

## РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ПЕРЕНОСА ОГРАНИЧЕНИЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ МЕТОДОМ КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

И. В. Бычин<sup>1,2,a</sup>, А. В. Гореликов<sup>1,2,b</sup>, А. В. Ряховский<sup>1,2,c</sup>

<sup>1</sup> Сургутский филиал федерального государственного автономного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Сургут, Российская Федерация

<sup>2</sup> Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация

<sup>a</sup> bychin\_iv@surgu.ru, <sup>b</sup> gorelikov\_av@surgu.ru, <sup>c</sup> ryakhovskij\_av@surgu.ru

**Аннотация:** в статье рассматривается построение консервативной разностной схемы для уравнения магнитной индукции в сферических координатах. В основе подхода лежит интегральная форма закона Фарадея, применяемая к граням контрольных объемов. Дискретизация выполнена методом контрольного объема с использованием полностью неявной схемы и алгоритма переноса ограничения (СТА). В статье приводится вычисление метрических параметров расчетной сетки и коэффициентов дискретного аналога уравнения магнитной индукции в сферических координатах. Разобран специальный случай аппроксимации радиальной составляющей напряженности электрического поля на ребрах контрольного объема, лежащих на полярной оси ( $\theta = 0, \pi$ ). Разработанная численная схема реализована в авторском программном комплексе CVMHD для моделирования магнетогидродинамических течений и гидромагнитного динамо в сферических слоях.

**Ключевые слова:** уравнение магнитной индукции, дискретизация, сферический слой, геодинамо.

**Благодарности:** работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ по теме № FNEF-2024-0001 «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах» (1023032100070-3-1.2.1).

**Для цитирования:** Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Реализация алгоритма переноса ограничения при построении дискретного аналога уравнения магнитной индукции методом контрольного объема в сферических координатах. *Успехи кибернетики*. 2026;7(1):24–32.

Поступила в редакцию: 28.02.2026.

В окончательном варианте: 15.03.2026.

## A CONTROL-VOLUME SCHEME FOR THE MAGNETIC INDUCTION EQUATION IN SPHERICAL COORDINATES WITH CONSTRAINED TRANSPORT

I. V. Bychin<sup>1,2,a</sup>, A. V. Gorelikov<sup>1,2,b</sup>, A. V. Ryakhovskij<sup>1,2,c</sup>

<sup>1</sup> Surgut Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”, Surgut, Russian Federation

<sup>2</sup> Surgut State University, Surgut, Russian Federation

<sup>a</sup> bychin\_iv@surgu.ru, <sup>b</sup> gorelikov\_av@surgu.ru, <sup>c</sup> ryakhovskij\_av@surgu.ru

**Abstract:** this paper presents a conservative finite-difference scheme for the magnetic induction equation in spherical coordinates. We based the approach on the integral form of Faraday’s law of induction applied to the faces of control volumes. We performed the discretization with the finite volume method using a fully implicit scheme and constrained transport (CT). We derived the grid metric terms and the coefficients of the discrete form of the magnetic induction equation in spherical coordinates. We analyzed a special case of approximating the radial component of the electric field at control-volume edges located on the polar axis ( $\theta = 0, \pi$ ). We implemented the resulting numerical scheme in the CVMHD code developed by the authors for simulations of magnetohydrodynamic flows and hydromagnetic dynamo in spherical shells.

**Keywords:** magnetic induction equation, discretization, spherical shell, geodynamo.

**Acknowledgements:** this study is a part of the government contract No. FNEF-2024-0001 Development and Implementation of Trusted AI Systems Using New Mathematical and Algorithmic Methods; Fast Computing Models on Domestic Hardware with the Kurchatov Institute (1023032100070-3-1.2.1).

*Cite this article:* Bychin I. V., Gorelikov A. V., Ryakhovskij A. V. A Control-Volume Scheme for the Magnetic Induction Equation in Spherical Coordinates with Constrained Transport. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(1):24–32.

*Original article submitted:* 28.02.2026.

*Revision submitted:* 15.03.2026.

## Введение

В настоящее время имеется достаточное разнообразие вычислительных программ для численного моделирования МГД-течений в различных постановках. В качестве примеров программ для решения задач вычислительной астрофизики и моделирования течений плазмы можно привести следующие: CLT и M3D-C1 [1], Pencil [2], PLUTO [3] и его вариант для графических ускорителей gPLUTO [4], H-AMR [5], Dedalus [6], CANS+ [7], SMAUG+ [8]. Широко и разнообразие численных методов, задействованных в данных вычислительных программах. Коды CLT, PENCIL, M3D-C1 реализуют методы конечных разностей, из них CLT и PENCIL основаны на явных схемах, M3D-C1 — на неявных. PLUTO, H-AMR и CANS+ используют метод контрольного объема. Dedalus относится к спектральным кодам. SMAUG+ основан на методе конечных элементов.

Отдельным направлением является моделирование магнитогидродинамического динамо, в первую очередь для проведения вычислительных экспериментов по изучению течений в жидком ядре Земли, которые приводят к формированию геомагнитного поля — эффект геодинамо. Среди подобных вычислительных программ можно отметить [9]: спектральные и псевдо-спектральные коды — UCSC, MagIC, SBS (Simitev-Busse-Silva), Rayleigh, SPmodel, Calypso, ETH, PARODY; коды, основанные на методе конечных элементов, — SFEMaNS, GeoFEM. В данной области популярны спектральные и псевдоспектральные методы, поскольку разложение по сферическим гармоникам является достаточно естественным подходом в сферической геометрии.

Наряду с разработкой собственных вычислительных программ распространена практика модификации свободного программного обеспечения с открытым исходным кодом, например, платформы OpenFOAM. Поскольку OpenFOAM имеет ограниченные возможности по моделированию МГД-течений, разработчики зачастую рассматривают лишь случай постоянного внешнего магнитного поля [10–12], т. е. математической моделью задачи в данной постановке является система из уравнения Навье–Стокса, закона Ома и уравнения Пуассона для электрического потенциала. Отдельно можно выделить библиотеку EOF [13], которая обеспечивает взаимодействие между модулями для моделирования электромагнетизма из пакета Elmer FEM и гидродинамическими решателями OpenFOAM, что позволяет скомпенсировать недостатки OpenFOAM с точки зрения решения задач МГД.

Также актуальным направлением является разработка численных схем, обеспечивающих солленоидальность численного магнитного поля. Примерами подобных алгоритмов, предложенных за последние годы, могут служить: методы, основанные на введении магнитного векторного потенциала и использовании вспомогательных скалярных переменных (SAV — scalar auxiliary variable) [14]; использование базиса, состоящего из солленоидальных функций [15]; различные варианты алгоритма переноса ограничения (CTA — Constrained Transport Algorithm), в которых бездивергентность поля обеспечивается путем специального выбора дискретизации для уравнения магнитной индукции [16–21]; методы коррекции (divergence cleaning), основанные на введении поправки, обеспечивающей солленоидальность скорректированного магнитного поля [22].

## Консервативная разностная схема для уравнения магнитной индукции

В авторской работе [23] подробно описана процедура построения консервативной разностной схемы для уравнения индукции магнитного поля (1) в произвольных ортогональных криволинейных координатах  $\{x_\alpha; \alpha = 1, 2, 3\}$ .

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}. \quad (1)$$

В формуле (1)  $t$  — время,  $\mathbf{u}$  — скорости жидкости,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции,  $\nu_m = c^2/(4\pi\sigma)$  — коэффициент магнитной вязкости,  $\sigma$  — удельная электропроводность,  $c$  — скорость света. В основе процедуры дискретизации лежит интегральная форма закона Фарадея (2), применяемая к граням контрольных объемов.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = -c \oint_{\partial S} \mathbf{E} d\mathbf{r}, \quad (2)$$

где напряженность электрического поля в модели резистивной магнитной гидродинамики имеет вид:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{B}. \quad (3)$$

Дискретизация выполняется методом контрольного объема с использованием полностью неявной схемы и алгоритма переноса ограничения (СТА).

Расчетная область  $G$  разрезается системой координатных поверхностей на непересекающиеся контрольные объемы  $D_{(i)} := D_{i_1 i_2 i_3}$ ,  $i_\alpha = 1, \dots, n_\alpha$ ; здесь и далее для каждого направления  $x_\alpha$  количество контрольных объемов задается числом  $n_\alpha$ , а количество координатных поверхностей равно  $(n_\alpha + 1)$ ,  $(i)$  — краткое обозначение для набора индексов  $(i_1, i_2, i_3)$ . Полученная расчетная сетка содержит точки четырех типов:

- точки с целыми индексами  $P_{(i)}$  (центры контрольных объемов);
- точки с одним полуцелым индексом  $P \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := P_{h_\alpha^k(i)}$  (центры граней, где вычисляются соответствующие компоненты скорости и магнитной индукции);
- точки с двумя полуцелыми индексами  $P \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} := P_{h_\beta^p h_\alpha^k(i)}$  (центры ребер, где вычисляются компоненты напряженности электрического поля);
- точки с тремя полуцелыми индексами  $P \begin{bmatrix} q & p & k \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix} := P_{h_\gamma^q h_\beta^p h_\alpha^k(i)}$  (вершины).

Положение каждой точки в расчетной сетке задается с помощью оператора сдвига:

$$h_\alpha^k(i) := h_\alpha^k(i_1, i_2, i_3) = \left( h_\alpha^k(i_1), h_\alpha^k(i_2), h_\alpha^k(i_3) \right), \quad h_\alpha^k(i_\beta) := i_\beta + \frac{k}{2} \delta_{\alpha\beta}, \quad (4)$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера, верхний индекс  $k$  принимает значения во множестве целых чисел и определяет направление и величину сдвига индекса  $i_\beta$  по  $x_\alpha$ , нижние греческие индексы определяют координату, по которой происходит смещение, а латинские индексы над ними принимают целые значения и определяют величину сдвига вдоль соответствующей координаты. Вводятся следующие обозначения для геометрических элементов расчетной сетки:  $\delta V_{(i)}$  — объем  $D_{(i)}$ ;  $S_\alpha \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$  — грань контрольного объема  $D_{(i)}$ , ортогональная координатной линии  $x_\alpha$  с центром в точке  $P \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ ,  $\delta S_\alpha \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$  — площадь соответствующей грани;  $l_\gamma \begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = S_\beta \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \beta \end{bmatrix} \cap S_\alpha \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$  — ребро контрольного объема  $D_{(i)}$  с центром в точке  $P \begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ , вдоль координатной линии  $x_\gamma$  ( $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ );  $\delta l_\gamma \begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  — длина соответствующего ребра.

Дискретный аналог уравнения магнитной индукции получен путем интегрирования по грани  $S_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$  в (2) и интегрирования по времени с использованием полностью неявной схемы [23]:

$$\frac{1}{\delta t} \left( B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} - B_\alpha^0 \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} \right) \delta S_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = -c \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,1} p E_\gamma \begin{bmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{bmatrix} \delta l_\gamma \begin{bmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{bmatrix}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, k \in \{-1, 1\}), \quad (5)$$

где  $B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$  — сеточное значение компонент индукции магнитного поля  $B_\alpha$  на текущем временном слое  $t$  в центре грани  $S_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ ,  $B_\alpha^0 \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$  — сеточное значение  $B_\alpha$  на предыдущем временном слое  $t_0$ ;  $E_\gamma \begin{bmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{bmatrix}$  — сеточное значение  $E_\gamma$  в центре ребра  $l_\gamma \begin{bmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{bmatrix}$ ;  $\delta t = t - t_0$  — шаг по времени;  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  — символ Леви-Чивиты. Решение дискретного аналога уравнения индукции (5) с точностью до ошибок округления удовлетворяет сеточному уравнению неразрывности [23]. В [23] подробно рассматривается аппроксимация электрического поля (3): ее кондуктивной составляющей  $\left( \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{B} \right)$  и отдельно составляющей, индуцированной конвекцией  $\left( -\frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right)$  по схеме QUICK [24, 25]. В итоге дискретный аналог уравнения индукции (5) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \left( B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} - B_\alpha^0 \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} \right) \delta S_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = & -a_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p=-1,1} a_{\alpha\beta\gamma} \begin{bmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} 2p k \\ \beta \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, k \in \{-1, 1\}). \quad (6) \end{aligned}$$

В уравнении (6) коэффициенты  $a_{\alpha\beta\gamma}$  вычисляются по формулам:

$$a_{\alpha\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = d_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta \tilde{l}_\alpha \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - p (\Theta(-pF_{\beta\gamma}) F_{\beta\gamma}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma, p, k \in \{-1, 1\}). \quad (7)$$

Коэффициенты диффузии  $d_\gamma$  в (8) вычисляются в центрах ребер  $l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  контрольного объема  $D(i)$ :

$$d_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = (\nu_m \delta l_\gamma \delta \tilde{S}_\gamma^{-1}) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma, p, k \in \{-1, 1\}), \quad (8)$$

$\delta \tilde{S}_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  – площадь координатной поверхности  $x_\gamma = const$  внутри замкнутого контура  $\partial \tilde{S}_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ , образованного координатными линиями  $x_\alpha$  и  $x_\beta$ , проходящими через ближайшие, соседние с  $P \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ , четыре точки  $P \begin{bmatrix} p \pm 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, P \begin{bmatrix} p & k \pm 1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ ;  $\delta \tilde{l}_\alpha \begin{bmatrix} p \pm 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \delta \tilde{l}_\beta \begin{bmatrix} p & k \pm 1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  – длины сторон контура  $\partial \tilde{S}_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  (см. рис. 1).

В формуле (7)  $\Theta(X) = \begin{cases} 0, & X < 0 \\ 1, & X \geq 0 \end{cases}$  – функция Хэвисайда,  $F_{\beta\gamma}$  – коэффициенты, характеризующие интенсивность и влияние конвекции на изменение магнитного потока, которые определяются как произведение компоненты скорости  $u_\beta$  на длину ребра  $\delta l_\gamma$ :

$$F_{\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma, p, k \in \{-1, 1\}). \quad (9)$$

Коэффициенты  $a_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$  в уравнении (6) определяются по формуле:

$$a_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1, 1} a_{\alpha\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (10)$$

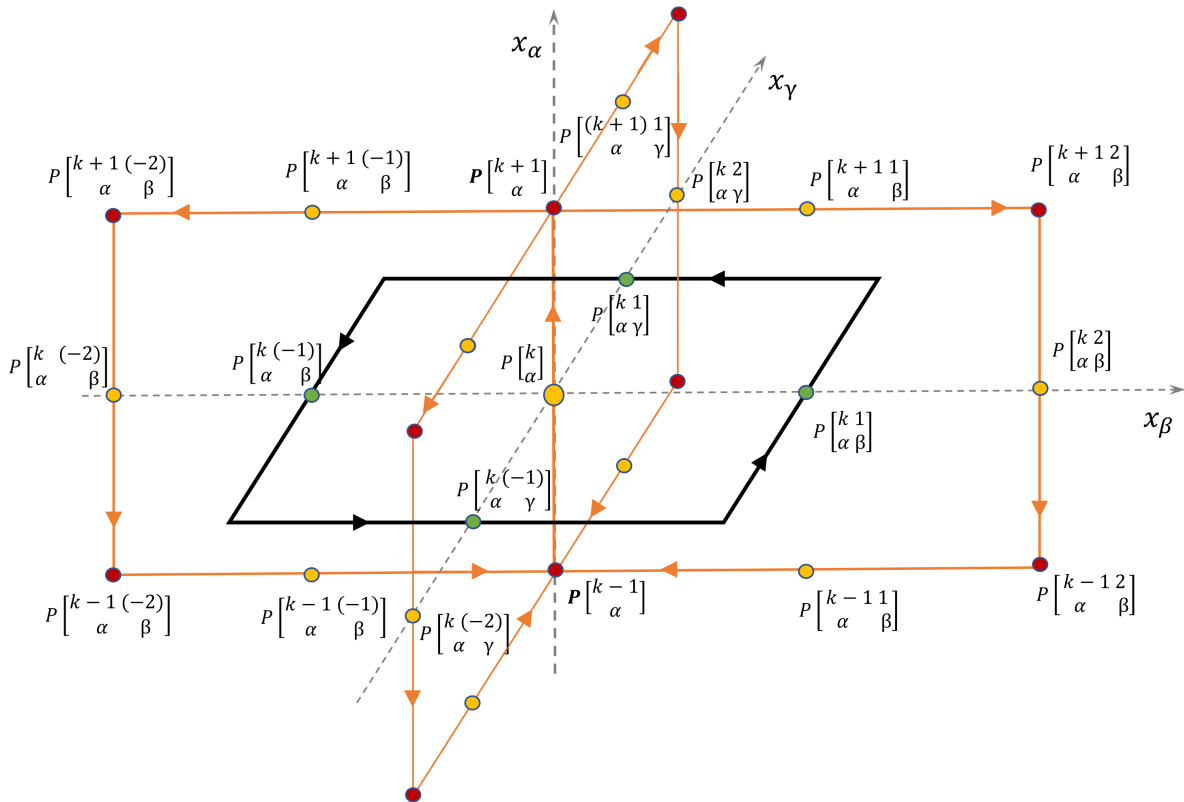


Рис. 1. Координатная поверхность, ортогональная оси  $x_\gamma$

Источниковый член  $\Omega_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$  в уравнении (6) имеет вид [23]:

$$\Omega_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] = \Omega_\alpha^j \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] + \Omega_\alpha^Q \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] + \Omega_\alpha^F \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] - \left( \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} \left( d_\gamma \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \left\{ \delta \tilde{l}_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] - \delta \tilde{l}_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} 2p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right\} - p \left( \Theta(-p F_{\beta\gamma}) F_{\beta\gamma} \right) \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) \right) B_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right], \quad (11)$$

где

$$\Omega_\alpha^j \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] = k \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma)}}^3 \sum_{p=-1,1} p d_\gamma \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \left\{ (B_\beta \delta \tilde{l}_\beta) \left[ \begin{smallmatrix} p \\ \beta \end{smallmatrix} \right] - (B_\beta \delta \tilde{l}_\beta) \left[ \begin{smallmatrix} p 2k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right\}, \quad (12)$$

$$\Omega_\alpha^Q \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] := \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} (-p) F_{\beta\gamma} \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \left( B_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] + f_Q^\beta \left( B_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) \right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha^F \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] &= \\ &= \sum_{\substack{\beta, \gamma=1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^3 \sum_{p=-1,1} p F_{\alpha\gamma} \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \left( \Theta \left( u_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k-1 \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] + \Theta \left( -u_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k+1 \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] + f_Q^\alpha \left( B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) \right). \quad (14) \end{aligned}$$

При вычислении источникового члена сеточные значения компонент  $\mathbf{B}$ , входящие в правую часть, берутся с предыдущей итерации, что соответствует подходу отложенной коррекции [24]. Функции  $f_Q^\beta$  в (13) и  $f_Q^\alpha$  в (14), возникающие вследствие применения схемы QUICK, имеют вид:

$$\begin{aligned} f_Q^\alpha \left( B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) &= \Theta \left( u_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) \left( k_a \left( B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k-3 \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] - B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k-1 \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) + k_c \left( B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k+1 \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] - B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k-1 \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) \right) + \\ &+ \Theta \left( -u_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} p k \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) \left( k_b \left( B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k-1 \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] - B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k+1 \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) + k_d \left( B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k+3 \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] - B_\beta \left[ \begin{smallmatrix} p k+1 \\ \beta \alpha \end{smallmatrix} \right] \right) \right). \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс указывает направление, вдоль которого аппроксимируется конвективный поток;

$$k_a = \frac{(x-b)(x-c)}{(b-a)(c-a)}, \quad k_c = \frac{(x-b)(x-a)}{(c-b)(c-a)}, \quad k_b = \frac{(x-c)(x-d)}{(c-b)(d-b)}, \quad k_d = \frac{(x-c)(x-b)}{(d-c)(d-b)}$$

вычисляются подстановками:

$$x = x_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right], \quad a = x_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} k-3 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right], \quad b = x_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} k-1 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right], \quad c = x_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} k+1 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right], \quad d = x_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} k+3 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right].$$

Реализация представленной схемы дискретизации в конкретной системе координат сводится к вычислению метрических параметров расчетной сетки, затем коэффициентов  $d_\gamma$  и  $F_{\beta\gamma}$  по формулам (8), (9) и далее остальных коэффициентов и слагаемых дискретного аналога (6).

Далее разбирается важный с точки зрения моделирования гидромагнитного динамо случай сферических координат:  $\{x_1 = r, 0 \leq r_{in} \leq r \leq r_o; x_2 = \theta, 0 \leq \theta \leq \pi; x_3 = \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ ,  $r_{in}$ ,  $r_o$  — соответственно, внутренний и внешний радиус сферического слоя. Область разбивается координатными поверхностями на контрольные объемы  $D$  (здесь и далее для сокращения записей индекс  $(i) = i_1 i_2 i_3$  будем опускать). Рассмотрим типичный внутренний контрольный объем  $D$  с центром в точке  $P$ . Координаты граней  $x_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} \pm 1 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$  контрольного объема  $D$  определяются конкретной сеткой в сферических координатах, после чего координаты центров контрольных объемов вычисляются как  $x_\alpha(P) = 0,5 \left( x_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} -1 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] + x_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} +1 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] \right)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Далее вычисляются метрические параметры расчетной сетки по формулам (16)–(32), где  $p, k \in \{-1, 1\}$ .

Площади граней  $S_\alpha \left[ \begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]$  контрольного объема  $D$ :

$$\delta S_1 \left[ \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = x_1^2 \left[ \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right] \left( \cos \left( x_2 \left[ \begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] \right) - \cos \left( x_2 \left[ \begin{smallmatrix} +1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] \right) \right) \left( x_3 \left[ \begin{smallmatrix} +1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] - x_3 \left[ \begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] \right), \quad (16)$$

$$\delta S_1 \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} = x_1^2 \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} \left( \cos \left( x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) - \cos \left( x_2 \begin{bmatrix} +1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \right) \left( x_3 \begin{bmatrix} +1 \\ 3 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right), \quad (17)$$

$$\delta S_3 \begin{bmatrix} k \\ 3 \end{bmatrix} = x_1 \left( x_1 \begin{bmatrix} +1 \\ 1 \end{bmatrix} - x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left( x_2 \begin{bmatrix} +1 \\ 2 \end{bmatrix} - x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right). \quad (18)$$

Центры граней:

$$P \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} = \left( x_1 \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \right), \quad P \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} = \left( x_1, x_2 \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix}, x_3 \right), \quad P \begin{bmatrix} k \\ 3 \end{bmatrix} = \left( x_1, x_2, x_3 \begin{bmatrix} k \\ 3 \end{bmatrix} \right). \quad (19)$$

Длины ребер  $\delta l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  ( $\delta l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \delta l_\gamma \begin{bmatrix} k & p \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ ) контрольного объема  $D$ :

$$\delta l_1 \begin{bmatrix} p & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} +1 \\ 1 \end{bmatrix} - x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

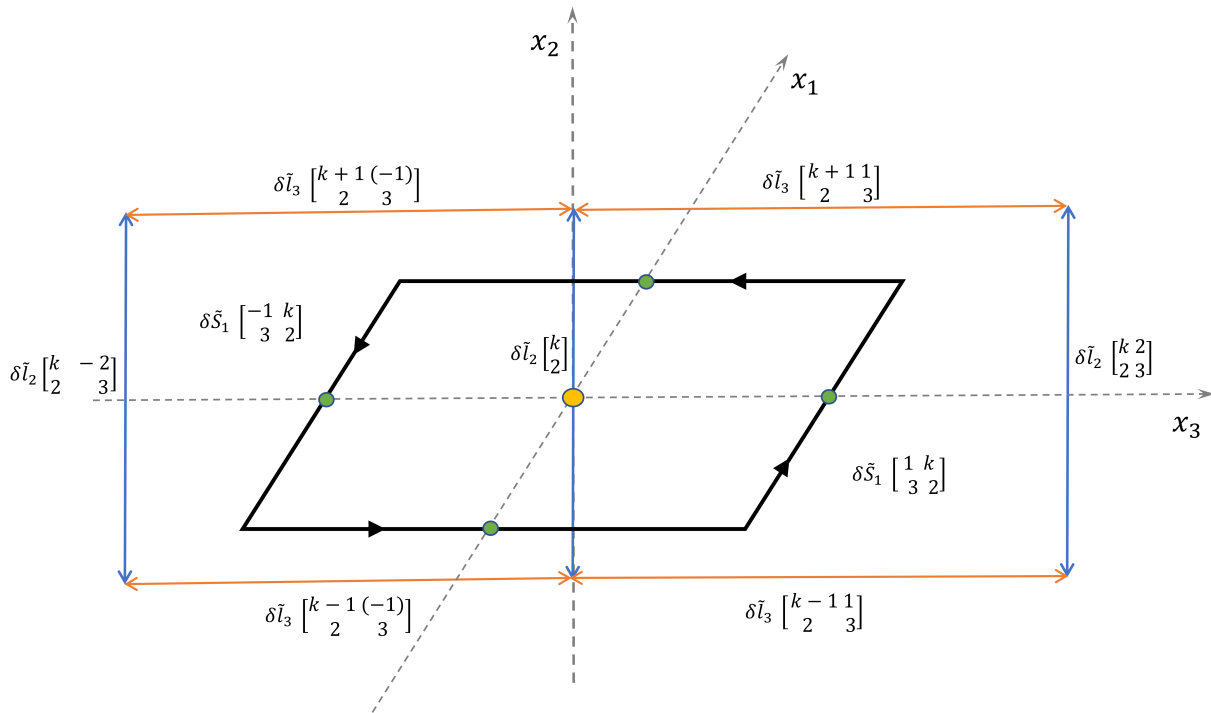
$$\delta l_2 \begin{bmatrix} p & k \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \left( x_2 \begin{bmatrix} +1 \\ 2 \end{bmatrix} - x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \quad (21)$$

$$\delta l_3 \begin{bmatrix} p & k \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \sin \left( x_2 \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} \right) \left( x_3 \begin{bmatrix} +1 \\ 3 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right). \quad (22)$$

Координаты точек в центрах ребер:

$$P \begin{bmatrix} p & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \left( x_1, x_2 \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}, x_3 \begin{bmatrix} k \\ 3 \end{bmatrix} \right), \quad P \begin{bmatrix} p & k \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \left( x_1 \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \begin{bmatrix} k \\ 3 \end{bmatrix} \right), \quad P \begin{bmatrix} p & k \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \left( x_1 \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \begin{bmatrix} k \\ 3 \end{bmatrix} \right). \quad (23)$$

Для каждого направления вычисляются площади  $\delta \bar{S}_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  и длины сторон  $\delta \bar{l}_\alpha \begin{bmatrix} k & p \pm 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$  контуров  $\partial \bar{S}_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ , которые строятся вокруг ребер каждого контрольного объема  $D$ .



**Рис. 2.** Метрические параметры контуров, ортогональных радиальной координате

Для направления вдоль радиальной координаты (см. рис. 2):

$$\delta \bar{S}_1 \begin{bmatrix} p & k \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = x_1^2 \left( \cos \left( x_2 \begin{bmatrix} k-1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) - \cos \left( x_2 \begin{bmatrix} k+1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \right) \left( x_3 \begin{bmatrix} p+1 \\ 3 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} p-1 \\ 3 \end{bmatrix} \right), \quad (24)$$

$$\delta \bar{l}_2 \begin{bmatrix} k & p \pm 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = x_1 \left( x_2 \begin{bmatrix} k+1 \\ 2 \end{bmatrix} - x_2 \begin{bmatrix} k-1 \\ 2 \end{bmatrix} \right); \quad (\delta \bar{l}_\theta = r \Delta \theta), \quad (25)$$

$$\delta \bar{l}_3 \begin{bmatrix} k \pm 1 & p \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = x_1 \sin \left( x_2 \begin{bmatrix} k \pm 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \left( x_3 \begin{bmatrix} p+1 \\ 3 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} p-1 \\ 3 \end{bmatrix} \right); \quad (\delta \bar{l}_\varphi = r \sin \theta \Delta \varphi). \quad (26)$$

Для направления вдоль полярной координаты:

$$\delta\bar{S}_2 \begin{bmatrix} p & k \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 0,5 \sin(x_2) \left( x_3 \begin{bmatrix} k+1 \\ 3 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} k-1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \left( x_1^2 \begin{bmatrix} p+1 \\ 1 \end{bmatrix} - x_1^2 \begin{bmatrix} p-1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad (27)$$

$$\delta\bar{l}_3 \begin{bmatrix} k & p \pm 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} p \pm 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(x_2) \left( x_3 \begin{bmatrix} k+1 \\ 3 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} k-1 \\ 3 \end{bmatrix} \right); \quad (\delta\bar{l}_\varphi = r \sin \theta \Delta\varphi), \quad (28)$$

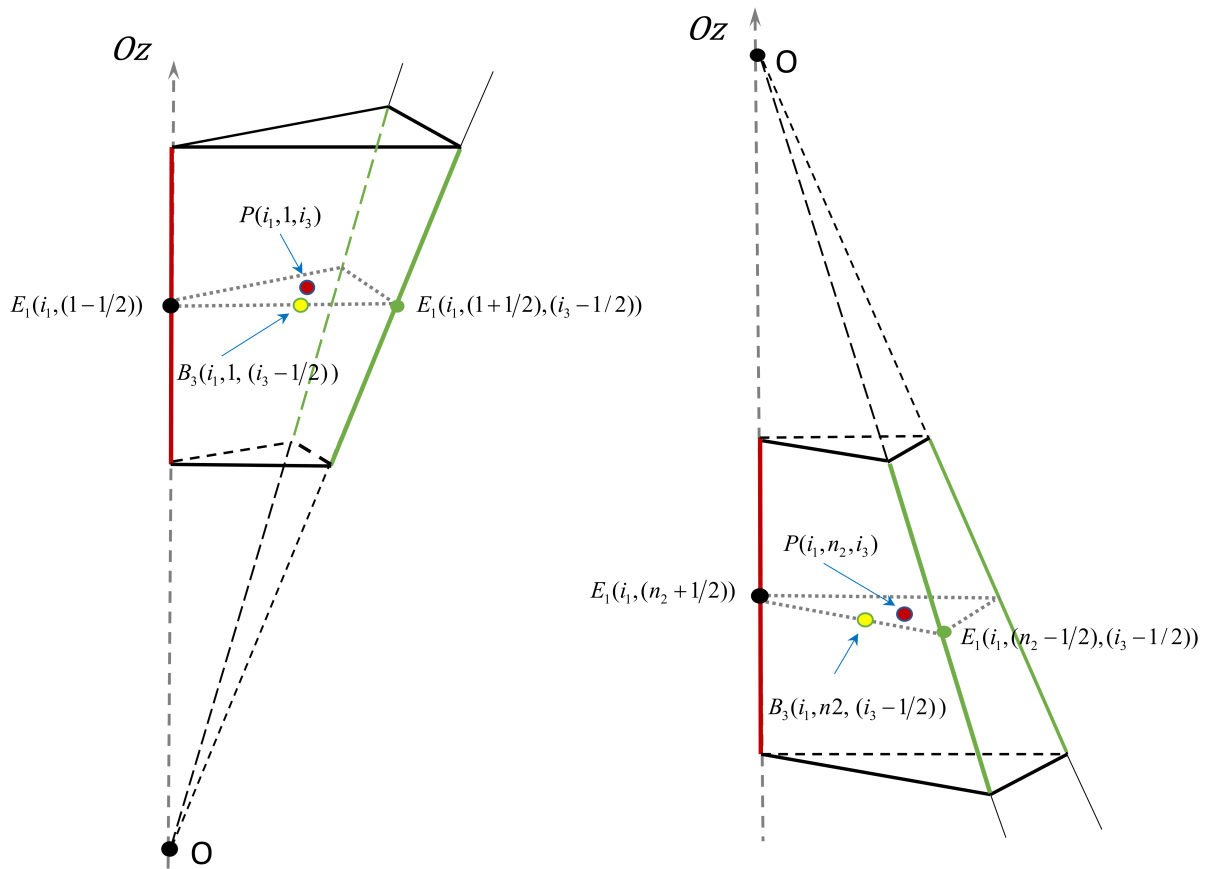
$$\delta\bar{l}_1 \begin{bmatrix} k \pm 1 & p \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} p+1 \\ 1 \end{bmatrix} - x_1 \begin{bmatrix} p-1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (\delta\bar{l}_r = \Delta r). \quad (29)$$

Для направления вдоль азимутальной координаты:

$$\delta\bar{S}_3 \begin{bmatrix} p & k \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0,5 \left( x_1^2 \begin{bmatrix} k+1 \\ 1 \end{bmatrix} - x_1^2 \begin{bmatrix} k-1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left( x_2 \begin{bmatrix} p+1 \\ 2 \end{bmatrix} - x_2 \begin{bmatrix} p-1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \quad (30)$$

$$\delta\bar{l}_1 \begin{bmatrix} k & p \pm 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} k+1 \\ 1 \end{bmatrix} - x_1 \begin{bmatrix} k-1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (\delta\bar{l}_r = \Delta r), \quad (31)$$

$$\delta\bar{l}_2 \begin{bmatrix} k \pm 1 & p \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} k \pm 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left( x_2 \begin{bmatrix} p+1 \\ 2 \end{bmatrix} - x_2 \begin{bmatrix} p-1 \\ 2 \end{bmatrix} \right); \quad (\delta\bar{l}_\theta = r \Delta\theta). \quad (32)$$



**Рис. 3.** Контрольные объемы, ребро (красного цвета) которых располагается вдоль оси  $Oz$

В сферических координатах требуется отдельное рассмотрение случая уравнения (6) при  $\alpha = 3$  (т.е. уравнение на  $B_\varphi$ ) для прилегающих к оси  $Oz$  контрольных объемов  $D_{i_1, 1, i_3}$  и  $D_{i_1, n_2, i_3}$  (см. рис. 3). Ребро таких контрольных объемов располагается вдоль оси  $Oz$ . В этом случае нельзя использовать общую схему для аппроксимации радиальной составляющей напряженности электрического поля  $E_r = E_1$  в расчетных точках на оси  $Oz$  (ребро красного цвета на рис. 3).  $E_r$  в точках на оси  $Oz$  можно вычислить как среднее значение по всем ближайшим к оси  $Oz$  радиальным ребрам соответствующих контрольных объемов (ребра зеленого цвета на рис. 3):

$$E_1(i_1, (1 - 1/2)) = \frac{1}{n_3} \sum_{i_3=1}^{n_3} E_1(i_1, (1 + 1/2), (i_3 - 1/2)), \quad i_1 = 1, \dots, n_1;$$

$$E_1(i_1, (n_2 + 1/2)) = \frac{1}{n_3} \sum_{i_3=1}^{n_3} E_1(i_1, (n_2 - 1/2), (i_3 - 1/2)), \quad i_1 = 1, \dots, n_1.$$

Очевидно, что  $E_1(i_1, (1 - 1/2))$  и  $E_1(i_1, (n_2 + 1/2))$  не зависят от  $i_3$  на оси  $Oz$ .

Для корректной постановки начально-краевой задачи для уравнения (1) на границе расчетной области достаточно задавать тангенциальные компоненты магнитного поля. Нормальная компонента на границе определяется из решения дискретного аналога (6) для тех граней контрольных объемов, которые прилегают к границе.

### Заключение

Разработанная и описанная в данной статье консервативная схема дискретизации уравнения индукции магнитного поля в модели резистивной магнитной гидродинамики реализована в авторском программном комплексе CVMHD (Control Volume Magneto-HydroDynamics) для математического моделирования МГД-течений и гидромагнитного динамо в сферических слоях. С помощью данного комплекса авторами проведены исследования различных аспектов модели геодинамо [26–28]: влияние начальных условий на структуру конвективных течений и магнитных полей, влияние скорости вращения сферического слоя и величины архимедовой силы на структуру и тип симметрии установившегося решения, а также на значения теплового потока, кинетической и магнитной энергии.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Zhang W., Jardin S., Ma Z., Kleiner A., Zhang H. Linear and Nonlinear Benchmarks Between the CLT Code and the M3D-C1 Code for the 2/1 Resistive Tearing Mode and the 1/1 Resistive Kink Mode. *Computer Physics Communications*. 2021;269:108134. DOI: 10.1016/j.cpc.2021.108134.
2. Brandenburg A., Johansen A., Bourdin P. A., Dobler W., Lyra W. et al. The Pencil Code, a Modular MPI Code for Partial Differential Equations and Particles: Multipurpose and Multiuser-Maintained. *J. Open Source Softw.* 2021;6(58):2807. DOI: 10.21105/joss.02807.
3. Mignone A., Bodo G., Massaglia S., Matsakos T., Tesileanu O., Zanni C., Ferrari A. PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics. *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2007;170:228–242. DOI: 10.1086/513316.
4. Rossazza M., Mignone A., Bugli M., Truzzi S., Riha L., Panoc T., Vysocky O., Shukla N., Romeo A., Berta V. The PLUTO Code on GPUs: A First Look at Eulerian MHD Methods. *Astronomy and Computing*. 2026;5:101076. DOI: 10.1016/j.ascom.2026.101076.
5. Liska M. T. P., Chatterjee K., Issa D. et al. A New GPU-Accelerated GRMHD Code for Exascale Computing with 3D Adaptive Mesh Refinement and Local Adaptive Time Stepping. *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2022;263(2):26. DOI: 10.3847/1538-4365/ac9966.
6. Burns K. J., Vasil G. M., Oishi J. S. et al. Dedalus: A Flexible Framework for Numerical Simulations with Spectral Methods. *Phys. Rev. Res.* 2020;2:023068. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.023068.
7. Matsumoto Y., Asahina Y., Kudoh Y. et al. Magnetohydrodynamic Simulation Code CANS+: Assessments and Applications. *Publ. Astron. Soc. Japan*. 2019;71(4):83. DOI: 10.1093/pasj/psz064.
8. Gyenge N., Griffiths M. K., Erdélyi R. MHD Code Using Multi Graphical Processing Units: SMAUG+. *Advances in Space Research*. 2018;61(2):683–690. DOI: 10.1016/j.asr.2017.10.027.
9. Matsui H. et al. Performance Benchmarks for a Next Generation Numerical Dynamo Model. *Geochem. Geophys. Geosyst.* 2016;17(5):1586–1607. DOI: 10.1002/2015GC006159.
10. Siriano S., Melchiorri L., Pignatiello S., Tassone A. A Multi-Region and a Multiphase MHD OpenFOAM Solver for Fusion Reactor Analysis. *Fusion Engineering and Design*. 2024;200:114216. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2024.114216.
11. Feng J., Chen H., He Q., Ye M. Further Validation of Liquid Metal MHD Code for Unstructured Grid Based on OpenFOAM. *Fusion Engineering and Design*. 2015;100:260–264. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2015.06.059.
12. Rives R., Batet L. Numerical Investigation of 3D MHD Pressure Drop in a Prototypical Fusion Blanket Manifold Using OpenFOAM. *Fusion Engineering and Design*. 2026;224:115592. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2025.115592.
13. Vencels J., Ráback P., Geža V. EOF-Library: Open-Source Elmer FEM and OpenFOAM Coupler for Electromagnetics and Fluid Dynamics. *SoftwareX*. 2019;9:68–72. DOI: 10.1016/j.softx.2019.01.007.

14. Ding Q., Mao S., Xi R. Second Order, Fully Decoupled, Linear, Exactly Divergence-Free and Unconditionally Stable Discrete Scheme for Incompressible MHD Equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 2024;169:195–204. DOI: 10.1016/j.camwa.2024.06.018.
15. Cai W., Wu J., Xin J. Divergence-Free H(div)-Conforming Hierarchical Bases for Magnetohydrodynamics (MHD). *Commun. Math. Stat.* 2013;1:19–35. DOI: 10.1007/s40304-013-0003-910.1007/s40304-013-0003-9.
16. Fu P., Li F., Xu Y. Globally Divergence-Free Discontinuous Galerkin Methods for Ideal Magnetohydrodynamic Equations. *J. Sci. Comput.* 2018;77:1621–1659. DOI: 10.1007/s10915-018-0750-6.
17. Rossmanith J. A. An Unstaggered, High-Resolution Constrained Transport Method for Magnetohydrodynamic Flows. *SIAM J. Sci. Comput.* 2006;28:1766–1797. DOI: 10.1137/050627022.
18. Isakov A. B., Descombes S., Dormy E. An Integro-Differential Formulation for Magnetic Induction in Bounded Domains: Boundary Element–Finite Volume Method. *Journal of Computational Physics*. 2004;197(2):540–554. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.12.008.
19. Balsara D. S., Spicer D. S. A Staggered Mesh Algorithm Using High Order Godunov Fluxes to Ensure Solenoidal Magnetic Fields in Magnetohydrodynamic Simulations. *Journal of Computational Physics*. 1999;149(2):270–292. DOI: 10.1006/jcph.1998.6153.
20. Yee K. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1966;14(3):302–307. DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.
21. Evans C. R., Hawley J. F. Simulation of Magnetohydrodynamic Flows: A Constrained Transport Method. *The Astrophysical Journal*. 1988;332:659–677. DOI: 10.1086/166684.
22. Dedner A., Kemm F., Kröner D., Munz C.-D., Schnitzer T., Wesenberg M. Hyperbolic Divergence Cleaning for the MHD Equations. *Journal of Computational Physics*. 2002;175:645–673. DOI: 10.1006/jcph.2001.6961.
23. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Схема дискретизации уравнения индукции на смещенных сетках в ортогональных криволинейных координатах. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):60–73. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-8.
24. Versteeg H. K. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Harlow: Pearson Education Limited; 2007. 503 p.
25. Leonard B. P. A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1979;19(1):59–98. DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3.
26. Бычин И. В., Гореликов А. В. Эффект усиления начального магнитного поля в модели геодинamo. *Успехи кибернетики*. 2025;6(1):76–83.
27. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Численное исследование эволюции режимов гидромагнитного динамо во вращающемся сферическом слое при различных начальных условиях. *Успехи кибернетики*. 2023;4(3):19–30. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-3-02.
28. Бычин И. В. Тестирование магнитогидродинамического кода на задачах естественной конвекции и геодинamo. *Успехи кибернетики*. 2021;2(1):6–13. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-1-1.