

КОМПЛЕКСНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ 1-ФОРМА И ПОТЕНЦИАЛ ХЕНОНА–ХЕЙЛЕСА

В. П. Кошчев

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), филиал
«Стрела», г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0724-9760>, ✉ koshcheev1@yandex.ru

Аннотация: семейство потенциалов типа Хенона–Хейлеса может быть построено при условии, что действительная или мнимая части комплексной дифференцируемой 1-формы не удовлетворяют лемме Пуанкаре. Показано, что скалярный потенциал Хенона–Хейлеса является источником циркуляции вихревого поля силы, которая действует на пробную частицу. Показано, что плотность циркуляции вихревого поля силы остается постоянной даже в пределах области хаотического (квазихаотического) движения.

Ключевые слова: формула Грина, потенциал Хенона–Хейлеса, условие Коши–Римана, дифференциальная 1-форма.

Для цитирования: Кошчев В. П. Комплексная дифференциальная 1-форма и потенциал Хенона–Хейлеса. *Успехи кибернетики*. 2026;7(1):67–70.

Поступила в редакцию: 01.09.2025.

В окончательном варианте: 20.09.2025.

COMPLEX DIFFERENTIAL 1-FORM AND THE HÉNON–HEILES POTENTIAL

V. P. Koshcheev

Moscow Aviation Institute (National Research University), Strela branch, Zhukovsky, Moscow Region,
Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0724-9760>, ✉ koshcheev1@yandex.ru

Abstract: we constructed the family of Hénon–Heiles potentials under the condition that the real or imaginary parts of the complex differentiable 1-form do not satisfy the Poincaré lemma. We showed that the scalar Hénon–Heiles potential serves as the source of the vortex field circulation of the force applied to the test particle. We also showed that the circulation density of the vortex field of the force remains constant even within the region of chaotic or quasi-chaotic motion.

Keywords: Green’s equation, Hénon–Heiles potential, Cauchy–Riemann condition, differential 1-form.

Cite this article: Koshcheev V. P. Complex Differential 1-Form and the Hénon–Heiles Potential. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(1):67–70.

Original article submitted: 01.09.2025.

Revision submitted: 20.09.2025.

Потенциал Хенона–Хейлеса [1] продолжает оставаться в центре внимания авторов многих работ (см., например, [2–4]).

Условия Коши–Римана

Рассмотрим функцию комплексной переменной

$$W = f(z), \quad (1)$$

где $z = x + iy$; $i = \sqrt{-1}$; $W = U + iV$; $U = U(x, y)$; $V = V(x, y)$.

Пусть

$$dW = dP + idQ \equiv \omega(W), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} dP &= Udx - Vdy \equiv \omega(P); \\ dQ &= Vdx + Udy \equiv \omega(Q). \end{aligned}$$

Комплексная дифференциальная 1-форма имеет вид

$$\omega(W) = \omega(P) + i\omega(Q).$$

Если действительная и мнимая части комплексной функции удовлетворяют условию Коши–Римана, то комплексная дифференциальная 1-форма удовлетворяет лемме Пуанкаре. Докажем это утверждение от обратного.

Пусть

$$d\omega(W) = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} d\omega(P) = 0 \\ d\omega(Q) = 0 \end{cases}. \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} d\omega(P) &= (U_y + V_x)dy \wedge dx \\ d\omega(Q) &= (V_y - U_x)dy \wedge dx \end{aligned} \quad (4)$$

Так как $dy \wedge dx \neq 0$, то с помощью (3) и (4) получим условие Коши–Римана

$$\begin{cases} U_y = -V_x \\ U_x = V_y \end{cases}. \quad (5)$$

Семейство потенциалов типа Хенона–Хейлеса

$$\text{Если} \quad \begin{cases} d\omega(P) \neq 0 \\ d\omega(Q) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} U_y \neq -V_x \\ U_x = V_y \end{cases}, \quad (6)$$

то по формуле Грина [5] получим

$$\int_{\partial D} \omega(P) = \int_D d\omega(P) \quad \text{или} \quad \oint_C U dx - V dy = - \iint_D (V_x + U_y) dx \wedge dy. \quad (7)$$

Так как $U_x = V_y$, то с помощью

$$\begin{cases} U = Q_y \\ V = Q_x \end{cases} \quad (8)$$

запишем (7) в виде

$$\oint_C Q_y dx - Q_x dy = - \iint_D (Q_{xx} + Q_{yy}) dx \wedge dy. \quad (9)$$

$$\text{Если} \quad \begin{cases} d\omega(P) = 0 \\ d\omega(Q) \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} U_y = -V_x \\ U_x \neq V_y \end{cases}, \quad (10)$$

то по формуле Грина [5] получим

$$\int_{\partial D} \omega(Q) = \int_D d\omega(Q) \quad \text{или} \quad \oint_C V dx + U dy = \iint_D (U_x - V_y) dx \wedge dy. \quad (11)$$

Так как $U_y = -V_x$,

то с помощью

$$\begin{cases} U = P_x \\ V = -P_y \end{cases} \quad (12)$$

запишем (11) в виде

$$\oint_C P_y dx - P_x dy = - \iint_D (P_{xx} + P_{yy}) dx \wedge dy. \quad (13)$$

В [1] был введен модельный потенциал, который называется потенциалом Хенона–Хейлеса:

$$U_{H-H} = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x^2 y - \frac{y^3}{3}. \quad (14)$$

Видно, что

$$U + iV \equiv Q_y + iQ_x = y + x^2 - y^2 + i(x + 2xy). \quad (15)$$

Так как

$$\begin{cases} U = Q_y = \frac{\partial U_{H-H}}{\partial y} \\ V = Q_x = \frac{\partial U_{H-H}}{\partial x} \end{cases}. \quad (16)$$

Согласно [1] величины

$$\begin{aligned} U &= y + x^2 - y^2 \\ V &= x + 2xy \end{aligned} \quad (17)$$

с точностью до знака являются проекциями вектора силы, которая действует на пробную частицу.

Уравнение (9) принимает вид

$$-\oint_C \frac{\partial U_{H-H}}{\partial y} dx - \frac{\partial U_{H-H}}{\partial x} dy = \iint_D 2dx \wedge dy. \quad (18)$$

Видно, что скалярный потенциал Хенона–Хейлеса является источником циркуляции вихревого поля силы, которая действует на пробную частицу.

Можно вычислить определитель Якоби отображения (17)

$$\frac{\partial(U,V)}{\partial(x,y)} = 4(x^2 + y^2) - 1, \quad (19)$$

который равен нулю на окружности радиуса, равному $\frac{1}{2}$, то есть проекции вектора силы не являются дифференцируемыми функциями на этой окружности. Видно, что отображение (17) является частным случаем отображения Арнольда [6]

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 - x_2^2 + ax_1 \\ y_2 &= 2x_1x_2 - ax_2, \end{aligned} \quad (20)$$

где a — параметр.

В [6] было показано, что на плоскости (x_1, x_2) определитель Якоби равен нулю на окружности

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{a^2}{4}. \quad (21)$$

Отображение этой окружности на плоскости (y_1, y_2) приводит к гипоциклоиде с тремя острями [6], в окрестности которых производная испытывает скачок.

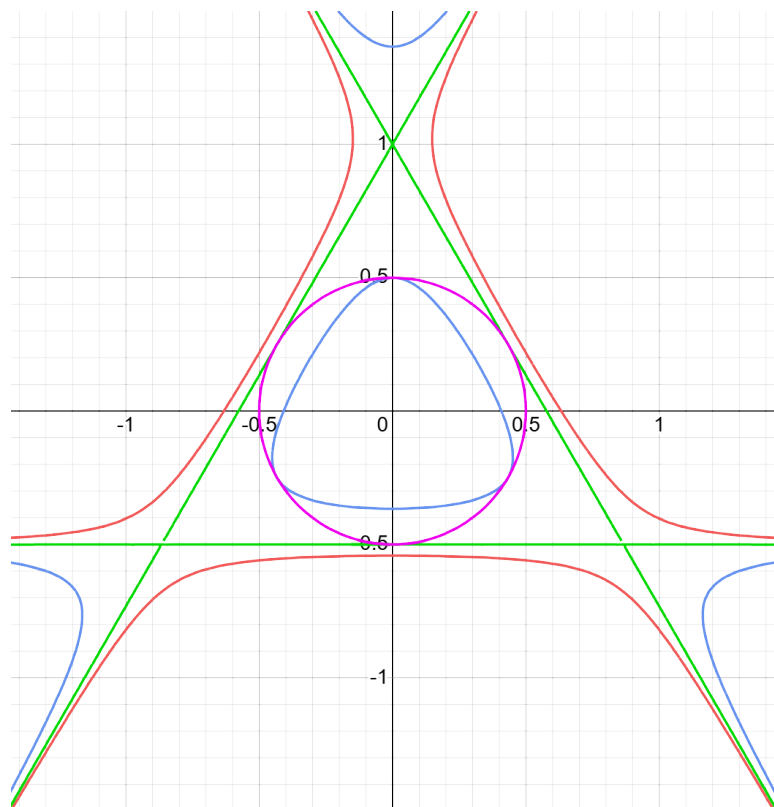


Рис. Линии уровня потенциала Хенона–Хейлеса

На рисунке представлены линии уровня потенциала Хенона–Хейлеса. Красная линия построена при $U_{H-H} = \frac{1}{5}$, зеленая — $U_{H-H} = \frac{1}{6}$, синяя — $U_{H-H} = \frac{1}{12}$. Фиолетовая окружность радиуса $\frac{1}{2}$ определяет значения переменных, при которых определитель Якоби (19) равен нулю. Имеет место правая и левая ориентация на плоскости внутри и вне окружности радиуса $\frac{1}{2}$, соответственно. Числа $U_{H-H} = \frac{1}{12}$ и $U_{H-H} = \frac{1}{6}$ для синей и зеленой линий уровня были определены в [1] как критические значения энергии. Было показано, что в этих пределах движение пробной частицы является хаотическим. Так как производная вектора силы испытывает скачок на окружности, которая лежит в пределах области хаотического движения, то, видимо, это и есть причина хаоса. Видно, что плотность циркуляции вихревого поля силы (18) остается постоянной даже в пределах области хаотического (квазихаотического) движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hénon M., Heiles C. The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments. *Astronomical Journal*. 1964;69:73.
2. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Гриненко А. А., Сыщенко В. В. Динамика заряженных частиц высоких энергий в прямых и изогнутых кристаллах. *Успехи физических наук*. 1995;165(10):1165–1192.
3. Contopoulos G., Tzemos A. C., Zaniias F. *Integrals and Chaos in Generalized Hénon-Heiles Hamiltonians*. arXiv:2501.08437. 2025.
4. Tsiganov A. V. *Multisymplectic Structure of Nonintegrable Hénon-Heiles System*. arXiv:2502.03786. 2025.
5. Зорич В. А. *Математический анализ*: В 2 т. Т. 2. М.: Наука; 1984.
6. Арнольд В. И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры? *Успехи физических наук*. 1999;169(12):1311–1323.