

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ С ТРЕЩИНАМИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**М. Н. Перельмутер**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Российская Федерация*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8430-5412>, ✉ [perelm@ipmnet.ru](mailto:perelm@ipmnet.ru)*

*Аннотация:* метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) в прямой формулировке используется для численного решения двумерных нестационарных задач несвязанной термоупругости при наличии трещин. Первым этапом является решение нестационарной задачи теплопроводности, для решения которой используется формулировка ГИУ без вычисления интегралов по объему тела и шаговая по времени схема с кусочно-постоянной интерполяцией температуры и теплового потока по границе области и по времени. Результаты решения задачи теплопроводности используются как начальные данные для задачи термоупругости. При решении ГИУ в задаче термоупругости используются квадратичные изопараметрические граничные элементы и специальные граничные элементы вблизи вершины трещины, учитывающие асимптотическое поведение переменных задачи. Разработан пакет программ для решения задач нестационарной термоупругости с трещинами. Получены решения новых задач термоупругости с трещинами.

*Ключевые слова:* метод граничных интегральных уравнений, нестационарная теплопроводность, термоупругость, трещины.

*Благодарности:* работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-49-02002.

*Для цитирования:* Перельмутер М. Н. Решение задач нестационарной термоупругости с трещинами методом граничных интегральных уравнений. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):87–94.

*Поступила в редакцию:* 14.10.2025.

*В окончательном варианте:* 21.11.2025.

## SOLUTION OF NONSTATIONARY THERMOELASTICITY PROBLEMS WITH CRACKS USING THE BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS METHOD

**M. N. Perelmuter**

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8430-5412>, ✉ [perelm@ipmnet.ru](mailto:perelm@ipmnet.ru)*

*Abstract:* we applied the boundary integral equation (BIE) method in its direct formulation to solve two-dimensional unsteady problems of uncoupled thermoelasticity in the presence of cracks. First, we solved the unsteady heat conduction problem using the BIE formulation without integrating over the body volume. We employed a time-stepping scheme with piecewise-constant interpolation of temperature and heat flux along the boundary and over time. We used the results of the heat conduction analysis as input data for the thermoelasticity problem.

In the thermoelasticity analysis, we solved the BIE using quadratic isoparametric boundary elements and special elements near the crack tip to capture the asymptotic behavior of the field variables. We implemented these methods in a software package to solve unsteady thermoelasticity problems with cracks. Using this approach, we obtained solutions to previously unsolved thermoelasticity problems involving cracks.

*Keywords:* boundary integral equations method, nonstationary heat conduction, thermoelasticity, cracks.

*Acknowledgements:* this work is supported by the Russian Science Foundation, project No. 24-49-02002.

*Cite this article:* Perelmuter M. N. Solution of Nonstationary Thermoelasticity Problems with Cracks Using the Boundary Integral Equations Method. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):87–94.

*Original article submitted:* 14.10.2025.

*Revision submitted:* 21.11.2025.

### Введение

Для решения нестационарных задач термоупругости с трещинами применяются преимущественно численные методы. Первые результаты получены методом конечных элементов [1–3]. Метод

граничных интегральных уравнений (ГИУ) применялся для решения нестационарных задач термоупругости с трещинами для однородных [4–6] и кусочно-однородных [7] областей, а также для моделирования трещин в материалах с градиентным изменением свойств [8, 9]. Первым этапом решения задачи термоупругости является решение нестационарной задачи теплопроводности. Для численного решения ГИУ нестационарной задачи теплопроводности используются два основных подхода. Первый из них основан на применении преобразования Лапласа к ГИУ, и решение выполняется в пространстве изображений для последовательности значений параметра преобразования [10]. Для нахождения значений неизвестных в действительном пространстве используется численная процедура обратного преобразования Лапласа. При таком подходе явная зависимость от времени в задаче устраняется, но возможны сложности при выполнении обратного преобразования. Второй подход основан на непосредственном интегрировании по времени ГИУ нестационарной теплопроводности с разбиением всего промежутка времени процесса теплообмена на последовательность временных шагов. Для численного решения ГИУ при этом используются две различные шаговые по времени схемы [11]: 1) каждый шаг решения по времени рассматривается как новая задача, и ввиду этого в конце каждого шага вычисляются значения температуры во внутренних точках области, которые используются как начальные значения для следующего шага по времени; 2) процесс интегрирования по времени всегда начинается с начального момента времени, и в процессе вычислений нужно хранить значения температуры и ее производных на границе тела для всех пройденных шагов по времени, а также соответствующие матрицы в дискретном представлении ГИУ. При такой схеме расчета не требуется вычислять значения температуры во внутренних точках области на каждом шаге по времени. В данной работе численное решение ГИУ нестационарной задачи теплопроводности выполняется посредством прямого интегрирования по времени с использованием второго типа шаговой схемы. Результаты решения задачи теплопроводности являются исходными данными для решения квазистатической несвязанной задачи термоупругости для тел с трещинами, с учетом связей между поверхностями трещины.

### ГИУ: теплопроводность и термоупругость

Для нестационарной задачи теплопроводности ГИУ для однородного тела или подобласти составной конструкции имеет вид [11]:

$$C(p) T(p, t_f) = K \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} [G(p, q, t_f, t) \psi(q, t) - F(p, q, t_f, t) T(q, t)] d\Gamma(q) dt - \int_V G(p, q, t_f, t_0) T_0(q, t_0) dV(q), \quad (1)$$

где  $K$  — коэффициент температуропроводности материала,  $T(q, t)$  — температура на границе тела и  $\psi(q, t) = \partial T(q, t) / \partial n$  — производная температуры по направлению внешней нормали к границе тела,  $t$  — время,  $t_0$  и  $t_f$  — начальный и конечный моменты времени, параметр  $C(p)$  зависит от локальной геометрии в точке  $p$ , последнее слагаемое в (1) учитывает вклад начального распределения температур  $T_0(q, t_0)$ .

Фундаментальные решения для двумерной задачи нестационарной теплопроводности  $G(p, q, \tau)$  и  $F(p, q, \tau)$  в ГИУ (1) определяются как [11]:

$$G(p, q, \tau) = \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4K\tau}\right)}{4\pi K\tau}, \quad F(p, q, \tau) = \frac{\partial G(p, q, \tau)}{\partial n} = -r \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4K\tau}\right)}{8\pi(K\tau)^2}, \quad (2)$$

где  $\tau = t_f - t$ ,  $r \equiv r(p, q)$  — расстояние между точками  $p$  и  $q$ .

Если начальное распределение температуры в теле является стационарным, то объемный интеграл в ГИУ (1) можно преобразовать к сумме интегралов по поверхности тела. В случае постоянной начальной температуры тела  $T_0$  выполняем в ГИУ (1) замену  $\bar{T}(q, t) = T(q, t) - T_0$  и интеграл по объему тела исключается из ГИУ. Далее полагаем  $T(q, t) \equiv \bar{T}(q, t)$ .

Для несвязанной квазистатической задачи термоупругости без массовых сил ГИУ для однородного тела или подобласти составной конструкции не содержит интегралов по объему тела [12]:

$$C_{ij}(p) u_j(p, t_f) = \int_{\Gamma} [G_{ij}(p, q) t_j(q, t) - F_{ij}(p, q) u_j(q, t)] d\Gamma(q) - K \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} [Z_i(p, q, t_f, t) \psi(p, t) - R_i(p, q, t_f, t) T(q, t)] d\Gamma(q) dt, \quad i, j = 1, 2, \quad (3)$$

где  $u_j(q, t)$  и  $t_j(q, t)$  — перемещения и усилия в точке  $q$  на границе подобласти от воздействия термомеханических нагрузок, коэффициенты матрицы  $C_{ij}(p)$  зависят от локальной геометрии в точке  $p$ , функции  $G_{ij}(p, q)$  и  $F_{ij}(p, q)$  — фундаментальные решения Кельвина статической задачи теории упругости, а функции  $Z_i(p, q, t_f, t)$  и  $R_i(p, q, t_f, t)$  являются решениями для перемещений и усилий при действии точечного теплового источника. При решении задачи термоупругости последние два интеграла в ГИУ (3) определяют температурную нагрузку, зависящую от времени.

Для состояния плоской деформации имеем ( $\alpha$  — коэффициент теплового расширения,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\tau = t_f - t$ ) [12]:

$$Z_i(p, q, \tau) = \frac{\alpha(1 - \nu)}{2\pi r(1 + \nu)} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4K\tau}\right) \right] \frac{\partial r}{\partial x_i}, \quad R_i(p, q, \tau) = \frac{\partial Z_i(p, q, \tau)}{\partial n}. \quad (4)$$

При наличии в концевой области трещины связей между ее поверхностями ГИУ (3) дополняется законом деформирования связей в форме [13]

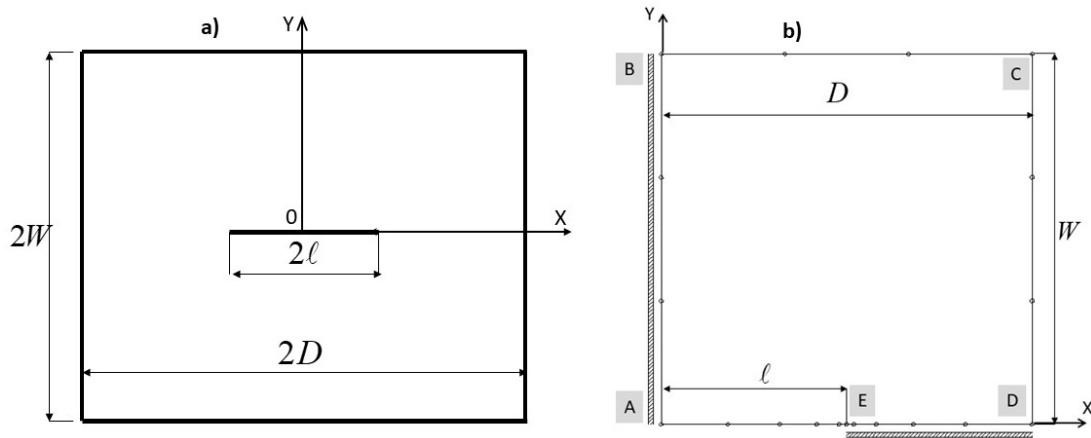
$$t_i(p, t) = \chi_i(p, t) \Delta u_i(p, t), \quad \chi_i(p, t) = \omega_i(p, t) \frac{E_b}{H}, \quad (5)$$

где  $i = 1, 2$  соответствует касательному и нормальному к плоскости трещины направлениям,  $t_i(p, t)$  и  $\Delta u_i(p, t)$  — компоненты вектора усилий и раскрытия трещины в локальной системе координат,  $\chi_i(p, t)$  — жесткость связей между поверхностями трещины,  $\omega_i(p, t)$  — безразмерная функция, зависящая от положения точки  $p$  вдоль концевой области трещины и времени нагружения,  $H$  — линейный размер, пропорциональный толщине зоны связей в концевой области трещины,  $E_b$  — эффективный модуль упругости связей.

### Методика численного решения ГИУ

Численное решение ГИУ (1) выполняется посредством прямого интегрирования по времени с использованием шаговой схемы второго типа. Полагаем, что начальная температура тела постоянна. В этом случае интеграл по объему тела не вычисляется. Используется кусочно-постоянная аппроксимация переменных задачи по времени: временной промежуток решения нестационарной задачи теплопроводности  $t_f$  (начальный момент времени  $t_0 = 0$ ) разбивается на  $N$  шагов равной длительности  $\Delta t = t_f/N$  и в пределах каждого шага температура  $T(q, t)$  и производная температуры по нормали к границе области  $\psi(q, t)$  полагаются постоянными. Для математического описания границы области при решении задачи теплопроводности используются линейные граничные элементы, на которых переменные задачи полагаются постоянными. Дискретизация границы тела и аппроксимация переменных позволяют заменить вычисление интегралов по всей границе области в ГИУ (1) суммой интегралов по совокупности элементов и получить дискретное представление ГИУ. Интегрирование по времени фундаментальных решений (2) выполняется аналитически. Интегрирование полученных выражений по пространственным координатам выполняется по квадратурным формулам Гаусса–Лежандра с учетом сингулярностей фундаментальных решений ГИУ (1) при вычислении интегралов по элементам, содержащим точку коллокации  $p$ .

Вклад температурной нагрузки в напряженно-деформированное состояние тела, определяемый последними двумя интегралами в (3), вычисляется на каждом шаге по времени в ходе решения задачи теплопроводности с учетом того, что температура и производная температуры постоянны в пределах каждого шага по времени, а также постоянны на каждом линейном граничном элементе. Интегрирование соответствующих выражений выполняется, как и при дискретизации ГИУ (1), аналитически по времени и численно — по пространственным координатам.



**Рис. 1.** Пластина с центральной трещиной,  $D/W = 1$ : а) расчетная область,  $2\ell$  — длина трещины; б) модель с учетом симметрии задачи,  $\ell/D = 0.5$ , 19 квадратичных граничных элементов

При решении ГИУ (3) квазистатической задачи термоупругости используются изопараметрические квадратичные граничные элементы и специальные квадратичные граничные элементы вблизи вершины трещины, учитывающие асимптотическое поведение перемещений и поверхностных усилий. Интегрирование фундаментальных решений  $G_{ij}(p, q)$  и  $F_{ij}(p, q)$  по граничным элементам в дискретном представлении ГИУ (3) выполняется численно. Дискретизация ГИУ (3), учет граничных условий и дополнительных условий между поверхностями трещины (5) позволяют получить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения узловых неизвестных задачи, см. описание методики в [13, 14]. Результаты вычисления интегралов функций (4), определяющих температурную нагрузку, учитываются при формировании правой части СЛАУ, получаемой для каждого шага по времени.

Для задач теплопроводности и термоупругости выполняется одинаковая дискретизация границы области. Ввиду этого при решении задачи теплопроводности  $M$  узлов на границе области соответствуют  $M$  линейным элементам с кусочно-постоянной аппроксимацией переменных, а в задаче термоупругости указанные  $M$  узлов определяют  $M/2$  квадратичных изопараметрических элементов на границе области. Для получения удовлетворительной точности результатов расчета в задаче термоупругости решение задачи теплопроводности выполняется с увеличенным числом узлов, которое определяется параметром дополнительного дробления границы  $M_u$  (четное число). При одинаковой начальной дискретизации границы области в обеих задачах ( $M$  узлов) и задании параметра  $M_u$  решение задачи теплопроводности выполняется с  $M \cdot M_u$  кусочно-постоянными элементами (число узлов также  $M \cdot M_u$ ) на границе области, а решение задачи термоупругости — с  $M/2$  квадратичными элементами на границе области ( $M$  узлов всего).

При решении квазистатической задачи термоупругости расчет напряженно-деформированного состояния тела выполняется для каждого временного шага, для которого получено решение задачи нестационарной теплопроводности и сформирован вектор термической нагрузки. При завершении расчета на каждом временном шаге по методике, рассмотренной в [13], определяются КИН, являющиеся функцией времени, которые вычисляются по значениям нормального раскрытия трещины  $\Delta u_n(t)$  в промежуточном узле квадратичного граничного элемента длины  $L$ , примыкающего к вершине трещины ( $E$  — модуль упругости материала,  $\beta = 1$  для плоского напряженного состояния,  $\beta = 1 - \nu^2$  — для плоской деформации):

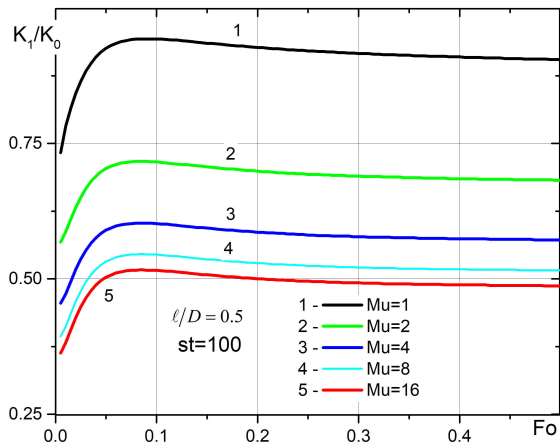
$$K_I(t) = \frac{E}{2\beta} \Delta u_n(t) \sqrt{\frac{2\pi}{L}}.$$

Методика численного решения ГИУ нестационарных задач теплопроводности и квазистатических термоупругости с трещинами реализована в пакете программ для ЭВМ.

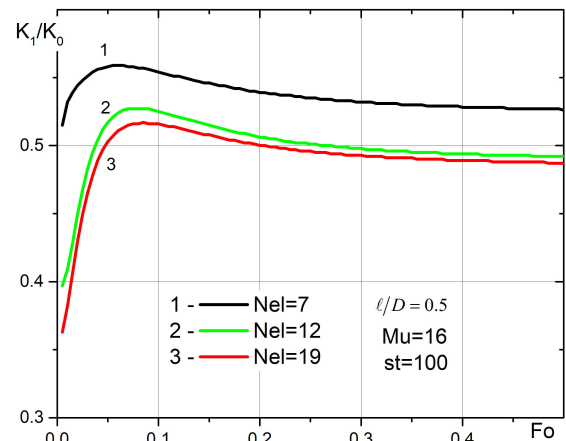
### Результаты расчетов

Для оценки точности разработанной методики численного решения ГИУ выполнен расчет КИН при температурном нагружении пластины с центральной прямолинейной трещиной, рис. 1а. Полагалось, что процесс теплообмена происходит на временном промежутке  $0 \leq Fo \leq 0.5$  ( $Fo = Kt/D^2$  —

число Фурье,  $t$  — время расчета). В начальный момент времени пластина и поверхность трещины имеют постоянную температуру  $T_1$ , на контуре пластины при  $|x| = D$ ,  $|y| \leq W$  и  $|y| = W$ ,  $|x| \leq D$  в процессе теплообмена поддерживается постоянная температура  $T_2 > T_1$ , а на поверхности трещины сохраняется температура  $T_1$ . При такой температурной нагрузке возникает КИН, соответствующий растягивающей нагрузке и, ввиду симметрии температурной и механической задач, расчет выполнен для четверти пластины ( $0 \leq x \leq D$ ,  $0 \leq y \leq W$ ), см. рис. 1b, где тонкие заштрихованные зоны  $AB$  и  $DE$  (эти обозначения только на рисунке, не являются частью модели) показывают участки границы модели, на которых задан нулевой тепловой поток в задаче теплопроводности и заданы нулевые перемещения по нормали к соответствующему участку границы, а также нулевые касательные усилия. На участках границы  $BC$  и  $CD$  задана температура  $T_2$ , а на поверхности трещины  $EA$  — температура  $T_1$ , указанные участки границы области свободны от внешних нагрузок. Решение задачи термоупругости

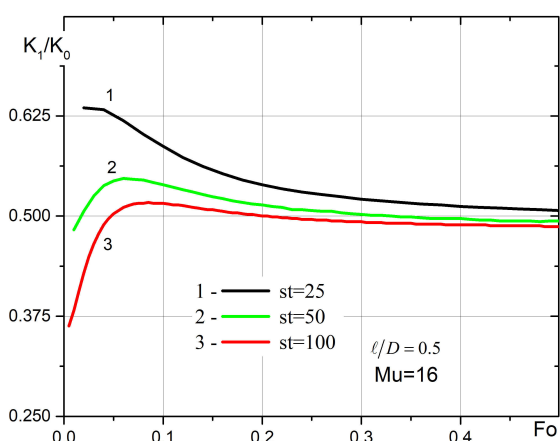


**Рис. 2.** КИН при изменении параметра дополнительного дробления границы  $Mu$ , 19 квадратичных элементов, число шагов по времени  $st = 100$

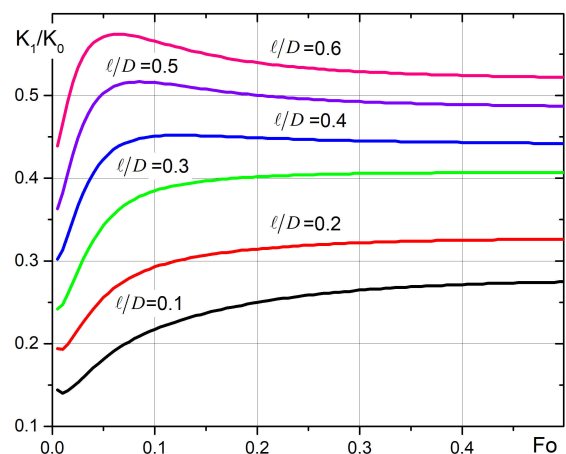


**Рис. 3.** КИН при изменении числа узлов  $M = 2 \cdot Nel$  в задаче термоупругости,  $Mu = 16$ , число шагов по времени  $st = 100$

получено для состояния плоской деформации, коэффициент Пуассона материала  $\nu = 0.3$ . Нормирование значений КИН выполнено величиной  $K_0 = \alpha E (T_2 - T_1) \sqrt{W}$ , где  $E$  — модуль упругости материала. Для оценки влияния числа узлов на границе области при решении задачи теплопроводности на точ-



**Рис. 4.** КИН при изменении числа шагов по времени в задаче теплопроводности,  $Mu = 16$ ,  $Nel = 19$

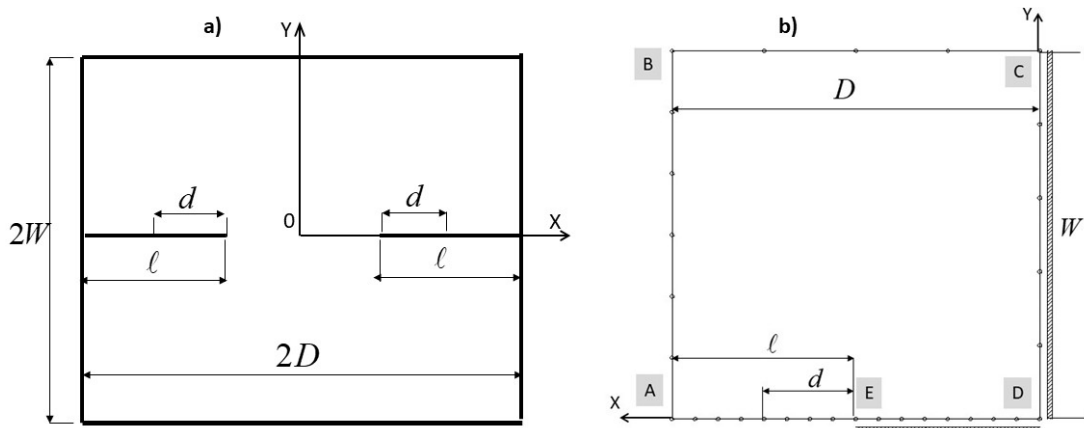


**Рис. 5.** КИН при изменении относительной длины трещины  $l/D$ ,  $Mu = 16$ ,  $Nel = 19$ , число шагов по времени  $st = 100$

ность решения задачи термоупругости выполнены расчеты для ряда значений параметра  $Mu$ , см. рис. 2. Имеется быстрая сходимость результатов расчета к известному решению [3], погрешность расчета при  $Mu = 8$  не превышает 5%. Оценка влияния на точность расчетов числа элементов при решении задачи

термоупругости выполнена при  $Mu = 16$ . Количество квадратичных граничных элементов  $Nel > 12$  обеспечивает достаточную точность решения, см. рис. 3. Влияние числа шагов по времени  $st$  при решении задачи теплопроводности на точность решения задачи термоупругости рассмотрено при  $Nel = 19$  квадратичных элементах на границе области и  $Mu = 16$ . Удовлетворительная точность результатов расчета обеспечивается при выборе 50 – 100 шагов по времени, см. рис. 4. Зависимости КИН от относительного времени теплообмена  $Fo = Kt/D^2$  для трещин различной длины ( $\ell/D = 0.1 - 0.6$ , обозначения см. рис. 1б) приведены на рис. 5. Имеется удовлетворительное соответствие с результатами работ [3, 5, 6].

В качестве примера влияния нестационарных температурных полей на КИН для трещины со связями в концевой области рассмотрена задача для пластины шириной  $2D$  и высотой  $2W$  с двумя краевыми трещинами длины  $\ell$ , заполненными линейно-упругими связями, рис. 6а, ( $D/W = 1, D/\ell = 2, D = 10$  мм, состояние плоской деформации). Материал пластины – керамика ( $Al_2O_3$ ) с физико-механическими свойствами: модуль упругости  $E = 360$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.2$ , коэффициент температуропроводности  $K = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , коэффициент линейного расширения  $\alpha = 8 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ . В начальный момент времени ( $t = 0$ ) пластина имеет постоянную температуру  $T_1$ . Начиная с момента времени  $t > 0$  боковые поверхности пластины  $|x| = D$  поддерживаются при температуре  $T_2$ , меньшей, чем  $T_1$ . Расчеты тепловых полей и температурных напряжений выполнялись ввиду симметрии задачи для 1/4 пластины  $-D \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq W$ , см. рис. 6б. Граничные условия: на участке  $AB$  задана температура  $T_2$ , а на участках  $BC, CD, DE$  и  $EA$  задан нулевой тепловой поток; тонкие заштрихованные зоны  $CD$  и  $DE$  показывают участки границы, на которых заданы нулевые нормальные перемещения, а также нулевые касательные усилия; участки границы области  $AB$  и  $BC$  свободны от внешних нагрузок. При учете связей между поверхностями трещины на участке концевой области трещины  $-D + \ell - d \leq x < -D + \ell$  выполняются условия (5), остальная часть трещины  $EA$  свободна от внешних нагрузок.



**Рис. 6.** Пластина с двумя краевыми трещинами,  $D/W = 1$ : а) расчетная область,  $\ell$  – длина трещины,  $d$  – концевая область трещины; б) модель с учетом симметрии задачи,  $\ell/D = 0.5, d/\ell = 0.5, 31$  квадратичный граничный элемент

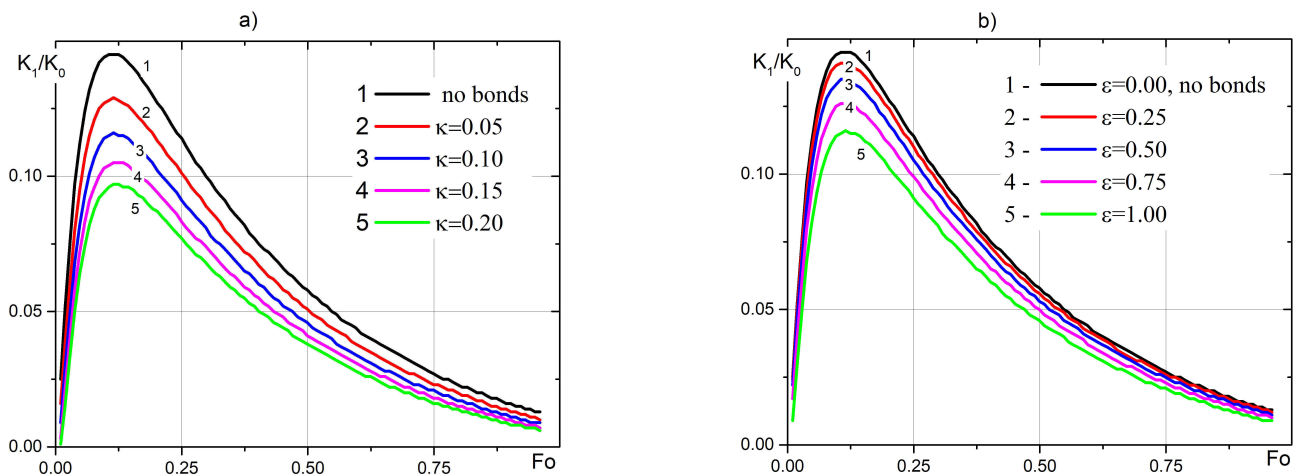
Расчет выполнен при  $\Delta T = T_1 - T_2 = 50 \text{ К}$  для пластины с трещинами без связей и при наличии трещин с различным размером концевой области, заполненной связями. Полагалось, что компонента жесткости связей, соответствующая касательному к плоскости трещины направлению,  $\chi_1(p, t)$  равна нулю и  $\omega_2(p, t) = 1$ , см. выражение (5). Нестационарное температурное поле является причиной возникновения в пластине нормальных напряжений, раскрывающих трещину. Наличие связей между поверхностями трещины сдерживает ее раскрытие при термической нагрузке. Выполнено параметрическое исследование влияния жесткости связей в концевой области трещины на величину КИН. Для нормировки и представления результатов использованы следующие значения:

$$K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell}, \quad \sigma_0 = \frac{\alpha E (T_1 - T_2)}{1 - \nu}, \quad \kappa = \frac{E_b \ell}{HE}, \quad (6)$$

где  $\kappa$  – относительная жесткость связей в направлении, нормальном к плоскости трещины. Изменение относительной жесткости связей выполнялось при вариации параметра  $H$  в (6), полагая, что  $E_b = E$ .

Зависимости нормированного термического КИН  $K_I/K_0$  от безразмерного времени  $Fo$  для трещины, заполненной связями ( $d/\ell = 1$ ), при различных значениях относительной жесткости связей  $\kappa$  приведены на рис. 7а в сопоставлении с расчетом при отсутствии связей между поверхностями трещины ( $\kappa = 0$ ). Результаты, полученные при постоянной относительной жесткости связей  $\kappa = 0.1$ , и вариации размера концевой области трещины  $\varepsilon = d/\ell$  в диапазоне  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  приведены на рис. 7б, где  $\varepsilon = 0$  соответствует трещине без связей.

В рассматриваемой задаче экстремум КИН достигается на начальном этапе процесса теплообмена. Заметное влияние изменения жесткости связей между поверхностями трещины на КИН имеется при  $0.1 < Fo < 0.5$ , причем наибольший эффект наблюдается на этапе достижения экстремума КИН. Возрастание суммарной жесткости связей  $d(E_b/H)$  между поверхностями трещины за счет уменьшения параметра  $H$  (рис. 7а) или при увеличении длины концевой области (рис. 7б) приводит к нелинейному снижению КИН. Для трещины, заполненной связями, при возрастании жесткости связей относительное изменение КИН снижается (рис. 7а), а при увеличении длины концевой области и неизменной жесткости связей относительное изменение КИН возрастает (рис. 7б). Граничные условия задач теплопроводности и термоупругости определяют, что при выходе на стационарный режим термический КИН стремится к нулю, независимо от жесткости связей и размера концевой области трещины.



**Рис. 7.** Зависимость КИН от времени нагрева, длина трещины  $\ell/D = 0.5$ : а) трещина, заполненная связями,  $d/\ell = 1$ ; б) частичное заполнение трещины связями,  $\varepsilon = d/\ell$ ,  $\kappa = 0.1$

### Заключение

В работе приведена методика численного решения задач нестационарной теплопроводности и несвязанной квазистатической термоупругости методом граничных интегральных уравнений. Предложен алгоритм расчета при использовании кусочно-постоянных и квадратичных граничных элементов при одинаковой дискретизации границы области в задачах теплопроводности и термоупругости. Исследовано влияние точности решения задачи нестационарной теплопроводности на результаты расчета КИН при тепловом нагружении. Показана эффективность применения ГИУ при расчете КИН от нестационарного теплового нагружения на модели трещины со связями в концевой области. Разработанный пакет программ может быть использован для решения научных и прикладных задач теплопроводности и термоупругости с трещинами при нестационарном тепловом нагружении.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Emery A. F., Neighbors P. K., Kobayashi A. S., Love W. J. Stress Intensity Factors in Edge-Cracked Plates Subjected to Transient Thermal Singularities. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 1977;99(1):100–5. DOI: 10.1115/1.3454491.
2. Hellen T. K., Cesari F., Maitan A. The Application of Fracture Mechanics in Thermally Stressed Structures. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1982;10(3):181–204. DOI: 10.1016/0308-0161(82)90032-1.

3. Emmel E., Stamm H. Calculation of Stress Intensity Factors of Thermally Loaded Cracks Using the Finite Element Method. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1985;19(1):1–17. DOI: 10.1016/0308-0161(85)90050-X.
4. Tanaka M., Togoh H., Kikuta M. Boundary Element Method Applied to 2-D Thermoelastic Problems in Steady and Non-Steady States. *Engineering Analysis*. 1984;1(1):13–9. DOI: 10.1016/0264-682X(84)90005-4.
5. Raveendra S. T., Banerjee P. K. Boundary Element Analysis of Cracks in Thermally Stressed Planar Structures. *International Journal of Solids and Structures*. 1992;29(18):2301–17. DOI: 10.1016/0020-7683(92)90217-H.
6. Prasad N. N. V., Aliabadi M. H., Rooke D. P. The Dual Boundary Element Method for Transient Thermoelastic Crack Problems. *International Journal of Solids and Structures*. 1996;33(19):2695–718. DOI: 10.1016/0020-7683(95)00183-2.
7. Keppas L. K., Anifantis N. K. Boundary Element Analysis of Cracked Homogeneous or Bi-Material Structures under Thermo-Mechanical Cycling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010;199(49):3345–55. DOI: 10.1016/j.cma.2010.07.006.
8. Ekhlakov A. V., Khay O. M., Zhang C., Sladek J., Sladek V. A BDEM for Transient Thermoelastic Crack Problems in Functionally Graded Materials under Thermal Shock. *Computational Materials Science*. 2012;57:30–7. DOI: 10.1016/j.commatsci.2011.06.019.
9. Chung Y. L., Lee K. L. Evaluation of Thermal Stress Intensity Factors of an Interface Crack in FGMs with Varying Thermal Expansion Coefficient by Multi-Region BEM. *Mechanics of Materials*. 2025;203:105266. DOI: 10.1016/j.mechmat.2025.105266.
10. Rizzo F. J., Shippy D. J. A Method of Solution for Certain Problems of Transient Heat Conduction. *AIAA Journal*. 1970;8(11):2004–9. DOI: 10.2514/3.6038.
11. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary Element Techniques — Theory and Applications in Engineering*. Berlin: Springer-Verlag; 1984.
12. Sládek V., Sládek J. Computation of Thermal Stresses in Quasistatic Non-Stationary Thermoelasticity Using Boundary Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1989; 28(5):1131–44. DOI: 10.1002/nme.1620280510.
13. Perelmuter M. Boundary Element Analysis of Structures with Bridged Interfacial Cracks. *Computational Mechanics*. 2013;51(4):523–34. DOI: 10.1007/s00466-012-0817-4.
14. Perelmuter M. Analysis of Interaction of Bridged Cracks and Weak Interfaces. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018;149:349–60. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.10.011.