяет режим течения [12]. При $\Lambda \ll 1$ течение практически не отличается от классического. При $\Lambda \gg 1$ формируется структура, напоминающая экмановский пограничный слой: возмущения от стенок затухают экспоненциально и в центральной части канала скорость стремится к нулю [30]. Характерная толщина слоя (полученная в численном эксперименте) совпадает с оценками из теории пограничного слоя.

Условие $P_2 = 0$ (отсутствие поперечного градиента давления) необходимо для ограниченности решения в полубесконечной области, но в канале конечной высоты это ограничение не является жестким: при подходящем выборе граничных условий решение остается физическим и при $P_2 \neq 0$. Тем не менее для большинства практических приложений (прямые каналы, фильтрационные течения) поперечный градиент давления естественно считать нулевым.

Важнее всего для практики результат о диссипации. Как показано в численном эксперименте (рис. 4с), доля диссипации Рэлея монотонно возрастает с ростом λ и при больших значениях параметра трения становится определяющей. В пористых средах и при моделировании турбулентного сопротивления пренебрежение этим механизмом может приводить к грубым ошибкам в энергетическом балансе.

Заключение

В работе получено новое точное решение уравнений Навье–Стокса с линейным трением Рэлея для стационарного течения в плоском канале. Решение обобщает классические течения Куэтта и Пуазейля на случай трехмерного неоднородного течения, где продольная скорость линейна по одной поперечной координате с экспоненциально меняющимися коэффициентами.

Показано, что безразмерный параметр Λ является критерием подобия. При малых Λ течение близко к классическому, при больших Λ формируются тонкие пограничные слои у стенок.

Численный эксперимент для воды подтвердил эти закономерности. Установлено, что переход от режима полного заполнения канала к режиму пристеночных слоев происходит при $\lambda \approx 1\text{--}10 \text{ с}^{-1}$ ($\Lambda \approx 10^2\text{--}10^3$). Толщина пограничного слоя при этом уменьшается обратно пропорционально корню из коэффициента трения, что согласуется с теорией.

Выявлено, что с ростом λ доля диссипации за счет трения Рэлея монотонно увеличивается и при больших значениях параметра становится преобладающей. Это важно для моделирования течений в пористых средах, фильтрации, атмосферных и океанических процессов.

Решение может использоваться для верификации численных методов и как модельная задача для анализа трехмерных течений с распределенным сопротивлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Drazin P. G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Cambridge University Press; 2006.
2. Wang C. Y. Exact Solutions of the Steady-State Navier–Stokes Equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1991;23:159–177.
3. Галкин В. А., Смородинов А. Д., Моргун Д. А. Решение уравнения Навье–Стокса для сталкивающихся потоков. *Успехи кибернетики*. 2023;4(2):8–15. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-2-01.
4. Галкин В. А., Дубовик А. О. Моделирование слоистого течения в неограниченном цилиндре с радиусом, изменяющимся во времени. *Успехи кибернетики*. 2022;3(4):14–23. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-4-02.
5. Ershkov S. V., Prosviryakov E. Y., Burmasheva N. V., Christianto V. Towards Understanding the Algorithms for Solving the Navier–Stokes Equations. *Fluid Dynamics Research*. 2021;53(4):044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
6. Rayleigh L. On the Dynamics of Revolving Fluids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. 1916;93(648):148–154.
7. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. 2nd ed. Springer; 1987.
8. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. Inhomogeneous Couette–Poiseuille Flow of a Viscous Incompressible Fluid in an Infinite Horizontal Layer with Permeable Boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 2025;5:6–28. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028.

9. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. An Exact Solution with Inhomogeneous Boundary Conditions for a Steady Non-Uniform Couette Flow between Permeable Plates. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 2025;5:66–86. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.066-086.
10. Ekman V. W. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*. 1905;2(11):1–53.
11. Dolzhansky F. V., Krymov V. A., Manin D. Y. Stability and Vortex Structures of Quasi-Two-Dimensional Shear Flows. *Physics-Uspokhi*. 1990;33(7):495–520.
12. Burmasheva N., Ershkov S., Prosviryakov E., Leshchenko D. Exact Solutions of Navier–Stokes Equations for Quasi-Two-Dimensional Flows with Rayleigh Friction. *Fluids*. 2023;8(4):123. DOI: 10.3390/fluids8040123.
13. Berker R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. *Strömungsmechanik II. Fluid Dynamics II. Series: Handbuch der Physik. Encyclopedia of Physics*. Springer. 1963;3/8/2:1–384.
14. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. Наука; 1978.
15. Aristov S. N. *Eddy Currents in Thin Liquid Layers* [dissertation]. Vladivostok: Institute of Automation and Control Processes; 1990.
16. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu. Exact Analytical Solution to the Problem of Stationary Convection in the Boussinesq Approximation with Account for Viscous Dissipation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 2025;6:23–38. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.6.023-038.
17. Lin C. C. Note on a Class of Exact Solutions in Magneto-Hydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1958;1:391–395.
18. Sidorov A. F. Two Classes of Solutions of the Fluid and Gas Mechanics Equations and Their Connection to Traveling Wave Theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1989;30(2):197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
19. Baranovskii E. S., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Y. Exact Solutions to the Navier–Stokes Equations with Couple Stresses. *Symmetry*. 2021;13(8):1355. DOI: 10.3390/sym13081355.
20. Zubarev N. M., Prosviryakov E. Y. Exact Solutions for Layered Three-Dimensional Nonstationary Isobaric Flows of a Viscous Incompressible Fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2019;60(6):1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075.
21. Meshalkin L. D., Sinai I. G. Investigation of the Stability of a Stationary Solution of a System of Equations for the Plane Movement of an Incompressible Viscous Liquid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1961;25(6):1700–1705.
22. Ladyzhenskaya O. A. On Nonstationary Navier–Stokes Equations. *Vestnik Leningradskogo Universiteta*. 1958;19:9–18.
23. Obukhov A. M. Kolmogorov Flow and Laboratory Simulation of It. *Russian Mathematical Surveys*. 1983;38(4):113–126.
24. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Chapman & Hall/CRC Press; 2004.
25. Boyd J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. 2nd ed. Dover Publications; 2001.
26. Titchmarsh E. C. *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations*. 2nd ed. Oxford University Press; 1962.
27. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press; 2000.
28. Schlichting H., Gersten K. *Boundary-Layer Theory*. 9th ed. Springer; 2017.
29. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu. MATLAB Code for Inhomogeneous Couette–Poiseuille Flow with Rayleigh Friction and Permeable Boundaries. Mendeley Data, V1. 2026. DOI: 10.17632/dcgkct8j8v.1. Режим доступа: <https://data.mendeley.com/datasets/dcgkct8j8v/1>.
30. Sivashinsky G. I. Weak Turbulence in Periodic Flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1985;17(2):243–255.