

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОЛГОВРЕМЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО РАЗВИТИЯ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ

Л. А. Прокудина

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет),
г. Челябинск, Российская Федерация

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0793-7667>, [✉ prokudinala@susu.ru](mailto:prokudinala@susu.ru)

Аннотация: представлена нелинейная математическая модель развития возмущений в жидкой пленке — нелинейное параболическое уравнение — для амплитуды огибающей спектрально узкого волнового пакета. Коэффициенты нелинейного параболического уравнения выражены через инкремент, частоту, а также их первые и вторые производные. По результатам вычислительных экспериментов в области неустойчивости жидкой пленки для умеренных чисел Рейнольдса выделены точки перегиба на кривой инкремента и гармоники максимального инкремента. Для волнового числа, соответствующего точке перегиба, скачкообразно меняется механизм нелинейного развития возмущений. В окрестности максимального инкремента коэффициенты при нелинейном члене нелинейного параболического уравнения отличны от нуля и практически сохраняют постоянное значение. Также по спектру волновых чисел наблюдается падение фазовой скорости до ее минимального значения в точке максимального инкремента. Амплитуды волнового пакета, возбужденного вблизи кривой нейтральной устойчивости, затухают.

Ключевые слова: жидкая пленка, неустойчивость, инкремент, фазовая скорость, волновой пакет, нелинейное параболическое уравнение.

Для цитирования: Прокудина Л. А. Математическое моделирование долговременного нелинейного развития и взаимодействия возмущений в жидкой пленке. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):101–105.

Поступила в редакцию: 16.10.2025.

В окончательном варианте: 19.11.2025.

SIMULATION OF THE LONG-TERM NONLINEAR EVOLUTION AND INTERACTION OF DISTURBANCES IN A LIQUID FILM

L. A. Prokudina

South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russian Federation

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0793-7667>, [✉ prokudinala@susu.ru](mailto:prokudinala@susu.ru)

Abstract: we present a nonlinear mathematical model describing the evolution of disturbances on a liquid film surface. The model is formulated as a nonlinear parabolic equation for the envelope amplitude of a narrow wave packet. The equation coefficients are expressed in terms of wave characteristics, including growth rate, frequency, and their first- and second-order derivatives.

Using calculations in the liquid film instability region, we identified inflection points of the growth rate and the wave numbers corresponding to the maximum growth rate for moderate Reynolds numbers. We show that the nonlinear evolution of disturbances changes abruptly at the wave numbers where the growth rate is maximal, while the equation coefficients remain nonzero and vary only slightly. We also demonstrate that the phase velocity reaches a minimum at the point of maximum growth rate. Wave packet amplitudes perturbed near the neutral stability point experience damping.

Keywords: liquid film, instability, increment, phase velocity, wave package, nonlinear parabolic equation.

Cite this article: Prokudina L. A. Simulation of the Long-Term Nonlinear Evolution and Interaction of Disturbances in a Liquid Film. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):101–105.

Original article submitted: 16.10.2025.

Revision submitted: 19.11.2025.

Для расчета и реализации течений жидких пленок (тонких слоев вязкой жидкости) [1, 2] в пленочных аппаратах различных отраслей промышленности [3–8] ставятся задачи исследования параметров волнового течения, возможности влияния на них различных физико-химических факторов. С другой стороны, современные технологии требуют развития теоретических и численных методов исследования нелинейных моделей, к которым относится математическая модель жидкой пленки.

Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений в жидкой пленке исследовано заданием волнового пакета, ширина полосы которого $\Delta k = o(\varepsilon)$. Выведено нелинейное параболическое уравнение для амплитуды огибающей волнового пакета (НПУ) [9]:

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} + i \frac{\partial \omega_i}{\partial k_x} \frac{\partial A}{\partial x_1} - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x^2} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = \bar{\omega}_i A - (\beta_1 + i\beta_2) |A|^2 A, \quad (1)$$

где A — комплексная амплитуда огибающей волнового пакета; t_2, x_1 — медленные переменные; $\bar{\omega}_i$ — нелинейный инкремент, β_1 характеризует нелинейное развитие возмущений, β_2 характеризует зависимость фазы от амплитуды, k_x — волновое число.

Коэффициенты НПУ (1) выражены через первые и вторые производные частоты (ω_r) и инкремента (ω_i), для которых получено дисперсионное соотношение:

$$(\omega_r + i\omega_i)(a_7 k_x + i) + a_1 k_x^4 - a_4 i k_x^3 - a_6 k_x^2 + a_{11} i k_x = 0. \quad (2)$$

Учет различных физико-химических факторов, в частности, наличия высоких температур, нерастворимых поверхностно-активных веществ, движения газового потока над свободной поверхностью пленки, представлен в коэффициентах уравнения (2):

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\sigma Re}{3}, & a_4 &= -\frac{Re^2 F_x N}{2}, \\ a_6 &= -\frac{Re M}{2} + \frac{3}{40} Re^3 F_x (\tau_x + F_x), \\ a_7 &= \frac{5}{24} Re^2 F_x, & a_{11} &= -Re F_x - \tau_x Re, \end{aligned}$$

где Re — число Рейнольдса; F_x — число Фруда; σ — параметр поверхностного натяжения; N — параметр поверхностной вязкости; M — число Марангони; τ_x — постоянное касательное напряжение.

Вычислительные эксперименты по расчету частоты, инкремента уравнения (2), а также фазовой скорости [10] представлены на рис. 1–3.

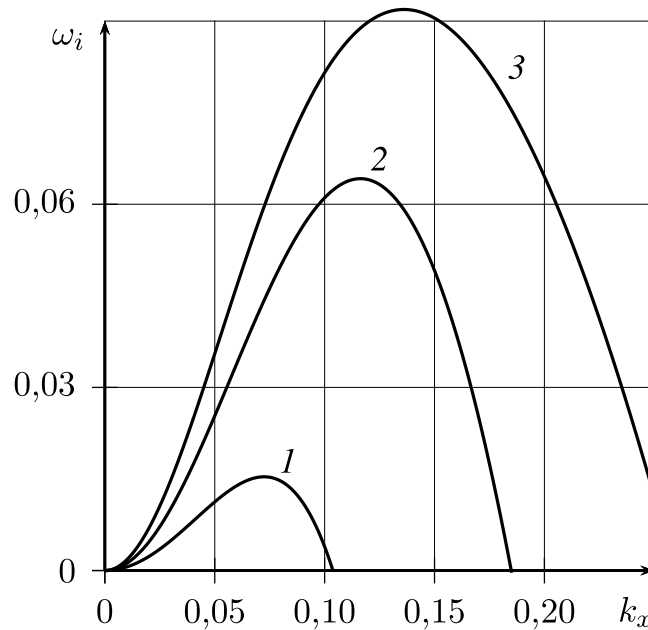


Рис. 1. Инкремент: 1 — $Re = 5$, 2 — $Re = 10$, 3 — $Re = 15$

На кривой инкремента можно выделить три характерных точки (рис. 1): точку перегиба, точку максимального значения инкремента и точку, соответствующую положению кривой нейтральной устойчивости.

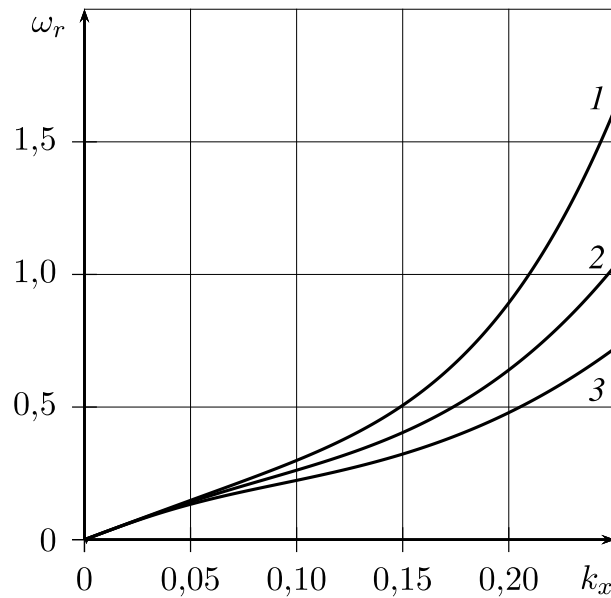


Рис. 2. Частота: 1 – $Re = 5$, 2 – $Re = 10$, 3 – $Re = 15$

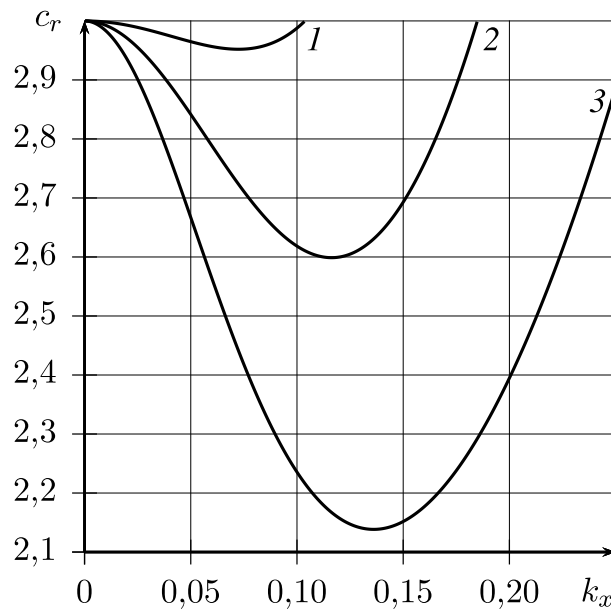


Рис. 3. Фазовая скорость: 1 – $Re = 5$, 2 – $Re = 10$, 3 – $Re = 15$

Для более скоростных течений жидких пленок наблюдается снижение величин частоты (рис. 2) и фазовой скорости (рис. 3). Минимальное значение фазовой скорости соответствует режиму с максимальным значением инкремента.

Представим в (1) комплексную амплитуду $A = U + iV$, а производные по координате x – конечными разностями:

$$U'_j = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}, \quad V'_j = \frac{V_{j+1} - V_{j-1}}{2\Delta x},$$

$$U''_j = \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{\Delta x^2}, \quad V''_j = \frac{V_{j+1} - 2V_j + V_{j-1}}{\Delta x^2}$$

и перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dU_j}{dt} = dV_j' + d_1 U_j'' - d_2 V_j'' + \gamma U_j - (U_j^2 + V_j^2) (\beta_1 U_j - \beta_2 V_j), \\ \frac{dV_j}{dt} = -dU_j' + d_1 V_j'' + d_2 U_j'' + \gamma V_j - (U_j^2 - V_j^2) (\beta_1 V_j + \beta_2 U_j), \end{cases} \quad (3)$$

где $j = 1, 2, \dots, 100$.

Коэффициенты (3): $d = \frac{\partial \omega_i}{\partial k_x}$, $d_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2}$, $d_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2}$, $\gamma = \frac{\omega_i}{\varepsilon^2}$.

Результаты вычислительных экспериментов по нелинейному развитию и взаимодействию возмущений, проведенных для режима свободного стекания вертикальной жидкой пленки воды, представлены на рис. 4–5 (• обозначены точки, соответствующие максимальному значению инкремента ω_i , × — точки, соответствующие $\omega_i = 0$). В точке перегиба на кривой инкремента скачкообразно меняется механизм нелинейного развития возмущений (рис. 4–5). В окрестности точек максимального инкремента и до кривой нейтральной устойчивости наблюдается плавное изменение величин β_1 и β_2 , сохраняется характер нелинейного развития и взаимодействия возмущений, что связано с формированием достаточно устойчивой диссипативной структуры.

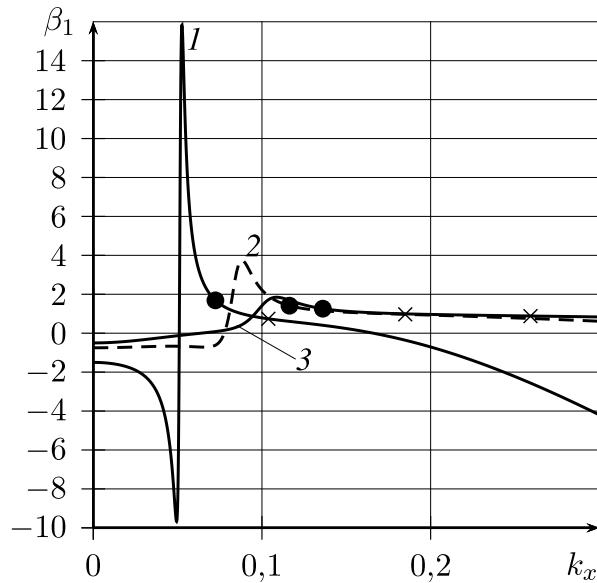


Рис. 4. Характер нелинейного развития возмущений. 1 — $Re = 5$, 2 — $Re = 10$, 3 — $Re = 15$

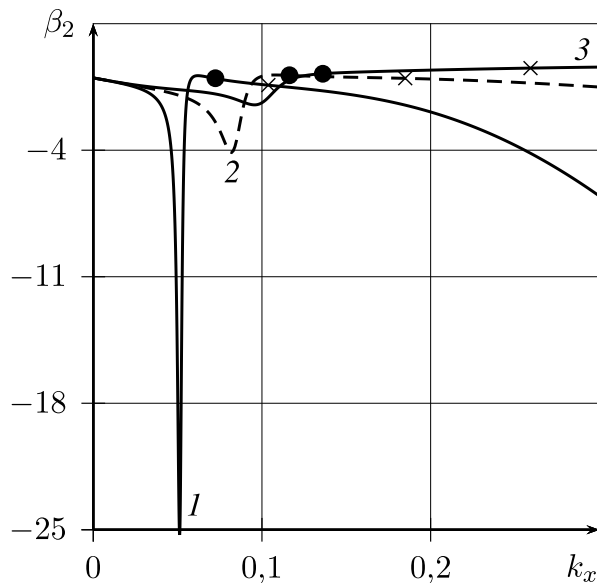


Рис. 5. Нелинейная зависимость фазы от амплитуды. 1 — $Re = 5$, 2 — $Re = 10$, 3 — $Re = 15$

Величины коэффициентов при нелинейном члене уравнения (1) в окрестности максимального значения инкремента (волновое число $k_{\omega_{imax}}$) приведены в таблице.

Таблица

Свободное стекание жидкой пленки воды

Re	$k_{\omega_{imax}}$	ω_{imax}	C_r	β_1	β_2
1	0.01919	0.00022	2.99986	7.50449	-0.01525
2	0.03418	0.00140	2.99825	3.76784	-0.02679
3	0.04784	0.00410	2.99230	2.55092	-0.03552
4	0.06058	0.00871	2.97823	1.98451	-0.03871
5	0.07245	0.01536	2.95201	1.68957	-0.03332
6	0.08340	0.02388	2.91046	1.53829	-0.01608
7	0.09331	0.03376	2.85229	1.46725	0.01368
8	0.10211	0.04428	2.77860	1.43767	0.05312
9	0.10974	0.05464	2.69265	1.42465	0.09697
10	0.11628	0.06419	2.59882	1.41392	0.13960
11	0.12181	0.07250	2.50155	1.39760	0.17635
12	0.12642	0.07939	2.40459	1.37357	0.20468
13	0.13026	0.08484	2.31069	1.34166	0.22371
14	0.13345	0.08896	2.22164	1.30316	0.23382
15	0.13610	0.09190	2.13841	1.25958	0.23603

Вычислительные эксперименты по исследованию долговременного развития возмущений волнового пакета указывают на неоднородность амплитуды по пространственной координате, что порождает пространственные производные фазы. Такое взаимное влияние отражается на амплитуде огибающей волнового пакета [9]. При возбуждении волнового пакета вблизи кривой нейтральной устойчивости наблюдается затухание его амплитуд.

ЛИТЕРАТУРА

- Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. *ЖЭТФ*. 1948;18(1):3–28.
- Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. *ЖЭТФ*. 1949;19(2):105–120.
- Stainhorp F. P., Allen J. M. The Development of Ripples on the Surface of a Liquid Film Flowing Inside a Vertical Tube. *Transactions of the Institute of Chemical Engineers*. 1965;43:85–91.
- Jones L. O., Whitaker S. An Experimental Study of Falling Liquid Films. *American Institute of Chemical Engineers Journal*. 1966;12(3):525–529.
- Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. *Волновое течение пленок жидкости*. Новосибирск: Наука; 1992. 255 с.
- Демехин Е. А., Каплан М. А., Шкадов В. Я. О математических моделях теории тонких слоев вязкой жидкости. *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1987;6:73–81.
- Холпанов Л. П., Шкадов В. Я. *Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела*. Москва: Наука; 1990. 271 с.
- Сергеев А. Д., Холпанов Л. П., Николаев Н. А. и др. Измерение волновых параметров пленочного течения жидкости методом локальной электропроводности. *ИФЖ*. 1975;29(5):843–846.
- Прокудина Л. А., Вяткин Г. П. Самоорганизация возмущений в жидких пленках. *ДАН*. 2011;439(4):481–484.
- Prokudina L. A. Mathematical Modeling of Wave Parameters of the Flow of a Thin Layer of Viscous Liquid in Film Apparatuses. *AIP Conference Proceedings*. 2020;2312:050019. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0035536>.