

## СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ И НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОДХОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ГЕОАКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ С ОДНИМ ДИСЛОКАЦИОННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Д. Ф. Сергиенко<sup>1,2,a</sup>, Р. И. Паровик<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup> Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга,  
г. Петропавловск-Камчатский, Россия

<sup>2</sup> Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,  
с. Паратунка, Россия

<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0008-6512-4537>, ✉ [sergienko@ikir.ru](mailto:sergienko@ikir.ru)

<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1576-1860>, [parovik@ikir.ru](mailto:parovik@ikir.ru)

*Аннотация:* в работе проводится сравнительный анализ эффективности численных методов (Розенброка 4-го порядка, Radau, BDF, LSODA библиотеки SciPy) и нейросетевого подхода Physics-Informed Neural Networks (PINN) для решения математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии с одним дислокационным источником на языке программирования Python. Параллельная реализация метода Розенброка на 8 процессорах позволила значительно повысить его производительность. Сравнение проводилось по критериям точности, вычислительной стоимости и устойчивости. Показано, что подход PINN, архитектура которого специально разработана для решения задач математической физики, обеспечивает сопоставимую точность с методом Розенброка, реализованным вручную, обладая при этом рядом преимуществ, таких как простота параметризации задачи и глобальная аппроксимация решения, обеспечивающая его гладкость и отсутствие численной дисперсии, характерной для сеточных методов.

*Ключевые слова:* высокочастотная геоакустическая эмиссия, дислокационный источник, математическое моделирование, численные методы, метод Розенброка, Physics-Informed Neural Networks (PINN), SciPy.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № темы 124012300245-2).

*Для цитирования:* Сергиенко Д. Ф., Паровик Р. И. Сравнение эффективности численных методов и нейросетевого подхода к исследованию математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии с одним дислокационным источником. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):106–113.

*Поступила в редакцию:* 16.10.2025.

*В окончательном варианте:* 14.11.2025.

## COMPARISON OF NUMERICAL METHODS AND NEURAL NETWORK APPROACHES FOR SIMULATING HIGH-FREQUENCY GEOACOUSTIC EMISSION FROM A SINGLE DISLOCATION SOURCE

D. F. Sergienko<sup>1,2,a</sup>, R. I. Parovik<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup> Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Paratunka, Russian Federation

<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0008-6512-4537>, ✉ [sergienko@ikir.ru](mailto:sergienko@ikir.ru)

<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1576-1860>, [parovik@ikir.ru](mailto:parovik@ikir.ru)

*Abstract:* we present a comparative analysis of numerical methods (4th-order Rosenbrock, Radau, BDF, and LSODA from the SciPy library) and the Physics-Informed Neural Networks (PINN) approach for solving a mathematical model of high-frequency geoacoustic emission from a single dislocation source using Python. Parallel implementation of the Rosenbrock method on eight processors significantly improved its performance. We compared the methods in terms of accuracy, computational cost, and stability. The results show that the PINN approach, with an architecture specifically designed for mathematical physics problems, achieves accuracy comparable to the manually implemented Rosenbrock method. In addition, PINNs offer advantages such as simplified problem parameterization and a global approximation of the solution, ensuring smoothness and avoiding the numerical dispersion typical of grid-based methods.

*Keywords:* high-frequency geoacoustic emission, dislocation source, simulation, numerical methods, Rosenbrock method, physics-informed neural networks (PINN), SciPy.

*Acknowledgements:* this is a part of government contract 124012300245-2 granted to the Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.

*Cite this article:* Sergienko D. F., Parovik R. I. Comparison of Numerical Methods and Neural Network Approaches for Simulating High-Frequency Geoacoustic Emission from a Single Dislocation Source. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):106–113.

*Original article submitted:* 16.10.2025.

*Revision submitted:* 14.11.2025.

## **Введение**

Современная геофизика и сейсмология сталкиваются с фундаментальной проблемой интерпретации сложных волновых полей, генерируемых разнородными источниками в неоднородных геологических средах [1, 2]. Важным объектом таких исследований является геоакустическая эмиссия (ГАЭ) — высокочастотные акустические сигналы, возникающие в геологических средах в результате быстрых динамических процессов, таких как движение дислокаций, микротрещинообразование и релаксация напряжений [3]. Среди множества математических моделей, описывающих динамику упругих систем, осциллятор Берлаге занимает особое положение как одна из наиболее физически адекватных моделей, способная воспроизводить сложные спектральные характеристики и временные структуры реальных сейсмоакустических сигналов [4–6]. Следует отметить, что Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН (ИКИР ДВО РАН) проводит систематическую регистрацию и исследование геоакустической эмиссии с 1999 года [7], что обеспечивает обширную экспериментальную базу для верификации математических моделей.

Актуальность разработки и совершенствования математической модели осциллятора Берлаге с одним источником обусловлена несколькими критически важными факторами. Во-первых, такая модель служит теоретической основой для интерпретации данных мониторинга сейсмической активности, где корректное описание динамики одиночного источника является необходимым условием для последующего анализа сложных многокомпонентных систем. Во-вторых, модель Берлаге демонстрирует исключительную эффективность при моделировании переходных процессов и нелинейных эффектов, характерных для реальных геофизических систем, включая явления гистерезиса и релаксации напряжений.

Прикладной аспект исследований в данной области охватывает чрезвычайно широкий спектр задач — от прогнозирования землетрясений и мониторинга инженерных сооружений до решения фундаментальных проблем физики очага сейсмических событий. Математическая модель осциллятора Берлаге позволяет устанавливать количественные связи между параметрами источника и характеристиками регистрируемых волновых полей, что является основой для разработки новых методов дистанционной диагностики состояния геологических сред.

В настоящее время традиционные подходы к решению уравнений модели Берлаге основаны на применении классических численных методов, включая методы Рунге–Кутты, схемы Розенброка и другие алгоритмы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако эти методы сталкиваются с существенными ограничениями при решении обратных задач, многопараметрической оптимизации и работе с зашумленными данными. Кроме того, классические численные схемы часто требуют значительных вычислительных ресурсов и времени выполнения, что ограничивает их практическое применение в задачах оперативного мониторинга.

Перспективной альтернативой традиционным подходам представляется использование нейросетевых методов, в частности, метода Physics-Informed Neural Networks (PINN). Этот подход позволяет интегрировать физические законы, описываемые уравнениями модели Берлаге, непосредственно в архитектуру нейронной сети, обеспечивая тем самым соблюдение фундаментальных физических принципов в процессе обучения. Важнейшим преимуществом PINN является возможность одновременного решения прямых и обратных задач, а также естественная работа с неполными и зашумленными данными, что особенно актуально для практических геофизических приложений.

В данной работе проводится комплексное исследование, направленное на сравнительный анализ эффективности классических численных методов и нейросетевого подхода PINN применительно к математической модели осциллятора Берлаге с одним источником. Исследование включает в себя: разработку вычислительной схемы на основе метода Розенброка 4 порядка точности и численных алгоритмов для одного источника; создание специализированной архитектуры PINN для модели Берлаге;

сравнительную оценку точности и вычислительной эффективности методов и нейронной сети; анализ устойчивости решений к вариациям параметров модели.

### Математическая модель ГАЭ

В настоящей работе для описания одиночного импульса ГАЭ мы воспользуемся следующей математической моделью:

$$\begin{cases} \ddot{g}(t) = \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right)\dot{g}(t) - \left(\frac{a}{t^2} + c^2\right)g(t) + \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right)A \cdot c \cdot t^a \exp\left(-\frac{a}{b}t\right) \cos(ct + \phi_0), \\ g(t_0) = A \cdot t_0^a \exp\left(-\frac{a}{b}t_0\right) \sin(ct_0 + \phi_0), \\ \dot{g}(t_0) = \left(\frac{a}{t_0} - \frac{a}{b}\right)g(t_0) + A \cdot c \cdot t_0^a \exp\left(-\frac{a}{b}t_0\right) \cos(ct_0 + \phi_0), \end{cases} \quad (1)$$

где  $A > 0$  – амплитуда импульса, от. ед.;  $n = \frac{\ln 20}{p_{max} - \ln \frac{1}{p_{max}} - 1}$  – параметр, отвечающий за форму огибающей сигнала;  $p_{max} \in [0.01, 0.4]$  – положение максимума;  $\Delta$  – крутизна огибающей сигнала, [1.1, 5];  $t \in [t_0, t_{end}]$  – время, с;  $t_0 > 0$  – начальный момент времени, с;  $t_{end}$  – длительность импульса, с;  $f \in [200, 20000]$  – частота заполнения, Гц;  $\phi_0$  – начальная фаза;  $a = n \cdot p_{max} \cdot \Delta$ ;  $b = p_{max} \cdot t_{end}$ ;  $c = 2 \cdot \pi f$ .

Можно показать, что решением модели (1) является функция Берлаге [8]:

$$g(t) = A \cdot t^a \cdot \exp\left(-\frac{a}{b}t\right) \cdot \sin(ct + \phi_0). \quad (2)$$

Математическую модель (1), решением которой является функция Берлаге (2), будем называть осциллятором Берлаге.

Осциллятор Берлаге (1) описывает один дислокационный источник (трещину), излучающий один импульс высокочастотной ГАЭ. Практическая применимость данной модели была подтверждена в работе [8], где она была использована для описания реальных экспериментальных данных с помощью двухэтапной оптимизации, сочетающей дифференциальную эволюцию и метод Нелдера–Мида, что позволило с высокой точностью уточнить параметры импульса.

Ранее в работах [9–11] было дано описание взаимодействия двух дислокационных источников с помощью двух линейно связанных осцилляторов Берлаге. Учет более двух дислокационных источников приводит нас к цепочке связанных осцилляторов Берлаге, что равносильно рассмотрению волнового процесса распространения ГАЭ. Для модели двусвязанных линейных осцилляторов Берлаге был проведен и реализован количественный и качественный анализ в комплексе QAMODEL [12]. Было проведено исследование модели на жесткость, в ходе которого было подтверждено, что при определенных параметрах модель является жесткой.

Для решения модели двусвязанных осцилляторов в работе [13] рассматривалась эффективность численных методов (метода Розенброка 4 порядка, LSODA, BDF, Radau), наиболее устойчивых к жестким системам. В данной работе мы рассмотрим в комплексе применение численных методов и нейронной сети PINN для решения модели и оценим эффективность применения сети.

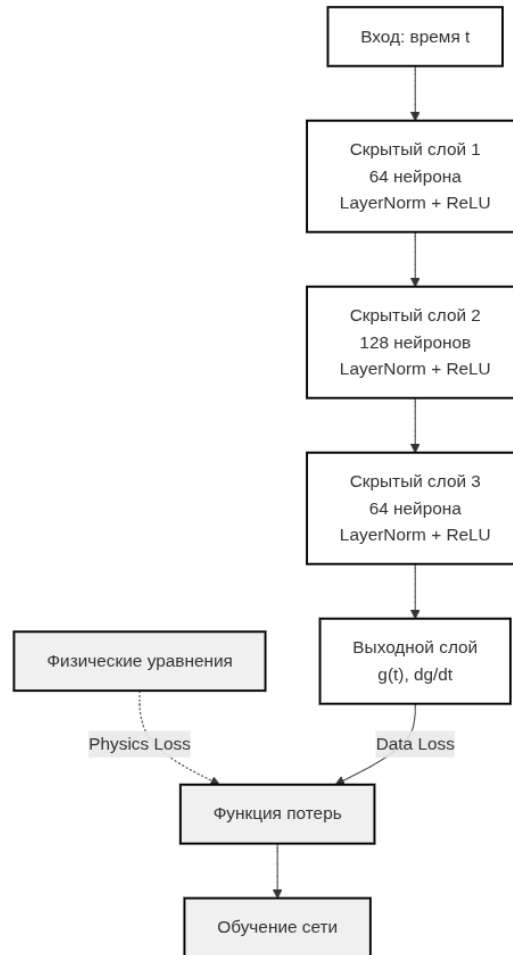
Выбор сети PINN обусловлен ее принципиальной способностью учитывать физические законы, описываемые уравнением осциллятора Берлаге, непосредственно в процессе обучения. Это обеспечивает получение глобального физически осмысленного решения, а не просто аппроксимацию данных.

### Методика исследования

Для комплексного сравнения использовались алгоритмы из библиотеки SciPy: метод LSODA с адаптивным переключением между нежесткими и жесткими схемами, метод обратных дифференциальных формул BDF [14–16], предназначенный для решения жестких систем, и метод Radau неявного типа высокой точности [17, 18]. Также был реализован параллельный метод Розенброка 4 порядка точности по схеме [19]. Каждый из методов настраивался с относительной и абсолютной погрешностью  $rtol = atol = 10^{-7}$ .

Архитектура PINN представляет собой многослойный перцептрон с улучшенной структурой, включающей остаточные соединения (residual connections) и нормализацию (рисунок 1). Сеть состоит из входного слоя, четырех скрытых слоев размерностью 256, 512, 256 и 128 нейронов соответственно и выходного слоя с двумя нейронами для предсказания функции и ее производной модели (1).

Ключевой особенностью архитектуры является использование остаточных блоков (residual blocks), которые позволяют избежать проблемы исчезающих градиентов при обучении глубоких сетей. Каждый блок включает линейные преобразования, нормализацию слоя (layer normalization) и SiLU — функцию активации. Инициализация весов выполняется методом Xavier, что обеспечивает стабильность процесса обучения.



**Рис. 1.** Архитектура Physics-Informed Neural Network (PINN) для решения модели (1)

Данные предварительно нормализовались с помощью StandardScaler, что ускоряет сходимость и улучшает обобщающую способность модели. Контроль переобучения осуществлялся путем мониторинга сходимости обеих компонент функции потерь — по начальным условиям и невязке дифференциального уравнения, а также за счет применения L2-регуляризации весов сети.

### Результаты исследования

Эффективность численных методов и сети PINN оценивалась по трем основным критериям: точность решения, вычислительная эффективность и устойчивость. Точность измерялась как для самой функции, так и для ее производной относительно вычисления аналитической функции (2). Вычислительная эффективность оценивалась по времени выполнения алгоритмов, а устойчивость — по способности методов сохранять точность при варьировании параметров модели.

Параметры модели (1) для примеров 1–2 (таблица 1) были взяты согласно работе [20]. Обучение нейросети проводилось с использованием оптимизатора AdamW с адаптивной скоростью обучения, выбранной при инициализации сети  $lr = 0.001$  (таблица 1) и L2-регуляризацией.

Для оценки адекватности модели были вычислены следующие параметры (таблицы 2–3): среднеквадратичная ошибка  $MSE g(t)$  и  $MSE dg/dt$ , относительная ошибка  $\varepsilon_{g(t)}$ , %.

Таблица 1

Параметры математической модели и настройки PINN для примеров 1 и 2

Параметр	Пример 1	Пример 2
$A$	0.6686	0.6686
$a$	0.7695	2.43
$b$	0.0014	0.0014
$c$	6283.1853	12432.6
$\phi_0$	3.6	3.6277
$t$	$[10^{-3}; 8 \cdot 10^{-3}]$	$[10^{-3}; 8 \cdot 10^{-3}]$
$N_{epoch}$	400	600
lr	0.001	0.001
Точки коллокации	1000	1000

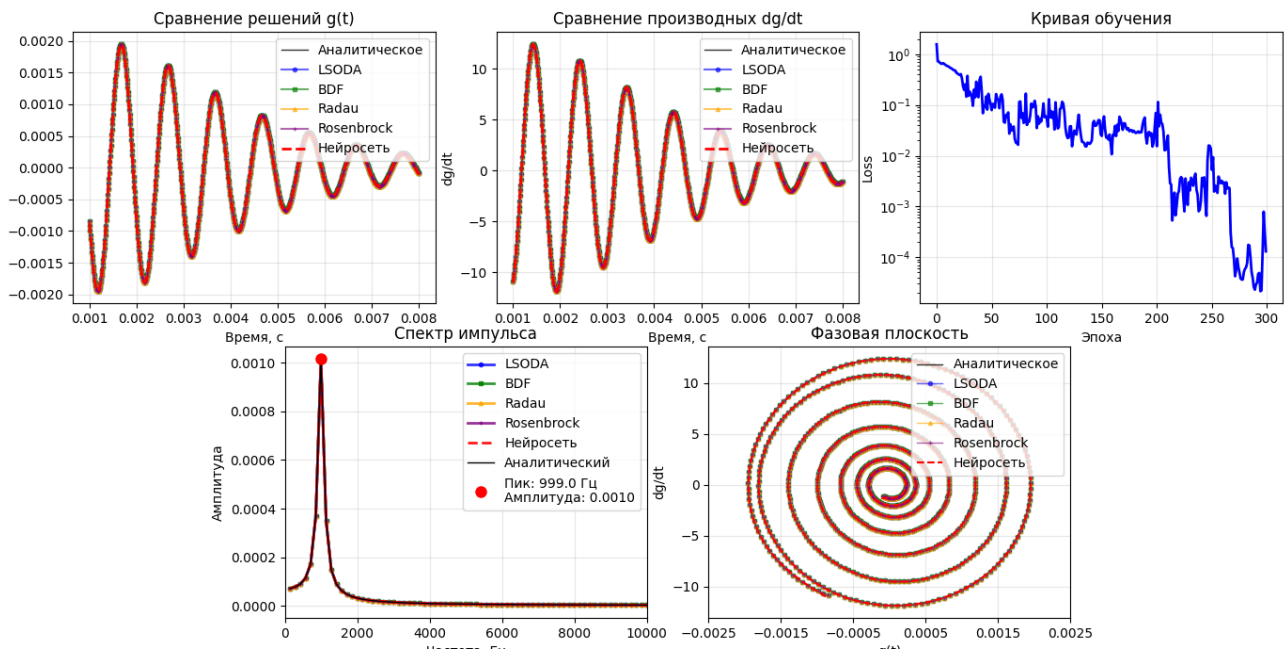


Рис. 2. Сравнение эффективности численных методов и нейросетевого подхода PINN для решения модели (1). Пример 1

Также были проанализированы спектральные характеристики решений, фазовые портреты и способность методов сохранять физическую осмысленность решения в течение всего временного интервала (рисунки 2–3).

Проведенное исследование демонстрирует устойчивую эффективность подхода PINN при различных параметрах математической модели. Для первого набора параметров PINN достигла уровня потерь порядка  $10^{-5}$ , а для второго —  $10^{-9}$ , что свидетельствует о высокой чувствительности метода к выбору параметров модели и возможностях оптимизации процесса обучения.

Таблица 2

Сравнение методов решения модели (1). Пример 1

Метод	Время, с	MSE $g(t)$	MSE $dg/dt$	Отн. $\varepsilon_{g(t)}$ , %
LSODA	0.0176	$4.36 \times 10^{-15}$	$1.77 \times 10^{-07}$	0.0058
BDF	0.0746	$3.53 \times 10^{-15}$	$1.48 \times 10^{-07}$	0.0056
Radau	0.1274	$1.84 \times 10^{-20}$	$2.95 \times 10^{-13}$	0.0001
Rosenbrock	0.1356	$9.70 \times 10^{-16}$	$3.87 \times 10^{-08}$	0.0029
Нейросеть (PINN)	обучение: 43.69 предсказание: 0.001	$2.48 \times 10^{-09}$	$1.13 \times 10^{-01}$	11.5317

Таблица 3

Сравнение методов решения модели (1). Пример 2

Метод	Время, с	MSE $g(t)$	MSE $dg/dt$	Отн. $\varepsilon_{g(t)}$ , %
LSODA	0.0119	$2.79 \times 10^{-22}$	$4.39 \times 10^{-14}$	0.4586
BDF	0.0476	$2.92 \times 10^{-22}$	$4.59 \times 10^{-14}$	0.4516
Radau	0.0537	$8.05 \times 10^{-26}$	$1.04 \times 10^{-17}$	0.0229
Rosenbrock	0.0620	$9.14 \times 10^{-26}$	$1.44 \times 10^{-17}$	0.0106
Нейросеть (PINN)	обучение: 46.64 предсказание: 0.001	$1.28 \times 10^{-21}$	$2.97 \times 10^{-13}$	2.5346

Спектральный анализ подтвердил точное воспроизведение частотных характеристик: в первом случае пиковая частота составила 999 Гц с амплитудой 0.001, во втором — 1998 Гц с амплитудой 0.0008, что полностью соответствует аналитическим решениям и демонстрирует способность PINN корректно работать в различных частотных диапазонах. Фазовые траектории, полученные с помощью PINN для обоих случаев, качественно совпадают с результатами классических численных методов (LSODA, BDF, Radau, метод Розенброка 4 порядка точности), сохраняя структуру фазового портрета с максимальным отклонением не более 2.5%.

Кривые обучения показывают различную динамику сходимости: в первом примере наблюдается плавное уменьшение потерь, во втором — более быстрое достижение низких значений ошибки, что объясняется различиями в параметрах модели и сложности аппроксимируемой функции. Оба случая демонстрируют отсутствие переобучения и устойчивую сходимость алгоритма (рисунки 2–3).

Эксперименты проводились на вычислительном узле с процессором Intel Core i7–6850K (12 ядер, 3.60 GHz), 16 ГБ ОЗУ под управлением Devuan GNU/Linux 5. Использовался Python 3.12.7, вычисления выполнялись на CPU.

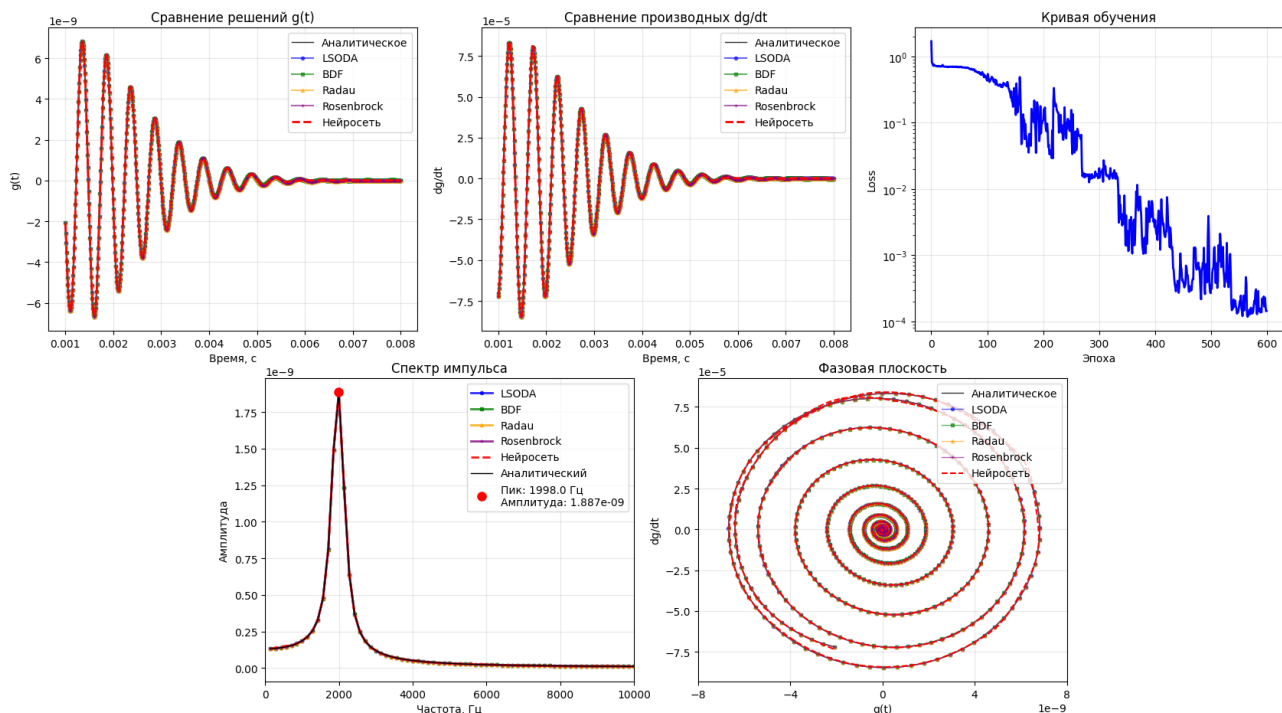


Рис. 3. Сравнение эффективности численных методов и нейросетевого подхода PINN для модели (1). Пример 2

### Заключение

Результаты сравнительного исследования демонстрируют, что нейросетевой подход PINN обеспечивает точность, сопоставимую с численными методами, при корректном воспроизведении как временной динамики сигнала, так и его спектральных характеристик. Кривая обучения PINN показывает устойчивую сходимость, а фазовая траектория полностью соответствует аналитическому решению, что

подтверждает физическую осмысленность нейросетевой модели. Несмотря на значительные вычислительные затраты на этапе обучения, PINN представляет собой перспективную альтернативу традиционным методам для решения дифференциальных уравнений. Ключевым преимуществом подхода является высокая скорость предсказания обученной модели, составляющая 0.001 секунды. После завершения процесса обучения сеть способна практически мгновенно вычислять решения для произвольных точек области, что особенно ценно в задачах, требующих многократных обращений к модели при варьируемых параметрах или начальных условиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Detkov V. A. Analysis of Elastic Waves Generated in Frozen Grounds by Means of the Electromagnetic Pulse Source “Yenisei”. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2018;193(1):12058.
2. Vershinin A., Ampilov Yu., Levin V., Petrovsky K. Full Waveform Modeling in Seismic Exploration Based on a Digital Geological Model Using Spectral Element Method on GPU. *16th World Congress on Computational Mechanics and 4th Pan American Congress on Computational Mechanics*. 2024. DOI: 10.23967/c.wccm.2024.056.
3. Lukovenkova O. O., Solodchuk A. A. Digital Signal Processing Methods for Geoacoustic Emission. *23rd International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA), Moscow, Russian Federation*. 2021:1–5. DOI: 10.1109/DSPA51283.2021.9535762.
4. Dobrynin E., Maksymov M., Boltenev V. Development of a Method for Determining the Wear of Artillery Barrels by Acoustic Fields of Shots. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020;3:6–18. DOI: 10.15587/1729-4061.2020.206114.
5. Prokopovich S. V., Uzdin A. M., Ivanova T. V. Setting Seismic Input Characteristics Required for Designing. *Magazine of Civil Engineering*. 2021;2(102):10209.
6. Lukovenkova O. O., Marapulets Y. V., Solodchuk A. A. Adaptive Approach to Time-Frequency Analysis of AE Signals of Rocks. *Sensors*. 2022;22:9798. DOI: 10.3390/s22249798.
7. Gapeev M. I., Senkevich Y. I., Lukovenkova O. O. Estimation of Probability Distributions of Geoacoustic Signal Characteristics. *Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing*. 2021;2096(1):012018.
8. Sergienko D., Parovik R. Berlage Oscillator as a Mathematical Model of High-Frequency Geoacoustic Emission with One Dislocation Source. *Acoustics*. 2025;7(4):65. DOI: 10.3390/acoustics7040065.
9. Мингазова Д. Ф., Паровик Р. И. Некоторые аспекты качественного анализа модели высокочастотной геоакустической эмиссии. *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2023;42(1):191–206. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-42-1-191-206.
10. Гапеев М. И., Солодчук А. А., Паровик Р. И. Связанные осцилляторы как модель высокочастотной геоакустической эмиссии. *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2022;40(3):88–100. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-88-100.
11. Sergienko D. F., Parovik R. Investigation of a System of Two Coupled Linear Oscillators with Non-constant Coefficients. *Journal of Mathematical Sciences*. 2025. DOI: 10.1007/s10958-025-07912-z.
12. Сергиенко Д. Ф., Паровик Р. И. Программный комплекс QAMODEL: компьютерное моделирование высокочастотной геоакустической эмиссии. *Программные продукты и системы*. 2025;38(2):261–268. DOI: 10.15827/0236-235X.150.261-268.
13. Сергиенко Д. Ф., Паровик Р. И. Исследование эффективности численных методов для решения математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии. *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2025;50(1):169–183. DOI: 10.26117/2079-6641-2025-50-1-169-183.
14. Shampine L. F., Reichelt M. W. The MATLAB ODE Suite. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1997;18(1):1–22. DOI: 10.1137/s1064827594276424.
15. Hindmarsh A. C. ODEPACK, a Systematized Collection of ODE Solvers. *Scientific Computing*. 1983;55–64.
16. Petzold L. Automatic Selection of Methods for Solving Stiff and Nonstiff Systems of Ordinary Differential Equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1983;4(1):136–148. DOI: 10.1137/0904010.
17. Hairer E., Wanner G. Stiff Differential Equations Solved by Runge-Kutta Methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1999;111(1–2):93–111. DOI: 10.1016/S03770427(99)00134-X.

18. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential – Algebraic Problems. Berlin: Springer-Verlag; 1991.
19. Ponalagusamy R., Ponnammal K. A Parallel Fourth Order Rosenbrock Method: Construction, Analysis and Numerical Comparison. *Int. J. Appl. Comput. Math.* 2015;1(1);45–68. DOI: 10.1007/s40819-014-0002-x.
20. Tristanov A., Lukovenkova O., Marapulets Yu., Kim A. Improvement of Methods for Sparse Model Identification of Pulsed Geophysical Signals. *Conf. Proc. of SPA 2019*. Poznan. 2019;256–260. DOI: 10.23919/SPA.2019.8936817.