


## ТРАЕКТОРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ РОБОТА С ПОМОЩЬЮ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

**Н. В. Плотникова**

*Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет),  
г. Челябинск, Российская Федерация*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9164-8723>,  [plotnikovanv@susu.ru](mailto:plotnikovanv@susu.ru)*

*Аннотация:* задача планирования траектории заключается в определении заданного закона изменения положений степеней свободы робота за определенный промежуток времени. Движение будет заключаться в последовательном прохождении конкретных точек позиционирования, причем перемещаться по указанным координатам будут либо звенья манипулятора (при задании точек в пространстве обобщенных координат), либо его схват (при задании их в декартовом пространстве). Для построения гладкой траектории можно применить интерполяционные полиномы: такой подход позволяет сформировать простую систему линейных уравнений, легко поддающихся решению. Еще один способ получения гладкой траектории заключается в применении нескольких многочленов, соединяемых определенным образом.

Тем не менее, если величины обобщенных координат, скоростей и ускорений заданы в начальных и конечных точках траектории, то может оказаться, что матрица формируемой системы линейных уравнений будет вырожденной, вследствие чего искомое решение может не существовать. При увеличении числа промежуточных точек траектории увеличивается степень используемого многочлена, что, в свою очередь, создает проблемы при расчете его значений в каждой отдельной точке из-за существенного роста вычислительной нагрузки. Устранить недостаток, связанный с большими объемами вычислений, можно, применяя сплайн-функции. Согласно теоретическим расчетам образующаяся система уравнений гарантированно имеет решение и эффективно решается методом прогонки.

*Ключевые слова:* планирование траектории робота, сплайн-аппроксимация.

*Для цитирования:* Плотникова Н. В. Траекторное планирование робота с помощью сплайн-функций. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):95–100.


*Поступила в редакцию:* 14.10.2025.

*В окончательном варианте:* 14.11.2025.

## ROBOT PATH PLANNING USING SPLINE FUNCTIONS

**N. V. Plotnikova**

*South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russian Federation*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9164-8723>,  [plotnikovanv@susu.ru](mailto:plotnikovanv@susu.ru)*

*Abstract:* we studied the problem of robot path planning, which determines how the robot's degrees of freedom change over time. The robot moves by passing through specified points, either with its joints (when points are given in joint space) or with its end-effector (when points are given in Cartesian space). We constructed smooth paths using interpolation polynomials, which produce simple linear systems that are easy to solve. We also explored using multiple polynomials connected in sequence to generate smooth paths.

We found that specifying joint positions, velocities, and accelerations at the start and end points can make the linear system degenerate, preventing a solution from existing. Increasing the number of intermediate points requires higher-degree polynomials, which significantly increases the computational load when calculating values at each point. We addressed this issue by using spline functions, which guarantee that the system of equations has a solution and can be efficiently solved using the sweep method.

*Keywords:* robot path planning, spline approximation.

*Cite this article:* Plotnikova N. V. Robot Path Planning Using Spline Functions. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):95–100.

*Original article submitted:* 14.10.2025.

*Revision submitted:* 14.11.2025.

При проектировании траекторий движений роботов используются разнообразные подходы и методики, в которых применяются графы, генетические алгоритмы, методы потенциальных полей или алгоритмы роя частиц [1–6].

Они большей частью ориентированы на движение мобильных роботов в пространстве с препятствиями либо в условиях движения нескольких роботов.

Рассмотрим процедуру кинематического управления роботом-манипулятором. Ее реализация возможна в два этапа. Первый этап включает разработку траектории, то есть предварительное задание программы перемещения звеньев робота  $q^*(t)$  в пределах определенного временного интервала  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ .

Второй этап подразумевает непосредственную обработку запланированной траектории приводами сочленений. Это типично для позиционных систем управления, где перемещение робота осуществляется путем последовательного прохождения определенных точек позиционирования либо непосредственно звеньями робота (если координаты заданы в пространстве обобщенных координат), либо рабочим органом (схватом) робота (при задании координат в трехмерном декартовом пространстве).

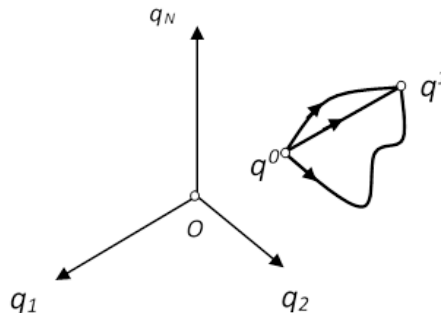
Проанализируем первый этап кинематического управления с точки зрения задачи математического программирования.

Планирование траектории представляет собой процедуру нахождения программного движения либо звеньев манипулятора  $q^*(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , либо его схвата  $s^*(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Методы, которые используются для этого, имеют много общего, но отличия обуславливают необходимость их отдельного рассмотрения.

1. Рассмотрим задачу перевода манипулятора из одной точки  $q^i$  в другую точку  $q^{i+1}$  в пространстве обобщенных координат  $Q = q^1 \times q^2 \times \dots \times q^N$ , где  $N$  — число звеньев манипулятора. Задача заключается в определении траектории  $q = q(t)$ ,  $t \in [t_n, t_k]$  с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} q(t_n) &= q^n, \\ q(t_k) &= q^k. \end{aligned}$$

При отсутствии каких-либо дополнительных условий или ограничений подобная задача допускает бесконечное множество вариантов решения (рис. 1).



**Рис. 1.** Перевод манипулятора из точки в точку в пространстве обобщенных координат

Если манипулятор начинает движение из состояния покоя либо должен остановиться в конечной точке, то при реализации закона движения по прямой возможны разрывы первого и второго рода в начальный и конечный моменты времени для скоростей и ускорений звеньев. С физической точки зрения это приводит к тому, что со стороны приводов к звеньям манипулятора нужно будет прикладывать бесконечно большие моменты или силы.

Применение специальной параметризации позволяет реализовать перемещение манипулятора по прямой линии с желаемой меняющейся скоростью, обеспечивающей равномерное и плавное прохождение всей траектории.

2. Альтернативный метод планирования траектории из одной точки в другую, отвечающей критериям гладкости, предусматривает применение интерполяционных многочленов более высокой степени относительно тех, что рассмотрены далее.

Обозначим обобщенную координату  $i$ -го звена манипулятора через  $q$ , и пусть известны ее значения в начальной и конечной точках временного отрезка  $[t_n, t_k]$ :

$$\begin{aligned} q(t_n) &= q^n, \\ q(t_k) &= q^k. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть на концах рассматриваемого отрезка  $[t_n, t_k]$  действуют следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t_n) = \dot{q}(t_k) = 0 \\ \ddot{q}(t_n) = \ddot{q}(t_k) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Ограничениям (1), (2) удовлетворяет многочлен пятой степени

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5. \quad (3)$$

Положим  $t_n = 0$ ,  $t_k = T$  и для нахождения коэффициентов полинома (3) составим систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} a_0 = q_0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 T + 3a_3 T^2 + 4a_4 T^3 + 5a_5 T^4 = 0, \\ a_2 + 6a_3 T + 12a_4 T^2 + 20a_5 T^3 = 0, \end{cases}$$

которая может быть легко разрешима.

Возможно вместо одного многочлена применить несколько, соединяемых так, чтобы итоговая траектория имела необходимую степень гладкости.

Иногда, когда известна информация о начальных и конечных значениях обобщенных координат, скоростей и ускорений, матрица полученной системы линейных уравнений может стать вырожденной, и в таком случае решение этой системы может отсутствовать.

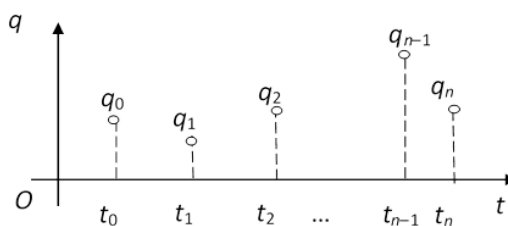
При перемещении манипулятора между точками в пространстве обобщенных координат (рис. 2) он должен попасть в момент времени  $t_i$  в каждую точку  $q_i$ :

$$q(t_i) = q_i. \quad (4)$$

При этом неважно, как (с какой скоростью) движется манипулятор через внутренние точки  $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ , но имеет значение выполнение условий для скоростей и ускорений в начальной и конечной точках  $q_0$  и  $q_n$ :

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 = a_1, \quad \ddot{q}_0 = b_1, \\ \dot{q}_n = a_2, \quad \ddot{q}_n = b_2, \end{aligned}$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — заданные векторы.



**Рис. 2.** Движение по точкам в пространстве обобщенных координат

Если в начале и в конце движения по траектории манипулятор находится в состоянии покоя, то задача определения траектории в пространстве обобщенных координат  $Q$  может быть решена с помощью интерполяционных многочленов степени  $n$  (если отсутствуют дополнительные ограничения для концов траектории) или степени  $n + 4$  (при наличии таких ограничений).

Однако, если количество точек велико, возрастает и степень многочлена, что усложняет процесс расчета его значений в каждой точке из-за большого объема вычислений. Для преодоления этой проблемы целесообразно применять сплайн-функции.

На каждом из отрезков траектории  $[a, b]$  (необязательно равноотстоящих) функции  $q(x), q'(x), \dots, q^{(m-1)}(x)$  должны быть непрерывными и сама функция  $q(x)$  должна иметь вид многочлена со степенью не больше  $m$ .

Если применить кубическую сплайн-интерполяцию, функция  $q(x)$  будет описываться многочленом:

$$q(x) = a_0^k + a_1^k x + a_2^k x^2 + a_3^k x^3, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

В этом случае количество неизвестных будет равно  $4n$ :  $a_j^i, i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, 2, 3$ .

Из условий непрерывности функции и ее производных можно получить  $n+1$  и  $3(n-1)$  уравнений, поэтому есть еще два дополнительных ограничения, которые могут быть наложены на функцию и которые будут указаны далее.

Если планируется циклическое повторение движений манипулятора, т. е. последовательность точек  $\{q_i\}, i = 0, 1, 2, \dots, n$ , которая аппроксимирует некоторый контур, должна быть пройдена манипулятором несколько раз так, что начало и конец траектории совпадают, т. е.  $q_0 = q_n$ , тогда необходимо наложить условие замкнутости траектории по скоростям и ускорениям:

$$\dot{q}_0 = \dot{q}_n, \quad \ddot{q}_0 = \ddot{q}_n.$$

Реализуя метод сплайн-функций, можно получить, что на рассчитанной траектории  $q(t)$  ряд составляющих векторов  $q$ , скоростей  $\dot{q}$  и ускорений  $\ddot{q}$  будет больше допустимых значений максимальных скоростей и ускорений  $\dot{Q}_i^{\max}, \ddot{Q}_j^{\max}$ , которые могут обеспечить звенья манипулятора.

Учесть ограничения на скорости и ускорения можно в виде следующих неравенств:

$$\max |\dot{q}_i(t)| \leq \dot{Q}_i^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

$$t_0 \leq t \leq t_n,$$

$$\max |\ddot{q}_i(t_k)| \leq \ddot{Q}_i^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

В качестве целевой функции можно принять время обхода  $T = t_n - t_0$  манипулятором заданной совокупности точек.

Построим на отрезке  $[x_k, x_{k+1}]$  кубический сплайн. Для функции  $q(x)$  вторая производная будет иметь следующий вид

$$q''(x) = q''_{k+1} \frac{x - x_k}{h_k} - q''_k \frac{x - x_{k+1}}{h_k}, \quad (8)$$

где  $h_k = x_{k+1} - x_k$ , а  $q''_i = q''(x_i)$  — неизвестные значения вторых производных сплайна, взятых в узловых точках, а так как функция  $q''(x)$  непрерывна, то не нужно указывать, с какой стороны взяты эти производные. Проинтегрируем дважды выражение (8), получим:

$$q'(x) = q'_k + \int_{x_k}^x q''(t) dt = q'_k + \frac{(x - x_k)^2}{2h_k} q''_{k+1} - \frac{(x - x_{k+1})^2}{2h_k} q''_k + \frac{h_k}{2} - q''_k \quad (9)$$

$$q(x) = q_k + \int_{x_k}^x q'(t) dt = q_k + (x - x_k) q'_k + \frac{(x - x_k)^2}{6h_k} q''_{k+1} - \left[ \frac{(x - x_{k+1})^2}{6h_k} + \frac{h_k}{6} - (x - x_k) \frac{h_k}{2} \right] q''_k, \quad (10)$$

$q'_i, q''_i$  — являются неизвестными величинами, которые следует найти далее.

Положив в выражении (10)  $x = x_{k+1}$ , получим:

$$q_{k+1} = q_k + h_k q'_k + \frac{h_k^2}{6} q''_{k+1} \frac{h_k^2}{3} - q''_k. \quad (11)$$

Отсюда находим

$$q'_k = \frac{q_{k+1} - q_k}{h_k} - \frac{h_k^2}{6} q''_{k+1} + \frac{h_k^2}{3} q''_k. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), можно заметить, что сплайн  $q(x)$  будет полностью определяться значениями его вторых производных в узлах  $q''_k, q''_{k+1}$ . Поэтому, определив эти неизвестные, мы решим задачу поиска сплайна. Подставив выражение (12) в (9), получаем:

$$q'(x) = \frac{q_{k+1} - q_k}{h_k} - \frac{h_k^2}{6} q''_{k+1} + \frac{(x - x_k)}{2h_k} q''_{k+1} - \frac{(x - x_{k+1})}{2h_k} q''_k + \frac{h_k^2}{3} q''_k. \quad (13)$$

Выражения (8)–(13) справедливы для  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ . Применяя теперь соотношение (13) к отрезку  $[x_{k-1}, x_k]$ , имеем:

$$q'(x) = \frac{q_k - q_{k-1}}{h_{k-1}} - \frac{h_{k-1}}{6} q_k'' + \frac{(x - x_{k-1})^2}{2h_{k-1}} q_k'' - \frac{(x - x_k)}{2h_{k-1}} q_{k-1}'' + \frac{h_{k-1}^2}{6} q_{k-1}''.$$

Подставляя в последнее выражение  $x = x_k$ , получаем:

$$q'_k = \frac{q_k - q_{k-1}}{h_{k-1}} + \frac{h_{k-1}}{3} q_k'' + \frac{h_{k-1}}{6} q_{k-1}''.$$
 (14)

Сравнивая выражения (12) и (14), видим, что:

$$\frac{q_{k+1} - q_k}{h_k} - \frac{q_k - q_{k-1}}{h_{k-1}} = \frac{h_k}{6} q_{k+1}'' + \frac{h_k + h_{k-1}}{3} q_k'' + \frac{h_{k-1}}{6} q_{k-1}''.$$

Откуда следует, что:

$$\alpha_k q_{k+1}'' + 2q_k'' + (1 - \alpha_k) q_{k-1}'' = M_k,$$
 (15)

где

$$\alpha_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k-1}},$$
 (16)

$$M_k = 6 \frac{\frac{q_{k+1} - q_k}{h_{k+1}} - \frac{q_k - q_{k-1}}{h_k}}{h_{k+1} + h_k}.$$
 (17)

Уравнение (15) можно записать для  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 q_2'' + 2q_1'' + (1 - \alpha_1) q_0'' &= 6f(x_0, x_1, x_2), \\ \alpha_2 q_3'' + 2q_2'' + (1 - \alpha_2) q_1'' &= 6f(x_1, x_2, x_3), \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1} q_n'' + 2q_{n-1}'' + (1 - \alpha_{n-1}) q_{n-2}'' &= 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$
 (18)

Тем самым получаем систему линейных уравнений порядка  $(n - 1)$  относительно  $n + 1$  неизвестных  $q_0'', q_1'', \dots, q_n''$ . Очевидно, что система уравнений (18) всегда будет иметь решение. Если выбрать произвольно  $q_0'' = x$ ,  $q_1'' = y$ , то из первого уравнения можно определить  $q_2''$ , это значение подставить затем в остальные уравнения. Далее операция повторяется до тех пор, пока не будет найдено  $q_n''$  из последнего уравнения. Отсюда можно сделать вывод о существовании решения и его зависимости от двух произвольно выбранных параметров  $x$  и  $y$ .

Найдем решение системы (18). Зададимся значениями  $\ddot{q}_0$  и  $\ddot{q}_n$ , т. е. будем полагать, что на концах отрезка  $[a, b]$  значения вторых производных известны. Тогда имеем систему из  $(n - 1)$  уравнений с  $(n - 1)$  неизвестными вида:

$$\mathbf{C}\mathbf{z} = \mathbf{z},$$
 (19)

где  $\mathbf{C}$  — матрица  $(n - 1) \times (n - 1)$ :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 - \alpha_2 & 2 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - \alpha_{n-1} & 2 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{z}$  — вектор, элементы которого и нужно определить:

$$\mathbf{z} = (q_1'', q_1'', \dots, q_{n-1}'')^T.$$
 (20)

Матрицы, имеющие такой вид, называются ленточными, или матрицами Якоби, и для их обращения можно использовать специальный метод — рекуррентный метод прогонки.

Заметим, что для аппроксимации функций, которые не обладают достаточной степенью гладкости, часто используют именно сплайны.

### Использование сплайн-функций при планировании траектории

Метод формирования интерполяционных многочленов в форме кубического сплайна применим для разработки траектории в пространстве обобщенных координат. Как отмечалось ранее, основная цель состоит в создании плавной траектории  $q(t)$  в указанном пространстве, проходящей через заданные узловые точки  $q(t_i) = q_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , такой, чтобы на концах траектории дополнительно выполнялись соотношения  $\dot{q}_0 = \mathbf{a}_1$ ,  $\ddot{q}_0 = \mathbf{b}_1$ ,  $\dot{q}_n = \mathbf{a}_2$ ,  $\ddot{q}_n = \mathbf{b}_2$ , где  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  — заданные векторы.

1. Для построения сплайна применяется метод прогонки, реализация которого осуществляется посредством обратной рекурсии.

2. При планировании циклически повторяющихся движений манипулятора необходимо накладывать условие замкнутости траектории:

$$\dot{q}_0 = \dot{q}_n, \quad \ddot{q}_0 = \ddot{q}_n.$$

Система линейных уравнений также решается методом прогонки.

3. Реализация метода сплайн-функций для траекторного планирования может привести к тому, что ряд составляющих векторов скоростей и ускорений будет превышать некоторые допустимые значения (определяемые возможностями приводов манипулятора). Поскольку изменения ускорений носят линейный характер, то экстремальное значение достигается в точках, лежащих на границах отрезка, то есть в узловых точках.

Поскольку скорость зависит от времени квадратично, то для нахождения экстремума нужно дополнительно оценить значение скорости и во внутренних точках отрезка.

Ограничения на скорости и ускорения определяются условиями (6), (7), обеспечить выполнение этих условий возможно, изменив разбиение отрезка  $[t_0, t_n]$ , например, увеличив тот отрезок времени, где нарушаются эти ограничения (при этом будет увеличиваться время  $T = t_n - t_0$  обхода роботом заданного набора точек). Можно использовать и другой способ — минимизировать время обхода и выбрать такое разбиение  $\{t_i\}$ , при котором ограничения (6), (7) будут выполняться.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Головин В. А., Яковлев К. С. Прimitives движения робота в задаче планирования траектории с кинематическими ограничениями. *Информатика и автоматизация*. 2023;6:1354–1386. DOI: 10.15622/ia.22.6.4.
2. Лагузина Е. А. Обзор методов планирования траектории движения мобильных роботов. *Вестник науки*. 2025;1(6):1467–1475.
3. Павлов А. С. Методика планирования траектории движения группы мобильных роботов в неизвестной замкнутой среде с препятствиями. *Системы управления, связи и безопасности*. 2021;3:38–59. DOI: 10.24412/2410-9916-2021-3-38-59.
4. Hamdan N. et al. Study of Path Planning Methods in Two-Dimensional Mapped Environments. *International Conference on Interactive Collaborative Robotics*. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2023:137–155.
5. Huang H.-P., Chung S.-Y. Dynamic Visibility Graph for Path Planning. *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566)*. Sendai, Japan. 2004;3:2813–2818.
6. Pshikhopov V., Medvedev M. et al. Trajectory Planning Algorithms in Two-Dimensional Environment with Obstacles. *Informatics and Automation*. 2022;21(3):459–492. DOI: 10.15622/ia.21.3.1.