КООРДИНАТНОЕ И ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ И ГАМИЛЬТОНА

В. П. Кощеев
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), филиал «Стрела», г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760, ✍ koshcheev1@yandex.ru

Аннотация: показано, что уравнение Гамильтона–Якоби можно построить в координатном и импульсном представлении с помощью дифференциальных 1-форм, удовлетворяющих лемме Пуанкаре. Показано, что одно из уравнений Гамильтона строится с помощью уравнения Гамильтона–Якоби в координатном представлении, а другое уравнение Гамильтона строится с помощью уравнения Гамильтона–Якоби в импульсном представлении.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона–Якоби, уравнение Гамильтона, координатное представление, импульсное представление.

Для цитирования: Кощеев В. П. Координатное и импульсное представление уравнений Гамильтона–Якоби и Гамильтона. *Успехи кибернетики*. 2026;7(1):64–66.

Поступила в редакцию: 15.12.2025. *В окончательном варианте: 19.01.2026.*

COORDINATE AND MOMENTUM REPRESENTATIONS OF HAMILTON–JACOBI AND HAMILTON EQUATIONS

V. P. Koshcheev
Moscow Aviation Institute (National Research University), Strela branch, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760, ✍ koshcheev1@yandex.ru

Abstract: we showed that the Hamilton–Jacobi equation can be formulated in both coordinate and momentum representations using differential one-forms that satisfy Poincaré's lemma. We also showed that one of Hamilton's equations follows from the Hamilton–Jacobi equation in the coordinate representation, whereas the other Hamilton equation follows from the Hamilton–Jacobi equation in the momentum representation.

Keywords: Hamilton–Jacobi equation, Hamilton equation, coordinate representation, momentum representation.

Cite this article: Koshcheev V. P. Coordinate and Momentum Representations of Hamilton–Jacobi and Hamilton Equations. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(1):64–66.

Original article submitted: 15.12.2025. *Revision submitted: 19.01.2026.*

Уравнениям Гамильтона–Якоби и Гамильтона посвящена обширная литература [1, 2], которую тем не менее можно дополнить изучением вопроса о координатном и импульсном представлении этих уравнений.

Классическое действие для динамической системы с одной степенью свободы запишем в виде определенного интеграла с переменным верхним пределом:

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} L\left(t', q(t'), \frac{dq(t')}{dt'}\right) dt'. \tag{1}$$

Тогда

$$dS = L\left(t', q(t'), \frac{dq(t')}{dt'}\right) dt'\bigg|_{t'=t} = L(t, q, \dot{q}) dt, \tag{2}$$

где $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$.

Пусть

$$\dot{q} = \dot{q} + v - v = v + \delta v. \tag{3}$$

Тогда

$$L(t,q,\dot{q}) = L(t,q,v+\delta v). \tag{4}$$

Приращение

$$\Delta L = L(t,q,v+\delta v) - L(t,q,v) \tag{5}$$

найдем с помощью первой вариации по Лагранжу (дифференциал Гато [3]):

$$\Delta L = \lim_{\alpha\to 0}\frac{d}{d\alpha}L(t,q,v+\alpha\delta v) = \frac{\partial L(t,q,v)}{\partial v}\delta v. \tag{6}$$

Тогда

$$L(t,q,\dot{q})dt = \left(L(t,q,v) - v\frac{\partial L(t,q,v)}{\partial v}\right)dt + \frac{\partial L(t,q,v)}{\partial v}dq. \tag{7}$$

Если

$$\begin{cases} L(t,q,v) - v\dfrac{\partial L(t,q,v)}{\partial v} = -H(t,q,p) \\ \dfrac{\partial L(t,q,v)}{\partial v} = p, \end{cases} \tag{8}$$

где p — обобщенный импульс, а $H(t,q,p)$ — функция Гамильтона, то

$$\omega(t,q) = -H(t,q,p)dt + pdq = \frac{\partial S(t,q)}{\partial t}dt + \frac{\partial S(t,q)}{\partial q}dq. \tag{9}$$

Видно, что дифференциальная 1-форма $\omega(t,q)$ удовлетворяет лемме Пуанкаре.

Так как

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(t,q)}{\partial t} = -H(t,q,p) \\ \dfrac{\partial S(t,q)}{\partial q} = p, \end{cases} \tag{10}$$

то получим уравнение Гамильтона–Якоби в координатном представлении:

$$\frac{\partial S(t,q)}{\partial t} = -H\left(t,q,\frac{\partial S(t,q)}{\partial q}\right). \tag{11}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial S(t,q)}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S(t,q)}{\partial q}\right), \tag{12}$$

то с помощью (10) получим одно из уравнений Гамильтона:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q}. \tag{13}$$

Таким образом, построено одно из двух уравнений Гамильтона.

Так как

$$d(pq) = qdp + pdq, \tag{14}$$

то

$$\omega(t,p) = -H(t,q,p)dt - qdp = \frac{\partial S(t,p)}{\partial t}dt + \frac{\partial S(t,p)}{\partial p}dp. \tag{15}$$

Видно, что дифференциальная 1-форма $\omega(t,p)$ удовлетворяет лемме Пуанкаре.

Так как

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(t,p)}{\partial t} = -H(t,q,p) \\ \dfrac{\partial S(t,p)}{\partial p} = -q, \end{cases} \tag{16}$$

то получим уравнение Гамильтона–Якоби в импульсном представлении:

$$\frac{\partial S(t,p)}{\partial t} = -H\left(t,-\frac{\partial S(t,p)}{\partial p},p\right). \tag{17}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial S(t,p)}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S(t,p)}{\partial p}\right), \tag{18}$$

то с помощью (16) получим другое уравнение Гамильтона:

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p}. \tag{19}$$

Видно, что уравнения Гамильтона (13) и (19) построены в координатном и импульсном представлении соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер Э. Т. *Аналитическая динамика*. М.: УРСС; 2004.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. *Вариационное исчисление*. М.: Физматгиз; 1961.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. 2023. 572 с.