# О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ИЗВЕСТНОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНО ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ РАЗРЫВНОГО ПОТОКА ТЕПЛА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

**М. Е. Коржова**[а], **Б. А. Марков**[б], **А. И. Сидикова**[в]
*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
[а] *ORCID: https://orcid.org/0009-0004-2084-2093,* ✍ *korzhovame@susu.ru*
[б] *ORCID: https://orcid.org/0009-0006-6811-4583, markovba@susu.ru*
[в] *ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6077-0929, sidikovaai@susu.ru*

*Аннотация:* в статье изучается обратная задача на полупрямой. Среда рассматривается как композитная, состоящая из защитного слоя с низкой температуропроводностью и защищенного им материала. На разделе сред находится датчик измерения температуры, согласно показаниям которого возможно определить температуру на внешней поверхности защитного слоя. Граница движется по мере исчезновения защитного слоя по кусочно-линейному закону, этот закон может быть найден экспериментально и в задаче считается известным. При движении границы температура на ней известна и равна температуре разрушения защитного слоя. Когда распад слоя прекращается, получается задача, решение которой уже известно, если начальное условие на материале однородное. Для того, чтобы избавиться от неоднородности в начальном условии, необходимо его построить точно, для чего требуется решить задачу с подвижной границей. Поэтому в работе строится точное решение задачи с подвижной границей для случая кусочно-линейного движения, после чего задача сводится к уже решенной. В статье так же приводится краткое описание решения обратной задачи, построенное авторами ранее.

*Ключевые слова:* точное решение, подвижная граница, обратная задача теплопроводности.

*Для цитирования:* Коржова М. Е., Марков Б. А., Сидикова А. И. О решении обратной задачи с известной кусочно-линейно подвижной границей для разрывного потока тепла на границе раздела сред. *Успехи кибернетики*. 2026;7(1):57–63.

*Поступила в редакцию: 22.10.2025.* *В окончательном варианте: 15.11.2025.*

# SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM WITH A KNOWN PIECEWISE LINEAR MOVING BOUNDARY FOR DISCONTINUOUS HEAT FLOW AT THE MEDIUM INTERFACE

**M. E. Korzhova**[a], **B. A. Markov**[b], **A. I. Sidikova**[c]
*South Ural state University, Chelyabinsk, Russian Federation*
[a] *ORCID: https://orcid.org/0009-0004-2084-2093,* ✍ *korzhovame@susu.ru*
[b] *ORCID: https://orcid.org/0009-0006-6811-4583, markovba@susu.ru*
[c] *ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6077-0929, sidikovaai@susu.ru*

*Abstract:* we studied the inverse problem on a half-line for a composite medium consisting of a protective layer with low thermal conductivity and the underlying material. A temperature sensor is placed at the interface between the two media, allowing the determination of temperature on the outer surface of the protective layer. The boundary moves as the protective layer decays according to a piecewise-linear law, which can be determined experimentally and is considered known. The temperature at the moving boundary is fixed and equal to the destruction temperature of the protective layer.

When the layer finishes decaying, the problem reduces to a case with a homogeneous initial condition on the material, for which the solution is already known. To account for heterogeneity in the initial condition, it is necessary to construct it accurately by solving the problem with the moving boundary. Therefore, we constructed an exact solution for the moving-boundary problem under piecewise-linear motion, after which the problem reduces to the already solved case. The article also briefly summarizes the solution to the inverse problem we previously proposed.

*Keywords:* explicit solution, moving boundary, inverse heat conduction problem.

*Cite this article:* Korzhova M. E., Markov B. A., Sidikova A. I. Solution of the Inverse Problem with a Known Piecewise Linear Moving Boundary for Discontinuous Heat Flow at the Medium Interface. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(1):57–63.

*Original article submitted: 22.10.2025.* *Revision submitted: 15.11.2025.*

## Введение

В современной технике встречаются устройства, детали которых подвержены тепловому воздействию. В результате у деталей могут меняться свойства материалов. В свою очередь, это приводит к выходу устройства из строя.

Чтобы защитить компоненты от избыточного теплового воздействия, можно контролировать температуру поверхности. А так как температура может быть слишком велика для непосредственного измерения, то желательно уметь решать обратную задачу температуропроводности.

Другим способом решения проблемы является нанесение защитного покрытия. Покрытие на некоторое время защитит устройство, но затруднит решение обратной задачи, поставленной уже для композитного материала.

Покрытие может разрушаться под действием нагрева и других факторов. Соответственно меняются толщина защитного слоя и термическое воздействие источника тепла на материал. В настоящей работе мы предлагаем рассмотреть нагрев композитной среды с известной подвижной границей. При этом мы будем считать, что процесс разрушения защитного слоя не сопровождается выделением тепла, идущим на его разрушение, — просто слой меняет свою толщину, не внося никаких иных изменений в уравнение теплопроводности. Мы также полагаем, что при разрушении защитного слоя температура на его поверхности в точности равна температуре разрушения слоя, то есть величине $T$. В силу установленных внутри защитного слоя датчиков мы знаем, как движется граница разрушающегося слоя, точнее, ее положение в определенные моменты времени.

Наша задача состоит в том, чтобы, зная свойства материала и свойства среды, а также закон движения (изменения) границы, найти температуру на внешней поверхности защитного слоя. Предлагаемое нами решение задачи состоит в том, чтобы найти точное решение до того момента, когда граница останавливается, после чего решать уже обратную задачу [1–8] для неподвижной границы, используя результаты [10].

Отметим, что задача с непрерывным потоком тепла на разделе сред значительно более содержательна с прикладной точки зрения, однако она существенно более сложная, и нам представляется целесообразным разобрать сначала более простую задачу.

## Математическая постановка задачи

Рассмотрим уравнение теплопроводности на полупрямой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in (h(t);1), \qquad t \in (0;\infty), \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in (1;+\infty), \qquad t \in (0;\infty), \\ u_1(x,0) = 0, \qquad x \in [0;1], \qquad u_2(x,0) = 0, \qquad x \in (1;+\infty), \\ u_1(h(t),t) = \nu(t), \qquad t \in [0;+\infty), \qquad u_2(+\infty,t) = 0, \qquad t \in [0;+\infty), \\ u_1(1,t) = u_2(1,t) = \mu(t), \qquad t \in [0;+\infty), \qquad a_1 \dfrac{\partial u_1(1,t)}{\partial x} = a_2 \dfrac{\partial u_2(1,t)}{\partial x}, \qquad t \in [0;+\infty). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь мы использовали обозначения: $u_1(x,t)$ — температура при $x \in [h(t);1], t \in [0;+\infty)$, $u_2(x,t)$ — температура при $x \in [1;+\infty), t \in [0;+\infty)$, $h(t)$ — известная функция движения границы защитного слоя, граница движется по закону $x = h(t)$, $h(0) = 0$, $\forall t \geq 0 \quad h(t) < 1$, $h(t)$ — монотонно возрастающая функция. Постоянные числовые коэффициенты $a_1^2, a_2^2$ — коэффициенты температуропроводности, известные величины. $\nu(t)$ — температура на внешней поверхности защитного слоя, в прямой задаче она считается заданной, в обратной — ее нужно определить. $\mu(t)$ — температура на границе раздела сред (на внутренней поверхности защитного слоя), в прямой задаче она не задается, так как может быть определена из решения системы уравнений, в обратной задаче она считается известной и, исходя из неё, определяется функция $\nu(t)$.

Нам также понадобятся следующие обозначения:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), \qquad x \in [h(t),1], \qquad t \in [0;+\infty), \\ u_2(x,t), \qquad x \in (1;+\infty), \qquad t \in [0;+\infty), \end{cases}$$

$$Du(x,t) = \begin{cases} a_1 \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}, & x \in [h(t), 1], \quad t \in [0; +\infty), \\ a_2 \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}, & x \in (1; +\infty), \quad t \in [0; +\infty), \end{cases} \tag{2}$$

где $u(x,t)$ — решение задачи (1).

Функция $h(t)$ задана цепочкой линейных соотношений:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0; t_0), \\ H_1 + h_1 t, & t \in [t_0; t_1), \\ \dots \\ H_k + h_k t, & t \in [t_{k-1}; t_k), \\ H_{k+1}, & t \geq t_k, \end{cases} \tag{3}$$

где $H_1 = -h_1 t_0$, $H_2 = h_1 t_1 - h_2 t_1$, $\dots$, $H_{k+1} = H_k + h_k t_k$, все $h_i > 0$. Таким образом, подвижная граница останавливается в некоторый момент $t_k$, не достигнув границы защитного слоя $x = 1$ (т.е. $H_{k+1} < 1$), и дальше, при $t \geq t_k$, мы рассматриваем обычную краевую задачу с фиксированной границей $x = H_{k+1}$.

Так как мы хотели бы найти температуру $u_1(h(t),t) \equiv \nu(t)$, то во все моменты времени, пока граница остается подвижной, т.е. при всех $t < t_k$, температура известна и равна некоторому значению $T$ в силу физики процесса. Поэтому нам будет достаточно решить обратную задачу для $t \geq t_k$, зная значение $u_1(1,t) \equiv \mu(t)$, полученное с некоторой точностью, и по нему определить значение температуры $u_1(H_{k+1}, t)$ на уже неподвижной границе.

Для решения обратной задачи нам понадобится распределение температуры при $t_k$, поэтому сначала решим прямую задачу. Так как функция $h(t)$ непрерывна, но ее производная имеет разрывы, то вряд ли получится найти классическое решение задачи (1). Поэтому разобьем задачу (1) на временные промежутки, на каждом из которых подвижная граница задается участком ломаной линии (3). К решению на следующем участке будем приступать, используя значение температуры с предыдущего участка как начальное условие.

В результате получаем цепочку задач:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1^0(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1^0(x,t)}{\partial x^2}, & x \in (0; 1), \quad t \in (0; t_0), \\ \dfrac{\partial u_2^0(x,t)}{\partial t} = a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2^0(x,t)}{\partial x^2}, & x \in (1; +\infty), \quad t \in (0; t_0), \\ u_1^0(x,0) = 0, \quad x \in [0; 1], & u_2^0(x,0) = 0, \quad x \in (1; +\infty), \\ u_1^0(0,t) = tT/t_0, \quad t \in [0; t_0], & u_2^0(+\infty, t) = 0, \quad t \in [0; t_0], \\ u_1^0(1,t) = u_2^0(1,t) = \mu(t), \quad t \in [0; t_1], & a_1 \dfrac{\partial u_1^0(1,t)}{\partial x} = a_2 \dfrac{\partial u_2^0(1,t)}{\partial x}, \quad t \in [0; t_0], \end{cases} \tag{4}$$

— для первого промежутка времени.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1^i(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1^i(x,t)}{\partial x^2}, & x \in (H_i + h_i t; 1), \quad t \in (t_{i-1}; t_i), \\ \dfrac{\partial u_2^i(x,t)}{\partial t} = a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2^i(x,t)}{\partial x^2}, & x \in (1; +\infty), \quad t \in (t_{i-1}; t_i), \\ u_1^i(x, t_{i-1}) = u_1^{i-1}(x, t_{i-1}), \quad x \in [H_i + h_i t_{i-1}; 1], & u_2^i(x, t_{i-1}) = u_2^{i-1}(x, t_{i-1}), \quad x \in (1; +\infty), \\ u_1^i(H_i + h_i t, t) = T, \quad t \in [t_{i-1}; t_i], & u_2^i(+\infty, t) = 0, \quad t \in [t_{i-1}; t_i], \\ u_1^i(1,t) = u_2^i(1,t) = \mu(t), \quad t \in [t_{i-1}; t_i], & a_1 \dfrac{\partial u_1^i(1,t)}{\partial x} = a_2 \dfrac{\partial u_2^i(1,t)}{\partial x}, \quad t \in [t_{i-1}; t_i], \end{cases} \tag{5}$$

— для произвольного (кроме первого и последнего) временных промежутков и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1^{k+1}(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1^{k+1}(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in (H_{k+1}; 1), \qquad t \in (t_k; +\infty), \\ \dfrac{\partial u_2^{k+1}(x,t)}{\partial t} = a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2^{k+1}(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in (1; +\infty), \qquad t \in (t_k; +\infty), \\ u_1^{k+1}(x, t_k) = u_1^k(x, t_k), \qquad x \in [H_{k+1}; 1], \qquad u_2^{k+1}(x, t_k) = u_2^k(x, t_k), \qquad x \in (1; +\infty), \\ u_1^{k+1}(H_{k+1}, t) = \nu(t), \qquad t \in [t_k; +\infty), \qquad u_2^{k+1}(+\infty, t) = 0, \qquad t \in [t_k; +\infty), \\ u_1^{k+1}(1,t) = u_2^{k+1}(1,t) = \mu(t), \qquad t \in [t_k; +\infty), \qquad a_1 \dfrac{\partial u_1^{k+1}(1,t)}{\partial x} = a_2 \dfrac{\partial u_2^k(1,t)}{\partial x}, \qquad t \in [t_k; +\infty), \end{cases} \tag{6}$$

— для самого последнего временного промежутка, на котором нам необходимо будет найти решение обратной задачи. Мы будем искать классическое решение [9] задач (4)–(6).

**Явный вид решения**

Решения задач (4)–(6) существуют и могут быть выписаны явно:

$$\begin{gathered} q_1 = \frac{x - H_i}{a_1} + 2Bt, \quad q_2 = \frac{s - H_i}{a_1}, \quad q_3 = \frac{1 - H_i}{a_1} + \frac{x-1}{a_2} + 2Bt, \quad q_4 = \frac{1 - H_i}{a_1} + \frac{s-1}{a_2}, \\ k_1 = \frac{(q_1 - q_2)^2}{4(t - t_{i-1})}, \quad k_2 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{4(t - t_{i-1})}, \quad k_3 = \frac{(q_1 - q_4)^2}{4(t - t_{i-1})}, \quad k_4 = \frac{(q_1 + q_4)^2}{4(t - t_{i-1})}, \quad k_5 = \frac{(q_3 - q_2)^2}{4(t - t_{i-1})}, \\ k_6 = \frac{(q_3 + q_2)^2}{4(t - t_{i-1})}, \quad k_7 = \frac{(q_3 - q_4)^2}{4(t - t_{i-1})}, \quad k_8 = \frac{(q_3 + q_4)^2}{4(t - t_{i-1})}, \quad B = -\frac{h_i}{2a_1}, \quad v(s) = u^{i-1}(s, t_{i-1}) - T, \\ E_2(x,t) = T\exp(A(t - t_{i-1}) + Bq_1), \quad E_4(x,t) = T\exp(A(t - t_{i-1}) + Bq_3), \quad A = -B^2, \\ J_m(x,t) = \int\limits_{H_i}^{1} \frac{v_r(s)\exp(-Bq_{(2r)})}{\sqrt{4\pi(t - t_{i-1})}} e^{-k_m} ds, \quad m = 1, \quad 2, \ldots, 8, \quad r = 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2. \end{gathered} \tag{7}$$

Тогда решение примет вид:

$$\begin{aligned} u_1^i(x,t) &= T + E_2(x,t)(J_1(x,t) - J_2(x,t) + J_3(x,t) - J_4(x,t)), \\ u_2^i(x,t) &= T + E_4(x,t)(J_5(x,t) - J_6(x,t) + J_7(x,t) - J_8(x,t)). \end{aligned} \tag{8}$$

**Постановка и решение обратной задачи**

Теперь рассмотрим решение обратной задачи, сводящееся к решению обычной задачи с неподвижной границей и начальным условием.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^{k+1}(x,t)}{\partial t} = D^2 u^{k+1}(x,t), \quad x \in (H_{k+1}; 1) \cup (1; +\infty), \quad t \in (t_k; \infty), \\ u^{k+1}(x, t_k) = u^k(x), \quad x \in [h_k; +\infty), \quad u_1^{k+1}(H_{k+1}, t) = \tilde{\nu}(t), \quad t \in [t_k; +\infty), \\ u_2^{k+1}(+\infty, t) = 0, \quad t \in [t_k; +\infty), \quad u_1^{k+1}(1,t) = u_2^{k+1}(1,t) = \tilde{\mu}(t), \quad t \in [t_k; +\infty), \\ a_1 \dfrac{\partial u_1^{k+1}(1,t)}{\partial x} = a_2 \dfrac{\partial u_2^{k+1}(1,t)}{\partial x}, \quad t \in [t_k; +\infty), \end{cases} \tag{9}$$

где функцию $\tilde{\nu}(t)$ необходимо определить, функция $\tilde{\mu}(t)$ задана.

Функция $u^k(x)$ известна, она строится из начального условия с помощью вычислений, основанных на измерении $h_i$. Она известна точно.

В задаче (9) избавляемся от начального условия с помощью замены:

$$\begin{aligned} u_j^{k+1}(x,t) = U_j(x,t) &+ \int_{H_{k+1}}^{1} \frac{u_1^k(s,t_k)}{\sqrt{4\pi(t - t_k)}} \left( \exp\left( -\frac{(\xi_j - \eta_1)^2}{4(t - t_k)} \right) + \exp\left( -\frac{(\xi_j + \eta_1)^2}{4a_1^2(t - t_k)} \right) \right) ds \\ &+ \int_{1}^{+\infty} \frac{u_2^k(s,t_k)}{\sqrt{4\pi(t - t_k)}} \left( \exp\left( -\frac{(\xi_j - \eta_2)^2}{4(t - t_k)} \right) + \exp\left( -\frac{(\xi_j + \eta_2)^2}{4(t - t_k)} \right) \right) ds, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\xi_1 = \frac{x - H_{k+1}}{a_1}, \quad \eta_1 = \frac{s - H_{k+1}}{a_1}, \quad \xi_2 = \frac{x-1}{a_2} + \frac{1 - H_{k+1}}{a_1}, \quad \eta_2 = \frac{s-1}{a_2} + \frac{1 - H_{k+1}}{a_1}.$$

В результате задача (9) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D^2 U(x,t), \quad x \in (H_{k+1}; 1) \cup (1; +\infty), \quad t \in (t_k; \infty), \\ U(x, t_k) = 0, \quad x \in [H_{k+1}; +\infty), \quad U_1(H_{k+1}, t) = q(t), \quad t \in [t_k; +\infty), \\ U_2(+\infty, t) = 0, \quad t \in [t_k; +\infty), \quad U_1(1,t) = U_2(1,t) = \mu(t), \quad t \in [t_k; +\infty), \\ a_1 \dfrac{\partial U_1(1,t)}{\partial x} = a_2 \dfrac{\partial U_2(1,t)}{\partial x} \equiv a_1 g(t), \quad t \in [t_k; +\infty), \end{cases} \tag{11}$$

причем:

$$\mu(t) = \tilde{\mu}(t) - U_1(1,t), \quad q(t) = \tilde{\nu}(t) - U_1(H_{k+1}, t). \tag{12}$$

В задаче (11) мы будем считать, что $q(t) \in C^2[t_k; +\infty)$, $q(t_k) = q'(t_k) = q''(t_k) = 0$, что существуют числа $b_1$, $b_2 > 0$, $\gamma_0 \in [0; 1/8]$, такие, что

$$\sup\left\{|q'(t)|, |q''(t)|\right\} \le b_1, \quad \forall t \ge t_k \quad |q(t)|^2 \le \frac{b^2}{(1+t^2)^{(1+\gamma_0)/2}}. \tag{13}$$

Мы считаем $q(t)$ неизвестной функцией. Вместо нее для обратной задачи измерим при $x = 1$ температуру $U_2(1,t)$, $t \ge t_k$. Нам нужно, используя $\mu(t)$, определить функцию $q(t)$, такую, что при подстановке ее в условие $U_1(H_{k+1}, t) = q(t)$ все остальные условия задачи (11) были бы выполнены.

Для дальнейшего нам понадобятся обозначения: пусть вместо функции $\mu(t)$ задана функция $\mu_\delta(t) \in C(0; +\infty)$, $\mu_\delta(t_k) = 0$, что $\sup\limits_{t \in [t_k; +\infty)} |\mu_\delta(t) - \mu(t)| \le \delta$, где $\delta > 0$ — заданная ошибка.

Введем также $\dfrac{\partial U_2(1,t)}{\partial x} = g(t)$, $t \ge t_k$, в случае, когда дана $\mu_\delta(t)$, мы получаем $g_\delta(t)$, такую, что существует $\sigma(\delta) > 0$, что $\sup\limits_{t \in [t_k; +\infty)} |g_\delta(t) - g(t)| < \sigma(\delta)$.

В дальнейшем также всякую точно известную величину будем обозначать индексом 0: $\mu_0(t)$ — точное значение $\mu(t)$.

Заметим, что дальнейшее решение обратной задачи (11) является переносом работы [10] на случай полупрямой.

**Преобразование Фурье**

Введем класс $M_r$:

$$M_r = \left\{ q(t)e^{-(t-t_k)} : q(t) \in C^2(t_k; +\infty), \quad \int\limits_{t_k}^{+\infty} |q(t)e^{-(t-t_k)}|^2 dt + \int\limits_{t_k}^{+\infty} |q'(t)|^2 e^{-2(t-t_k)} dt \le r^2 \right\}, \tag{14}$$

$r > 0$ — некоторое известное число.

Предположим, что при $\mu(t), g(t) \in C^1[0; +\infty)$ существует решение $q(t)$ обратной задачи (11) и нам известны приближения этих функций $\mu_\delta(t)$, $g_\delta(t) \in C^1[t_k; +\infty)$ с ошибкой $\delta > 0$, что

$$\sup_{t \in [t_k; +\infty)} |\mu_\delta(t) - \mu(t)| < \delta, \qquad \sup_{t \in [t_k; +\infty)} |g_\delta(t) - g(t)| < 2\sqrt{2\delta d}. \tag{15}$$

Требуется определить приближенное решение $q_\delta(t)$ задачи (11)–(12) по $\mu_\delta(t)$, $g_\delta(t)$, $\delta$ и $M_r$.

Для решения задачи применим преобразование Фурье по переменной $t$. Чтобы применить его, сделаем замену:

$$z(x,t) = e^{-t+t_k} U_1^{k+1}(x,t), \qquad x \in [H_{k+1}; +\infty), t > t_k. \tag{16}$$

Тогда задача (11) преобразуется в:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \dfrac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} - z(x,t), \qquad x \in (H_{k+1}; 1), \qquad t \in (t_k; +\infty), \\ z(x, t_k) = 0, \qquad x \in [H_{k+1}; 1], \qquad \dfrac{\partial z(1,t)}{\partial x} = g(t)e^{-(t-t_k)} \equiv p(t), t \in [t_k; +\infty), \\ z(H_k, t) = q(t)e^{-(t-t_k)} \equiv h(t), \qquad t \in [t_k; +\infty), \qquad z(1,t) = \mu_\delta(t)e^{-(t-t_k)} \equiv s(t), t \in [t_k; +\infty), \end{cases} \tag{17}$$

где $q(t)e^{-(t-t_k)} \in M_r$.

Введем оператор $F$, отображающий $L_2[t_k;+\infty) \cap L_1[H_{k+1};1]$ на $L_2[t_k;+\infty) \cap C_0(-\infty;+\infty)$ с помощью формулы:

$$\hat{q}(\tau) \equiv F[q(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)e^{-i\tau t}dt, \tag{18}$$

$$q(t) \in L_2[t_k;+\infty) \cap L_1[t_k;+\infty), \qquad q(t) = q(t), \qquad t > t_k, \qquad q(t) = 0, \qquad t \le t_k.$$

В результате Фурье-преобразования задача (17) примет вид:

$$\begin{cases} (1+i\tau)\hat{z}(x,\tau) = a_1^2 \dfrac{\partial^2 \hat{z}(x,\tau)}{\partial x^2}, \qquad x \in [H_{k+1};1], \\ \hat{z}(1,\tau) = \hat{s}_\delta(\tau), \qquad a_1 \dfrac{\partial \hat{z}(1,\tau)}{\partial x} = \hat{p}_\delta(\tau), \qquad -\infty < \tau < +\infty. \end{cases} \tag{19}$$

Решение задачи (19) имеет вид:

$$\hat{z}(x,\tau) = A_1(\tau)e^{i\eta x} + A_2(\tau)e^{-i\eta x}, \tag{20}$$

где $\eta = \dfrac{\sqrt{1+i\tau}}{a_1}$, функции $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ необходимо найти.

Из (20) находим функцию $\hat{h}(\tau)$:

$$\hat{h}(\tau) = \hat{z}(H_{k+1},\tau), \qquad -\infty < \tau < +\infty. \tag{21}$$

Из решения (20), учитывая (21), получаем соотношение:

$$\tilde{h}(\tau) = T^1(\tau)\hat{s}(\tau) + T^2(\tau)\hat{p}(\tau), \tag{22}$$

где $T^1(\tau) = \mathrm{ch}(H_k\eta)$, $T^2(\tau) = -\,\mathrm{sh}(H_k\eta)/(a_1\eta)$.

Обозначим $T^1(\tau)\hat{s}(\tau) + T^2(\tau)\hat{p}(\tau)$ как $T\{\hat{s}(\tau), \hat{p}(\tau)\}$,

$$D(T) = \{\hat{s}(\tau), \hat{p}(\tau) : \hat{s}(\tau) \in L_2(-\infty;+\infty), \hat{p}(\tau) \in L_2(-\infty;+\infty), T\{\hat{s}(\tau),\hat{p}(\tau) \in L_2(-\infty;+\infty)\}\}.$$

Из (22) следует, что оператор $T$ линеен и неограничен.

Пусть $\hat{h}(\tau) = T\{\hat{s}(\tau), \hat{p}(\tau)\}$, $\hat{s}(\tau) = F[s(t)]$, $\hat{p}(\tau) = F[p(t)]$ и $\hat{s}_\delta(\tau) = F[\mu_\delta(t)e^{-(t-t_k)}]$, $\hat{p}_\delta(\tau) = F[g_\delta(t)e^{-(t-t_k)}]$. Тогда из (15) и [10] следует, что:

$$||\hat{s}(\tau) - \hat{s}_\delta(\tau)||_{L_2[H_{k+1};+\infty)} \le \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \qquad ||\hat{p}(\tau) - \hat{p}_\delta(\tau)||_{L_2[H_{k+1};+\infty)} \le 2\sqrt{2\delta d}. \tag{23}$$

Множество $M_r$ преобразуется с помощью $F$ во множество $\hat{M}_r \supset F[M_r]$, определенное с помощью формулы:

$$\hat{M}_r = \left\{ \hat{h}(\tau) : \hat{h}(\tau) \in L_2[0;+\infty), \int_0^{+\infty} (1+\tau^2)|\hat{h}(\tau)|^2 d\tau \le 2r^2 \right\}. \tag{24}$$

Из того, что $h(t) \in M_r$, следует, что $\hat{h} \in \hat{M}_r$.

**Оценки задачи (22)–(24)**

Для решения задачи (22)–(24) используем метод проекционной регуляризации ( [11], часть 4, раздел 4.1). Этот метод основан на регуляризации семейства операторов $\{T_\alpha : \alpha > 0\}$, заданных выражением:

$$T_\alpha\{\hat{s}(\tau), \hat{p}(\tau)\} = \begin{cases} T_\alpha\{\hat{s}(\tau), \hat{p}(\tau)\}, & |\tau| \le \alpha, \\ 0, & |\tau| > \alpha. \end{cases} \tag{25}$$

Определим регуляризованное решение $\hat{q}_\delta^\alpha(\tau)$ задачи (22) формулой:

$$\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) = T_\alpha\{\hat{s}_\delta(\tau), \qquad \hat{p}_\delta(\tau)\}, \qquad |\tau| \ge 0, \qquad \alpha > 0, \qquad \delta > 0. \tag{26}$$

Для выбора параметра регуляризации $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta, r)$ в (26) рассмотрим оценку:

$$||\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{h}(\tau)|| \leq ||\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{h}^\alpha(\tau)|| + ||\hat{h}^\alpha(\tau) - \hat{h}(\tau)||, \tag{27}$$

где $\hat{h}^\alpha(\tau) = T_\alpha\{\hat{s}(\tau), \hat{p}(\tau)\}$.

Из [10] следует, что для всякого достаточно малого $\delta$ справедлива оценка:

$$||\hat{h}_\delta(t) - h(t)|| \leq d_1 r \ln^2 \delta.$$

Поскольку $h_\delta(t) = q_\delta(t)e^{-t+t_k}$, то, используя нелинейный метод проекционной регуляризации, получаем оценку:

$$||q_\delta(t) - q(t)|| \leq \frac{\bar{d}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\psi(\delta)}}}{\ln^{\gamma_0/2}\left(\frac{1}{\psi(\delta)}\right)},$$

где $\bar{d}$ есть некая постоянная, $\psi(\delta) = d_1 r \ln^{-2}(\delta)$, $d_1 = \text{const}$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. К вопросу о методах определения температуры поверхности тела. *Ж. вычисл. матем. и матем. физики.* 1967:7(4):910–914.
2. Леонов А. С. *Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ.* М.: URSS: Либроком; 2013. 326 с.
3. Романов В. Г. *Обратные задачи математической физики.* М.: Наука; 1984. 265 с.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач.* М.: Наука; 1979. 285 с.
5. Васин В. В. Об устойчивом вычислении производной в пространстве $C(-\infty,\infty)$. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1973:13(6):1383–1389.
6. Ягола А. Г., Ван Янфей, Степанова И. Э., Титаренко В. Н. *Обратные задачи и методы их решения.* М.: БИНОМ; 2014. 216 с.
7. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи.* Новосибирск: Сиб. науч. изд-во; 2009. 458 с.
8. Денисов В. Я. *Введение в теорию обратных задач.* М.: МГУ; 1994. 207 с.
9. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. *Лекции по математической физике.* М.: МГУ; 1993. 453 с.
10. Tanana V. P., Sidikova A. I., Markov B. A. An Inverse Heat Conduction Boundary Problem for a Two-Part Rod with Different Thermal Conductivity. *Eurasian J. of Math. and Comp. App.* 2021:9(1):69–86.
11. Tanana V. P., Sidikova A. I. *Optimal Methods for Ill-Posed Problems: With Applications to Heat Conduction.* Berlin: De Gruyter; 2018. 138 p.