

РЕКОНСТРУКЦИЯ РЕОЛОГИИ ТЕКУЩЕЙ ЛАВЫ В МОДЕЛИ ТОНКОГО СЛОЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

И. А. Цепелев^а, А. И. Короткий^б

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация

^а ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8236-9834>, ✉ tsepelev@imm.uran.ru

^б ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4539-7169>, korotkii@imm.uran.ru

Аннотация: в работе рассматривается задача об оценке реологических характеристик течения тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости по заданной поверхности. Задача формализуется как обратная задача для данной модели. Вязкость жидкости зависит от пространственных координат. Исследование проводится в предположении некорректности этой задачи. Для численного решения некорректных задач требуется разработка специальных методов, которые гарантируют устойчивость вычисляемого решения. Предлагается воспользоваться вариационным методом и заменить исходную задачу экстремальной задачей на минимум подходящего функционала невязки между наблюдаемым параметром в модели и его модельным решением. Искомое решение задачи последовательно аппроксимируется решениями начальных задач управления, которые представляют собой нелинейные системы дифференциальных уравнений с частными производными с полностью определенными параметрами. Для минимизации функционала невязки применяется линейризованный метод сопряженных градиентов в реализации Полака–Рибьера. Градиент этого функционала и шаг спуска определяются аналитически, что позволяет существенно сократить объем вычислений. Метод конечных объемов применяется для интегрирования систем дифференциальных уравнений с частными производными с различными геометриями расчетной области. Алгоритмы численного моделирования верифицированы в пакете вычислений OpenFOAM. Компьютерные коды рассчитаны на их применение на вычислительных кластерах как с общей, так и с распределенной памятью на CPU под управлением ОС Linux.

Ключевые слова: вязкая жидкость, реконструкция параметров, обратная задача, вариационная задача, градиентные методы, численное моделирование, лавовые потоки.

Благодарности: при проведении работ был использован суперкомпьютер «Уран» Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург.

Для цитирования: Цепелев И. А., Короткий А. И. Реконструкция реологии текущей лавы в модели тонкого слоя движения вязкой жидкости. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):121–126.

Поступила в редакцию: 19.10.2025.

В окончательном варианте: 07.11.2025.

RECONSTRUCTION OF LAVA RHEOLOGY IN A THIN-LAYER MODEL OF VISCOUS FLOW

I. A. Tsepelev^а, A. I. Korotkii^б

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation

^а ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8236-9834>, ✉ tsepelev@imm.uran.ru

^б ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4539-7169>, korotkii@imm.uran.ru

Abstract: we consider the problem of estimating the rheological properties of a thin layer of viscous incompressible fluid flowing over a prescribed surface. The problem is formulated as an inverse problem for a model in which the fluid viscosity depends on spatial coordinates. We assume that the problem is ill-posed, requiring specialized numerical methods to ensure solution stability.

We propose a variational approach, replacing the original problem with an extremal problem that minimizes a functional representing the mismatch between observed parameters and the corresponding model solution. The solution is approximated sequentially through a series of initial control problems, formulated as nonlinear systems of partial differential equations with fully defined parameters. To minimize the mismatch functional, we apply a linearized conjugate gradient method in the Polak-Ribiere implementation. The gradient and descent step are computed analytically, significantly reducing computational cost.

We integrate the partial differential equation systems using the finite volume method for domains of various geometries. The numerical simulation algorithms are verified using the OpenFOAM computing

package. The resulting computer codes are optimized for execution on computing clusters with both shared and distributed memory on Linux-based CPUs.

Keywords: viscous fluid, parameter reconstruction, inverse problem, variational problem, gradient methods, numerical simulation, lava flows.

Acknowledgements: we used the Uran supercomputer at the N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg.

Cite this article: Tsepelev I. A., Korotkii A. I. Reconstruction of Lava Rheology in a Thin-Layer Model of Viscous Flow. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):121–126.

Original article submitted: 19.10.2025.

Revision submitted: 07.11.2025.

Постановка задачи

Извержение вулкана — это процесс излияния жидкой магмы и выброса из жерла вулкана газов и пепла. Лава может распространяться по очень большим пространственным областям, для которых трехмерное моделирование гидродинамики не является эффективным. Иное дело, когда отношение вертикального размера течения к его горизонтальному размеру пренебрежимо мало. Для такого класса задач математическая модель, основанная на усредненных по глубине уравнениях Навье–Стокса несжимаемой сплошной среды, представляется более эффективной [1].

Рассмотрим процесс вытекания вязкой несжимаемой жидкости из кратера вулкана. Опишем математическую модель рассматриваемого движения жидкости. В математической модели в качестве основных уравнений состояния жидкости рассмотрим двумерную усредненную по глубине модель движения вязкой жидкости. В модельной области $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (см. рис. 1) движение такой вязкой жидкости на промежутке времени $t \in [0, \vartheta]$, где ϑ — конечный момент времени наблюдения за процессом, представляется системой дифференциальных уравнений с частными производными (PDE) [1]:

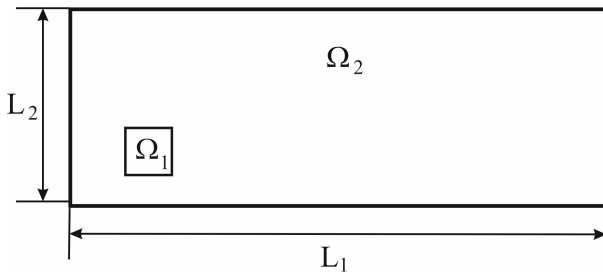


Рис. 1. Модельная область

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = w_{in}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (h\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2}\nabla (gh^2) - gh\nabla H - \gamma\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_2,$$

$$h(0, \mathbf{x}) = u(0, \mathbf{x}) = v(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

где $\mathbf{x} = (x, y)$ — пространственная переменная; $h = h(t; \mathbf{x})$ — высота столба жидкости, измеренная от уровня поверхности местности $H = H(\mathbf{x})$ до поверхности взаимодействия жидкости с окружающей средой; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t; \mathbf{x}) = (u(t; \mathbf{x}), v(t; \mathbf{x}))$ — усредненная скорость движения жидкости [2]; $w_{in} = w_{in}(t; \mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega_1$, $w_{in} = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega_2$ — магнитуа скорости экструзии жидкости; $\gamma = 3\mu\rho^{-1}h - 1$ — параметр сопротивления среды (ms^{-1}), где μ — эффективная вязкость жидкости [3]; $g = 9.81$ — ускорение свободного падения; $\nabla \cdot$ — дивергенция, ∇ — градиент, T — операция транспонирования.

Ключевым аспектом, определяющим поведение геофизических потоков, является их реология — соотношение между напряжением сдвига и скоростью деформации в жидкостях. Узнать вязкость лавы в момент извержения вулкана — непростая задача. Из-за критических условий, при которых распространяются потоки лавы, в большинстве случаев вязкость лавы не поддается прямому измерению. Кроме того, вязкость зависит от многочисленных параметров жидкости (например, изменения содержания водяного пара, температурной зависимости и кристаллизации расплава), и поэтому постоянно меняется как в пространстве, так и во времени. Поскольку лава является вязкой жидкостью, ее вязкость является одним из основных параметров, который должен быть известен для хорошего компьютерного моделирования.

Обсудим содержательную сторону задачи восстановления неизвестного параметра. В процессе распространения вулканической лавы из жерла вулкана требуется найти фактическую вязкость вытекающей жидкости по измерениям толщины лавы. Данную задачу будем называть обратной задачей

по отношению к задаче нахождения решения задачи (1)–(3), которую будем называть прямой задачей. Вопрос об измерении толщины лавы в режиме реального времени изучался в [4].

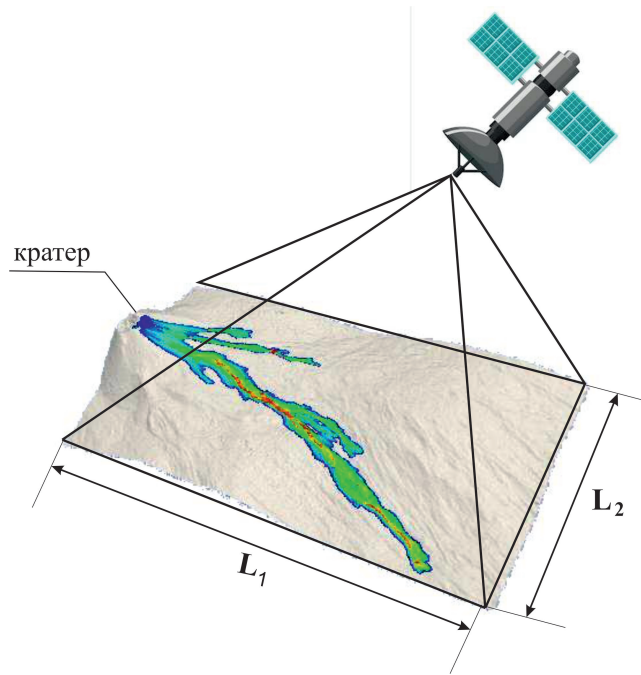


Рис. 2. Измерение толщины лавы h^* в режиме реального времени. Цвета соответствуют измеряемым значениям

Рассмотрим функционал невязки:

$$J(\gamma) = \|h(\vartheta, \cdot; \gamma) - h^*(\cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \gamma \in \Gamma, \quad (4)$$

где Γ — некоторое множество допустимых искомых параметров; $h^*(\cdot)$ — измеренная толщина лавы в момент времени $t = \vartheta$ (см. рис. 2); $h(\vartheta, \cdot; \gamma)$ — моделируемая толщина лавы из модели (1)–(3) на момент времени $t = \vartheta$, которая соответствует известному коэффициенту сопротивления $\gamma(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Точка минимума этого функционала невязки доставит решение обратной задаче. Общий подход к решению такой задачи минимизации связан с рассмотрением задачи условной минимизации функционала невязки (4) на решениях задачи (1)–(3), в которой основные уравнения состояния учитываются в задаче безусловной минимизации введением множителей Лагранжа.

Введем в рассмотрение функционал Лагранжа [5]:

$$L(\gamma) = J(\gamma) + G(\gamma) + H(\gamma), \quad (5)$$

$$G(\gamma) = \int_0^{\vartheta} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) - f_{in} \right) z \, dx \, dt,$$

$$H(\gamma) = \int_0^{\vartheta} \int_{\Omega} \left\langle \left(\frac{\partial (h\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}\mathbf{u}^T) + gh\nabla h + gh\nabla H + \gamma\mathbf{u} \right), \mathbf{w} \right\rangle dx \, dt,$$

где \mathbf{w} и z — множители Лагранжа. Безусловный минимум функционала $L(\gamma)$ доставляет решение задачи (4) при ограничениях (1)–(3).

Множители Лагранжа определяются из финальной задачи (задачи с данными в конечный момент времени $t = \vartheta$). Ее принято называть сопряженной задачей к задаче (1)–(3):

$$-\frac{\partial z}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{u}_\gamma \right\rangle - \langle \mathbf{u}_\gamma, \nabla z \rangle - \left\langle (\mathbf{u}_\gamma \mathbf{u}_\gamma^T) : (\nabla \mathbf{w})^T \right\rangle - gh_\gamma \nabla \cdot \mathbf{w} + g \langle \nabla H, \mathbf{w} \rangle = 0, \quad (6)$$

$$-h_\gamma \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - h_\gamma \nabla z - h_\gamma \langle \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T : \mathbf{u}_\gamma \rangle + \gamma \mathbf{w} = 0, \quad (7)$$

$$z(\vartheta, \cdot) = -2(h_\gamma(\vartheta, \cdot; \gamma) - h^*(\cdot)), \quad \mathbf{w}(\vartheta, \cdot) = 0. \quad (8)$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов, $\langle \cdot \rangle$ — свертка матриц. Градиент функционала (4) можно записать в виде:

$$\nabla J(\gamma) = \int_0^\vartheta \langle \mathbf{u}_\gamma, \mathbf{w} \rangle dt. \quad (9)$$

Здесь $(\mathbf{u}_\gamma, h_\gamma)$ — решение задачи (1)–(3) при заданном параметре γ . Обоснование вывода сопряженной системы и градиента функционала проводится аналогично [6]. При этом предполагается, что жидкость не достигает границ области Ω .

Рассмотрим нелинейный оператор $\mathbf{A} : (0, +\infty) \ni \gamma \rightarrow (h(\vartheta, \cdot), \mathbf{u}(\vartheta, \cdot)) \in L_2(\Omega) \times \mathbf{L}_2(\Omega)$.

Для решения $(h(\vartheta, \cdot; \gamma + \delta\gamma), \mathbf{u}(\vartheta, \cdot; \gamma + \delta\gamma))$ аппроксимируем $\mathbf{A}(\gamma + \delta\gamma) \approx \mathbf{A}(\gamma) + \nabla \mathbf{A}(\gamma) \delta\gamma$.

Разность $\mathbf{A}(\gamma + \delta\gamma) - \mathbf{A}(\gamma) = y(\vartheta, \cdot)$ удовлетворяет следующей начальной задаче:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \nabla \cdot (h_\gamma \mathbf{v}) + \nabla \cdot (y \mathbf{u}_\gamma) = R_1; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h_\gamma \mathbf{v})}{\partial t} + \frac{\partial (y \mathbf{u}_\gamma)}{\partial t} + \nabla \cdot (y \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_\gamma^T) + \nabla \cdot (h_1 \mathbf{v} \mathbf{u}_\gamma^T) + \nabla \cdot (h_1 \mathbf{u}_\gamma \mathbf{v}^T) \\ + g(\nabla H y + \nabla h_\gamma y + h_\gamma \nabla y) + \gamma \mathbf{v} + \mathbf{u}_\gamma \delta\gamma = \mathbf{R}_2; \end{aligned} \quad (11)$$

$$y(0, \cdot) = 0;$$

где $R_1 = \nabla \cdot (y \mathbf{v})$, $\mathbf{R}_2 = -\frac{\partial (y \mathbf{v})}{\partial t} - \nabla \cdot (y \mathbf{v} \mathbf{u}_\gamma^T) - \nabla \cdot (y \mathbf{u}_\gamma \mathbf{v}^T) - \nabla \cdot (h_\gamma \mathbf{v} \mathbf{v}^T) - \nabla \cdot (y \mathbf{v} \mathbf{v}^T) - y \nabla y - \mathbf{v} \delta\gamma$;
 $y = h_{\gamma+\delta\gamma} - h_\gamma$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_{\gamma+\delta\gamma} - \mathbf{u}_\gamma$. Заметим, что $\|R_1\|_{L_2(\Omega)} = o(\|\delta\gamma\|_{L_2(\Omega)})$, $\|\mathbf{R}_2\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = o(\|\delta\gamma\|_{L_2(\Omega)})$.

Функционал (4) минимизируем методом градиентного спуска [5]:

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n - \left(J(\gamma_n) \|\nabla J(\gamma_n)\|_{L_2(\Omega)}^{-2} \right) \nabla J(\gamma_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad \gamma_0 = 0. \quad (12)$$

Опишем схему численного решения экстремальной задачи:

0) зададим произвольное допустимое значение коэффициента $\gamma = \gamma(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$;

1) находим на промежутке времени $[0, \vartheta]$ решение прямой задачи (1), (2) $h(t, \mathbf{x}; \gamma)$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}; \gamma)$, $(t, \mathbf{x}) \in [0, \vartheta] \times \Omega$, с начальным условием (3);

2) находим на промежутке времени $[0, \vartheta]$ решение сопряженной задачи (6), (7) $z(t, \mathbf{x}; \gamma)$, $\mathbf{w}(t, \mathbf{x}; \gamma)$, $(t, \mathbf{x}) \in [0, \vartheta] \times \Omega$, с финальным условием (8), используя решения прямой задачи (1)–(3);

3) используя результаты пп. 1, 2, определяем значение градиента функционала $\nabla J(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ по формуле (9);

4) определим новое значение восстанавливаемого параметра по формуле (12).

Если $J(\gamma_n) + \|\nabla J(\gamma_n)\|_{L_2(\Omega)}^2 < \bar{\varepsilon}$, то расчет прекращается, и γ_n принимается за аппроксимацию неизвестного параметра сопротивления среды, и сохраняются значения $h(\vartheta, x, y; \gamma)$, $\mathbf{u}(\vartheta, x, y)$, $(x, y) \in \Omega$; иначе возвращаемся к п. 1 и проводим очередную итерацию. В расчетах полагается согласовывать значения параметра $\bar{\varepsilon} > 0$ с погрешностью измерения функции $h^*(\cdot)$ и вычислительной точностью проводимого компьютерного моделирования.

Таким образом, решение обратной задачи фактически сводится к решению серии прямых задач. Аналогичным способом будут решаться подобные задачи на любом другом отрезке времени. Учитывая то, что реология жидкости изменяется во времени, восстановление на всем отрезке времени извержения вулкана можно осуществить следующим образом. Зададим априори некоторое равномерное разбиение оси времени точками $t_m = \vartheta m$, $t_0 = 0$, $m \in \mathbb{Z}$. Далее организуется итерационный процесс по m . На каждом промежутке времени $[t_m, t_{m+1}]$ выполняются шаги пп. 1–4. Результаты из п. 4 будут служить начальными данными в (3) для продолжения вычислений на интервале $[t_{m+1}, t_{m+2}]$. Вычисление прекратится по завершении времени извержения вулкана. К этому моменту будут получены значения

$\gamma_m = \gamma(t_m, x, y)$ для каждого отрезка $[t_m, t_{m+1}]$, которые составят кусочно-постоянную аппроксимацию по времени коэффициента сопротивления среды.

Для решения задачи минимизации применим устойчивый итерационный метод сопряженных градиентов Полака–Рибьера [7]. Метод сопряженных градиентов является одним из наиболее эффективных градиентных методов, если рассматривать такие критерии, как точность результатов, затраты компьютерных ресурсов и реализацию его на современных ЭВМ. Последовательность аппроксимаций задачи (4) строится по правилу:

$$\begin{aligned} \gamma^{(n+1)} &= \gamma^{(n)} + \xi^{(n)} \mathbf{d}^{(n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \mathbf{d}^{(n)} &= \begin{cases} -\nabla J(\gamma^{(n)}), & n = 1, \\ -\nabla J(\gamma^{(n)}) + \beta^{(n)} \mathbf{d}^{(n-1)}, & n = 2, 3, \dots, \end{cases} \\ \beta^{(n)} &= \left\langle \nabla J(\gamma^{(n)}), \nabla J(\gamma^{(n)}) - \nabla J(\gamma^{(n-1)}) \right\rangle_{L_2(\Omega)} \left\| \nabla J(\xi^{(n-1)}) \right\|_{L_2(\Omega)}^{-2}, \quad n = 2, 3, \dots, \\ \xi^{(n)} &= -\left\langle \mathbf{d}^{(n)}, \nabla J(\gamma^{(n)}) \right\rangle_{L_2(\Omega)} \left\| \nabla \mathbf{A}(\gamma^{(n)}) \mathbf{d}^{(n)} \right\|_{L_2(\Omega)}^{-2} \mathbf{d}^{(n)}, \\ \nabla \mathbf{A} \delta \gamma &= y(\vartheta, \cdot), \end{aligned} \tag{13}$$

y — компонента решения (y, \mathbf{v}) задачи (10), (11) при $R_1 = 0$, $\mathbf{R}_2 = 0$.

Оценка эффективности кода

Для организации вычислительного эксперимента использовался пакет OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation) [8], в котором реализовано численное решение дифференциальных уравнений с частными производными методом конечных объемов [9]. Для отладки программных кодов для модели (1)–(3) проведено сравнение с аналитическим решением задачи [10]. Подробно тестовые эксперименты и результаты такого компьютерного моделирования описаны в [2]. Верификация кодов решателя прямой задачи проведена в работе [12].

Для проверки кодов решения сопряженной задачи (7), (8) и формулы (9) для градиента функционала проведен тест [11]. Имеем:

$$J(\gamma + \delta\gamma) - J(\gamma) = \delta\gamma \nabla J(\gamma) + o\left(\|\delta\gamma\|_{L_2(\Omega)}\right). \tag{14}$$

Выберем параметр $\gamma > 0$ достаточно далеко от решения обратной задачи ($\|\nabla J(\gamma)\|_{L_2(\Omega)} > 0$) и для $\varepsilon > 0$ зададим его приращение в виде:

$$\delta\gamma = \varepsilon \nabla J(\gamma) / \|\nabla J(\gamma)\|_{L_2(\Omega)}$$

Перепишем равенство (14) в следующем виде для $\varepsilon > 0$:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{J(\gamma + \varepsilon \nabla J(\gamma) / \|\nabla J(\gamma)\|_{L_2(\Omega)}) - J(\gamma)}{\varepsilon \|\nabla J(\gamma)\|_{L_2(\Omega)}^2} = 1 + O(\varepsilon).$$

Для значений ε , отличных от машинного нуля, но достаточно малых, должны получить значение для $\varphi(\varepsilon)$, близкое к 1 (см. рис. 3). Это подтверждает качество сопряженной модели в вычислениях градиента функционала невязки.

Заключение

В работе предложен конструктивный устойчивый метод численного решения некорректной обратной задачи об определении неизвестного коэффициента сопротивления среды для восстановления эффективной вязкости в модели растекания тонкого слоя жидкости по определенному рельефу местности под действием силы тяжести. Модели тонкого слоя являются физически обоснованным описанием процесса распространения лавы и хорошим компромиссом между полным трехмерным моделированием и необходимостью сокращения вычислительного времени для обработки данных. Представленный метод может быть использован для аппроксимации параметров, которые не могут быть измерены с

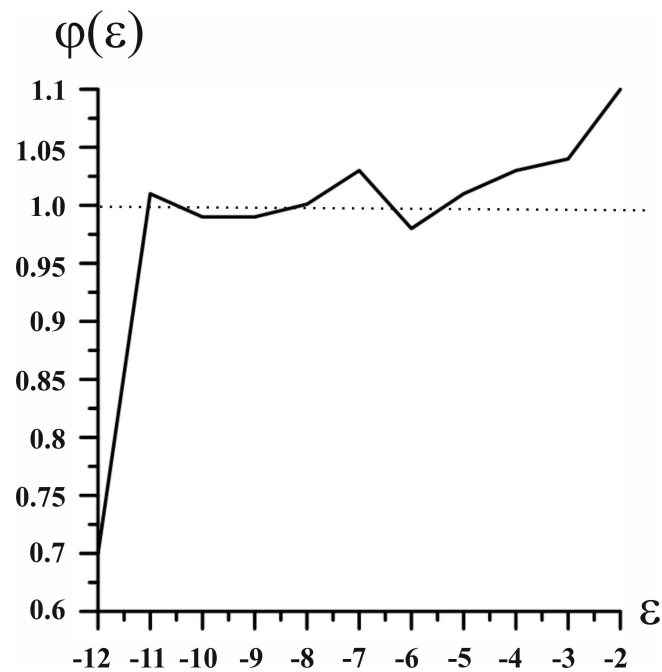


Рис. 3. Оценка качества вычисления градиента функционала $J(\gamma)$

помощью измерительной аппаратуры. Численные методы вычислительной гидродинамики могут дополнять лабораторные эксперименты благодаря возможности запуска виртуальных тестовых примеров. Алгоритм решения основан на сочетании аналитических методов исследования задач управления и эффективных устойчивых методов решения экстремальных задач. Построен численный метод совместного решения прямой и сопряженной задач. Реализация алгоритма в пакете OpenFOAM позволила создать программные коды для задачи, которые можно легко адаптировать для конкретных случаев.

ЛИТЕРАТУРА

- Costa A., Macedonio G. Numerical Simulation of Lava Flows Based on Depth-Averaged Equations. *Geophysical Research Letters*. 2005;32:L05304. DOI: doi.org/10.1029/2004GL021817.
- Короткий И. А., Цепелев И. А. Численное моделирование извержения вулкана Этна с применением усредненной по глубине модели потока лавы. *Выч. механика сплошных сред*. 2024;17(3):362–374. DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.3.30.
- Kelfoun K., Druitt T. H. Numerical Modeling of the Emplacement of Socompa Rock Avalanche, Chile. *Journal of Geophysical Research*. 2005;110(B12). DOI: 10.1029/2005JB003758.
- Ganci G. et al. Satellite-Based Reconstruction of the Volcanic Deposits during the December 2015 Etna Eruption. *Data*. 2019;4(3):120. DOI: doi.org/10.3390/data4030120.
- Васильев Ф. П. *Методы оптимизации*. М.: Факториал; 2002. 824 с.
- Короткий А. И., Стародубцева Ю. В., Цепелев И. А. Гравитационное течение двухфазной вязкой несжимаемой жидкости. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2021;27(4):61–73. DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-61-73.
- Nocedal J., Wright S. J. *Numerical Optimization*. New York: Springer; 1999. 664 p.
- Jasak H. OpenFOAM: Open Source CFD in Research and Industry. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering* 2009;1(2):89–94. DOI: doi.org/10.2478/IJNAOE-2013-0011.
- LeVeque R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press; 2002. 580 с.
- Huppert H. E. The Propagation of Two-Dimensional and Axisymmetric Viscous Gravity Currents over a Rigid Horizontal Surface. *J. of Fluid Mechanics*. 1982;121:43–58. DOI: 10.1017/S0022112082001797.
- Navon I. M., Zou X., Derber J., Sela J. Variational Data Assimilation with an Adiabatic Version of the NMC Spectral Model. *Monthly Weather Rev.* 1992;120(7):1433–1446.
- Цепелев И. А., Короткий А. И. Применение гибридных вычислителей для моделирования лавового потока. *Успехи кибернетики*. 2024;5(4):103–109.