АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПРОГИБА БАЛКИ

Д. А. Маслов
Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0009-0001-6427-2270, ✍ maslovdma@mpei.ru

Аннотация: в данной работе исследуется один класс слабо нелинейных краевых задач теории возмущений, который возникает при математическом моделировании прогиба балки, расположенной на нелинейно-упругом основании. Задача рассматривается как уравнение со значениями в банаховом пространстве, в котором линейный дифференциальный оператор возмущается полилинейным ограниченным оператором. Получены достаточные условия существования аналитического по малому параметру решения и соответствующая область значений малого параметра, предложен способ построения данного решения.

Ключевые слова: слабо нелинейная задача, аналитическое по малому параметру решение, банахово пространство, краевая задача.

Для цитирования: Маслов Д. А. Аналитические по малому параметру решения одного класса нелинейных краевых задач для уравнения прогиба балки. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):64–70.

Поступила в редакцию: 15.10.2025. *В окончательном варианте: 04.11.2025.*

ANALYTICAL SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR BEAM DEFLECTION WITH A SMALL PARAMETER

D. A. Maslov
National Research University Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0009-0001-6427-2270, ✍ maslovdma@mpei.ru

Abstract: we investigated a class of weakly nonlinear boundary value problems in perturbation theory that arise in the mathematical modeling of beam deflection on a nonlinear elastic foundation. We formulated the problem as an equation in a Banach space, where a linear differential operator is perturbed by a polylinear bounded operator. We obtained sufficient conditions for the existence of an analytical solution for a small parameter and identified the corresponding range of parameter values. We also proposed a method for constructing this solution.

Keywords: weakly nonlinear problem, small parameter solution, Banach space, boundary value problem.

Cite this article: Maslov D. A. Analytical Solutions for a Class of Nonlinear Boundary Value Problems for Beam Deflection with a Small Parameter. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):64–70.

Original article submitted: 15.10.2025. *Revision submitted: 04.11.2025.*

Введение

Увеличение требований к прочностным характеристикам конструкций при одновременном стремлении к уменьшению веса требует более полного исследования реального напряженно-деформированного состояния [1]. Для этого часто оказывается недостаточно классических линейных теорий и необходимо рассматривать теории более высоких приближений, учитывающих, в частности, геометрическую и физическую нелинейности [1, 2]. Линеаризация, широко применяемая при исследовании нелинейных задач, приводит не только к дополнительным неустранимым погрешностям, но, что более важно, к потере возможности исследовать нелинейные эффекты, присущие исследуемым процессам. Поэтому в настоящее время все более актуальными становятся исследование нелинейных математических моделей и, соответственно, развитие необходимых для этого математических методов. В уравнениях, описывающих динамику технических систем, часто возникают кубические нелинейности, учет которых существенно влияет на точность математических моделей, однако учет и исследование нелинейностей более высокого порядка, например, пятой степени, в некоторых случаях также показывает значимое влияние на точность математических моделей [3, 4].

Целые классы краевых задач, широко применяемых в математическом моделировании механических систем, могут быть записаны в виде дифференциальных уравнений со значениями в банаховом пространстве [5]. При использовании для слабо нелинейных задач метода малого параметра возникает вопрос сходимости построенных рядов по степеням малого параметра, поскольку сходимость в данном случае может быть не только асимптотической, но и обычной, что говорит об аналитичности построенного решения по малому параметру. Для уравнений со значениями в банаховом пространстве рассматриваются задачи возмущения линейного дифференциального оператора A в банаховом пространстве E некоторым оператором B:

$$Au = \varepsilon B + f,$$

где ε — малый параметр, $f \in E$. В случае, когда B — линейный оператор, проблема аналитичности решения по малому параметру была решена с помощью введения таких понятий, как голоморфные семейства операторов типа (A) и в смысле Като [6]. Слабо нелинейная задача с возмущением билинейным оператором была подробно исследована в работе [7].

В данной работе рассматривается частный случай слабо нелинейной задачи в банаховом пространстве с возмущением линейного дифференциального оператора полилинейным оператором. Рассматриваемому дифференциальному уравнению со значениями в банаховом пространстве соответствует класс слабо нелинейных краевых задач, возникающих при математическом моделировании прогиба балки, расположенной на нелинейно-упругом основании с произвольной степенью нелинейности.

Задача с возмущением линейного оператора полилинейным оператором

Рассмотрим уравнение в банаховом пространстве E:

$$Au = \varepsilon B(u, \dots, u) + f, \tag{1}$$

где A — линейный неограниченный оператор с областью определения D_A имеет непрерывный обратный оператор A^{-1}; $B : E \times \dots \times E \to E$ — полилинейный ограниченный оператор (m-линейный оператор); $\varepsilon > 0$ — малый параметр; функция $f \in E$.

Будем искать решение уравнения (1) в виде ряда по степеням малого параметра:

$$u = u_0 + u_1\varepsilon + \dots + u_n\varepsilon^n + \dots . \tag{2}$$

Используя правило Коши перемножения рядов, получим, в соответствии с методом неопределенных коэффициентов, серию уравнений для определения коэффициентов ряда (2):

$$\begin{aligned}
&Au_0 = f,\\
&Au_1 = B(u_0, \dots, u_0),\\
&Au_2 = \sum_{i=1}^{m} B(u_0, \dots, u_1, \dots, u_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Au_n = \sum_{i_1+\dots+i_m=n-1} B\left(u_{i_1}, \dots, u_{i_m}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{3}$$

где в выражении для Au_n суммирование ведется по всевозможным значениям индексов $i_1 = 0 \dots n-1$, $\dots$, $i_m = 0 \dots n-1$, таким, что $i_1 + \dots + i_m = n-1$, причем сумма состоит из C_{n+m-2}^{m-1} слагаемых.

Таким образом, могут быть найдены коэффициенты ряда (2):

$$\begin{aligned}
&u_0 = A^{-1}f,\\
&u_1 = A^{-1}B(u_0, \dots, u_0),\\
&u_2 = A^{-1}\sum_{i=1}^{m} B(u_0, \dots, u_1, \dots, u_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&u_n = A^{-1}\sum_{i_1+\dots+i_m=n-1} B\left(u_{i_1}, \dots, u_{i_m}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{4}$$

Формулы (4) в наиболее важном случае $m = 3$, соответствующем кубической нелинейности, принимают вид:

$$\begin{aligned}
&u_0 = A^{-1}f,\\
&u_1 = A^{-1}B(u_0,u_0,u_0),\\
&u_2 = A^{-1}\left(B(u_1,u_0,u_0) + B(u_0,u_1,u_0) + B(u_0,u_0,u_1)\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_n = A^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{k} B(u_{n-1-k},u_j,u_{k-j})\right)\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{5}$$

Ставится задача определить достаточные условия, при которых ряд (2) является сходящимся к решению задачи (1) и, таким образом, представляет аналитическое по малому параметру решение задачи (1).

Приведем сначала некоторые сведения о последовательности, которая будет далее использоваться для построения мажорирующего ряда в доказательстве теоремы.

Последовательность чисел $\{a_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty}$, заданная рекуррентно формулой:

$$a_0^{(m)} = 1, \quad a_n^{(m)} = \sum_{i_1+\ldots+i_m=n-1} a_{i_1}^{(m)}\cdot\ldots\cdot a_{i_m}^{(m)}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

называется последовательностью чисел Фусса–Каталана, которые могут быть заданы формулой [8]:

$$a_0^{(m)} = 1, \quad a_n^{(m)} = \frac{(mn)!}{n!((m-1)n+1)!}, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{6}$$

Последовательность из чисел Фусса–Каталана (6), соответствующая некоторому натуральному m, называется также m-последовательностью Рени [8] и имеет многочисленные применения в дискретной математике.

Имея формулы (6), радиус сходимости соответствующих последовательностям $\{a_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty}$ производящих функций $F^{(m)}(z)$ можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}
R^{(m)} &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n^{(m)}}{a_{n+1}^{(m)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(mn)!}{n!((m-1)n+1)!}\,\frac{(n+1)!((m-1)n+m)!}{(mn+m)!} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)((m-1)n+2)\cdot\ldots\cdot((m-1)n+m)}{(mn+1)\cdot\ldots\cdot(mn+m)} = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Приведем некоторые примеры интересующих нас последовательностей из онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (OEIS). При $m = 2$ числа Фусса–Каталана совпадают с обычными числами Каталана A000108 [9] и возникают в случае рассмотрения билинейного оператора. При $m = 3$ числа Фусса–Каталана образуют последовательность A001764 [10], которая возникает в случае рассмотрения 3-линейного оператора. Соответственно, в случае 4-линейного оператора, $m = 4$, возникнет последовательность A002293 [11], а в случае 5-линейного оператора, $m = 5$, — последовательность A002294 [12].

Теорема 1. *Пусть A является замкнутым неограниченным оператором и имеет непрерывный обратный оператор A^{-1}, полилинейный оператор $B(u_1,\ldots,u_m)$ является ограниченным. Тогда уравнение* (1) *имеет единственное аналитическое при* $\varepsilon < \varepsilon_0 = \dfrac{(m-1)^{m-1}}{m^m\|A^{-1}\|\|B\|\|u_0\|^{m-1}}$ *решение.*

Доказательство. Обозначим $\|A^{-1}\| = q$, $\|B\| = b$. Тогда из (4) получим оценки:

$$\begin{aligned}
&\|u_1\| \le \|A^{-1}\|\left(\|B(u_0,\ldots,u_0)\|\right) \le a_1^{(m)}qb\|u_0\|^m,\\
&\|u_2\| \le mqb\|u_0\|^{m-1}\|u_1\| \le a_2^{(m)}q^2b^2\|u_0\|^{2m-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\|u_n\| \le a_n^{(m)}q^nb^n\|u_0\|^{n(m-1)+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\{a_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность из чисел Фусса–Каталана (6), для которой, в соответствии с (7), производящая функция голоморфна в круге:

$$|z| < \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}.$$

Таким образом, в соответствии с оценками (8), ряд (2) мажорируется рядом:

$$\|u_0\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} r^n |\varepsilon|^n, \tag{9}$$

где $r = qb\|u_0\|^{m-1}$, который сходится при каждом фиксированном ε, таком, что $|\varepsilon| < (m-1)^{m-1}/(m^m r)$. Это и означает аналитичность суммы $u(\varepsilon)$ ряда (2) в круге радиуса $(m-1)^{m-1}/(m^m r)$.

Так как оператор A^{-1} существует, то $u_n \in D_A$ при всех $n = 0,1,2,\ldots$. Также из равенств (4) следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (Au_n)\varepsilon^n \tag{10}$$

сходится в указанном круге, поскольку мажорируется рядом типа ряда (9). Итак, ряд (2) сходится, ряд (10) также сходится, что ввиду замкнутости оператора A означает, что $u(\varepsilon) \in D_A$ и справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} (Au_n)\varepsilon^n = A \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n.$$

Следовательно, $u(\varepsilon)$ является решением уравнения (1), аналитическим при

$$\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m \|A^{-1}\| \|B\| \|u_0\|^{m-1}}.$$

Единственность такого решения вытекает из способа построения ряда (2).

Теорема доказана.

Математическое моделирование прогиба балки, расположенной на нелинейно-упругом основании

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения статической балки, расположенной на нелинейно-упругом основании [1]:

$$\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} + \alpha u - \varepsilon u^3 = f, \qquad x \in (0,1), \tag{11}$$

с краевыми условиями шарнирного опирания:

$$u(0) = \frac{\mathrm{d}^2 u(0)}{\mathrm{d}x^2} = u(1) = \frac{\mathrm{d}^2 u(1)}{\mathrm{d}x^2} = 0, \tag{12}$$

где функция $u(x)$ описывает нормализованный прогиб балки, $f(x)$ — функция распределенной нагрузки, $\alpha > 0$ — коэффициент, характеризующий линейную жесткость основания, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, характеризующий нелинейную жесткость основания (учитывая знак, представляет «размягченное основание» в терминологии Рейснера [1]).

Запишем задачу в банаховом пространстве непрерывных функций $C([0,1])$ в операторном виде, соответствующем (1):

$$Au = \varepsilon B(u,u,u) + f,$$

$A = \dfrac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4} + \alpha I$, где I — тождественный оператор,

$D_A = \{v(x) \in C^4([0,1]),\ v(0) = \dfrac{\mathrm{d}^2 v(0)}{\mathrm{d}x^2} = v(1) = \dfrac{\mathrm{d}^2 v(1)}{\mathrm{d}x^2} = 0\}$,

$B(u,v,w) = uvw$ — ограниченный 3-линейный оператор в $C([0,1])$, $\|B\| = 1$.

Оператор A является непрерывно обратимым при $\alpha > 0$, $\alpha \neq (\pi n)^4$, $n = 1,2,\ldots$, что следует из существования у него функции Грина [13], которую обозначим $G_\alpha(x,\xi)$. Тогда, согласно теореме 1, краевая задача (11), (12) имеет единственное аналитическое при $\varepsilon < \dfrac{4}{27\|A^{-1}\|\|u_0\|^2}$ решение, представимое в виде ряда (2) с коэффициентами (5), которые принимают вид:

$$
\begin{gathered}
u_0(x) = \int\limits_0^1 G_\alpha(x,\xi) f(\xi)\mathrm{d}\xi,\\
u_1(x) = \int\limits_0^1 G_\alpha(x,\xi) u_0^3(\xi)\mathrm{d}\xi,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_n(x) = \int\limits_0^1 G_\alpha(x,\xi) \sum_{k=0}^{n-1} u_{n-1-k}(\xi)\left(\sum_{j=0}^{k} u_j(\xi)u_{k-j}(\xi)\right)\mathrm{d}\xi,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где функцию Грина при $\alpha > 0$, $\alpha \neq (\pi n)^4$, $n = 1,2,\ldots$, и введенном параметре $\gamma = \sqrt[4]{\alpha/4}$ запишем следующим образом:

$$
G_\alpha(x,\xi) = \begin{cases} G_{1,\alpha}(x,\xi) = a_2(\xi)\varphi_2(x) + a_3(\xi)\varphi_3(x), & 0 \leq x < \xi,\\ G_{2,\alpha}(x,\xi) = b_1(\xi)\varphi_1(x) + b_2(\xi)\varphi_2(x) + b_3(\xi)\varphi_3(x) + b_4(\xi)\varphi_4(x), & \xi < x \leq 1, \end{cases}
$$

$$
\begin{gathered}
\varphi_1(x) = \cos(\gamma x)\mathrm{ch}(\gamma x), \quad \varphi_2(x) = \cos(\gamma x)\mathrm{sh}(\gamma x),\\
\varphi_3(x) = \sin(\gamma x)\mathrm{ch}(\gamma x), \quad \varphi_4(x) = \sin(\gamma x)\mathrm{sh}(\gamma x),\\
a_2(\xi) = \frac{1}{4\gamma^3}\left(\varphi_1(\xi) + \beta_1\varphi_2(\xi) + \beta_2\varphi_3(\xi) - \varphi_4(\xi)\right),\\
a_3(\xi) = \frac{1}{4\gamma^3}\left(-\varphi_1(\xi) + \beta_2\varphi_2(\xi) - \beta_1\varphi_3(\xi) - \varphi_4(\xi)\right),\\
b_1(\xi) = \frac{1}{4\gamma^3}\left(\varphi_2(\xi) - \varphi_3(\xi)\right), \quad b_2(\xi) = \frac{1}{4\gamma^3}\left(\beta_2\varphi_2(\xi) + \beta_1\varphi_3(\xi)\right),\\
b_3(\xi) = \frac{1}{4\gamma^3}\left(\beta_1\varphi_2(\xi) - \beta_2\varphi_3(\xi)\right), \quad b_4(\xi) = -\frac{1}{4\gamma^3}\left(\varphi_2(\xi) + \varphi_3(\xi)\right),\\
\beta_1 = \frac{\sin(2\gamma) + \mathrm{sh}(2\gamma)}{\cos(2\gamma) - \mathrm{ch}(2\gamma)}, \quad \beta_2 = \frac{\sin(2\gamma) - \mathrm{sh}(2\gamma)}{\cos(2\gamma) - \mathrm{ch}(2\gamma)}.
\end{gathered}
$$

Для расчета радиуса сходимости ряда (2) $\varepsilon_0 = \dfrac{4}{27\|A^{-1}\|\|u_0\|^2}$ оценим норму обратного оператора с помощью функции Грина:

$$
\|A^{-1}\| \leq \max_{x\in[0,1]} \int\limits_x^1 |G_{1,\alpha}(x,\xi)|\mathrm{d}\xi + \max_{x\in[0,1]} \int\limits_0^x |G_{2,\alpha}(x,\xi)|\mathrm{d}\xi \leq \frac{1}{4\gamma^3}(\mathrm{sh}\gamma + \mathrm{ch}\gamma)^2(2 + \beta_1 + \beta_2). \tag{14}
$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть балка длиной $L = 1$м и квадратного сечения со стороной $b = 0.05$м (соответственно, моментом инерции поперечного сечения $J = b^4/12$) сделана из стали с модулем упругости $E = 2\cdot 10^{11}$Па. Вводится безразмерная пространственная координата x, отнесенная к длине балки L. Прогиб нормализуем величиной $u_{max} = 5\cdot 10^{-3}$м.

Пусть линейный коэффициент жесткости основания $k_1 = 5\cdot 10^6$Н/м^3. Равномерная поперечная нагрузка $q(x) = 15\cdot 10^3$Н/м. Тогда в уравнении (11) безразмерный коэффициент $\alpha = \dfrac{k_1 L b}{EJ} = 2.4$ и безразмерная функция, характеризующая приложенную нагрузку, $f(x) = \dfrac{q(x)}{EJu_{max}} = 29$. Необходимый для вычислений коэффициент $\gamma = \sqrt[4]{\alpha/4} = \sqrt[4]{3/5}$.

В случае $f(x) = f = \text{const}$ начальное приближение u_0 определяется по формуле:

$$u_0 = \int_0^1 G_\alpha(x,\xi) f \, \mathrm{d}\xi = \frac{f}{\alpha}\left(1 - \frac{\cos(\gamma(1-x))\mathrm{ch}(\gamma x) + \mathrm{ch}(\gamma(1-x))\cos(\gamma x)}{\cos\gamma + \mathrm{ch}\gamma}\right). \tag{15}$$

Из (14), (15) следуют оценки норм $\|A^{-1}\| \leq 3$, $\|u_0\|_{C([0,1])} \leq 0.5$ и радиуса сходимости ряда (2) $\varepsilon_0 \geq 0.19$. Таким образом, $\varepsilon < \varepsilon_0$, а значит, по формулам (13) строится аналитическое решение задачи (11), (12).

Следует заметить, что в рассмотренном классе краевых задач для уравнений четвертого порядка трудоемким является не только построение функции Грина, но и вычисление интегралов в (13). Поэтому при математическом моделировании прогиба балки следует обратить внимание на использование численных методов. Непосредственное численное решение нелинейной краевой задачи (11), (12) связано со сложностями, присущими решению нелинейных задач. При этом численное решение линейных задач серии (12) с целью определения коэффициентов ряда (2) не представляет каких-либо сложностей и гарантирует высокую точность вычислений. Таким образом, численная реализация асимптотического метода решения нелинейной краевой задачи (11), (12) представляет хорошую альтернативу как точным вычислениям коэффициентов ряда по степеням малого параметра, так и чисто численному решению нелинейной краевой задачи.

Будем рассматривать конечно-разностную схему на сетке $\overline{\Omega} = \{x_i\}_{i=0}^m$, $x_i = i \cdot h$, $i = 1,\ldots,m$, где $h = 1/m$ — шаг сетки, m — число разбиений отрезка $[0,1]$. Дана сеточная функция $\{F_i\}_{i=0}^m$. Искомой является сеточная функция $\{U_i\}_{i=0}^m$. Разностная схема

$$\begin{gathered} U_0 = 0, \quad (5 + \alpha h^4)U_1 - 4U_2 + U_3 = h^4 F_1, \\ U_{i-2} - 4U_{i-1} + (6 + \alpha h^4)U_i - 4U_{i+1} + U_{i+2} = h^4 F_i, \quad i = 2,\ldots,m-2, \\ (5 + \alpha h^4)U_{m-1} - 4U_{m-2} + U_{m-3} = h^4 F_{m-1}, \quad U_m = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

решается методом сопряженных градиентов с достаточно высокой для сравнения полученных результатов точностью. Функции сравниваем по норме $\|U - u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max\limits_{0 \leq i \leq m} |U_i - u(x_i)|$.

Построим тестовый пример. Пусть $\alpha = 2.4$, $\varepsilon = 0.05$, $m = 1000$. Задаем искомую функцию $u(x) = \sin(\pi x)$. Тогда $f(x) = (\pi^4 + 2.4)\sin(\pi x) - 0.05\sin^3(\pi x)$. В (16) возьмем $F_i = f(x_i)$, $i = 1,\ldots,m$, и получаем сеточную функцию $U^{(0)}$, $\|U^{(0)} - u\|_{C(\overline{\Omega})} = 7.5 \cdot 10^{-4}$. Далее возьмем $F_i = (U_i^{(0)})^3$, $i = 1,\ldots,m$, и получим из (16) сеточную функцию $U^{(1)}$, $\|U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)} - u\|_{C(\overline{\Omega})} = 9 \cdot 10^{-8}$.

Заключение

Исследован один класс нелинейных краевых задач, возникающих при математическом моделировании прогиба балки, расположенной на нелинейно-упругом основании. Задача рассматривалась как уравнение со значениями в банаховом пространстве, в котором линейный дифференциальный оператор возмущается полилинейным ограниченным оператором. Получены достаточные условия существования аналитического по малому параметру решения и соответствующая область значений малого параметра, предложен способ построения данного решения. Показано применение предложенного метода как с использованием функции Грина для вывода точных формул, так и с помощью численной реализации, проведены вычислительные эксперименты, показывающие высокую точность построенных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерофеев В. И., Леонтьева А. В. Дисперсия и пространственная локализация изгибных волн, распространяющихся в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании. *Известия РАН. Механика твердого тела.* 2021;4:3—17. DOI: 10.31857/S0572329921030041.
2. Ерофеев В. И., Кажаев В. В., Семерикова Н. П. *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность.* М.: ФИЗМАТЛИТ; 2002. 208 с.
3. Maslov D. A., Merkuryev I. V. Increase in the Accuracy of the Parameters Identification for a Vibrating Ring Microgyroscope Operating in the Forced Oscillation Mode with Nonlinearity Taken into Account. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2018;14(3):377—386. DOI: 10.20537/nd180308.

4. Седихи Х. М., Ширази К. Х. Исследование поперечных колебаний балки на упругом основании на основе нелинейной теории пятого порядка с использованием точного выражения для кривизны балки. *Прикл. мех. техн. физ.* 2014;55(6):186–194. DOI: 10.1134/S0021894414060194.
5. Крейн С. Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* М.: Наука; 1967. 464 с.
6. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир; 1972. 740 с.
7. Качалов В. И., Маслов Д. А. Об аналитических решениях задач нелинейной теории возмущений. *Сиб. электрон. матем. изв.* 2025;22(1):457–464. DOI: 10.33048/semi.2025.22.030.
8. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* М.: Мир; 1998. 703 с.
9. A000108: *онлайн энциклопедия целочисленных последовательностей.* Режим доступа: https//oeis.org/A000108.
10. A001764: *онлайн энциклопедия целочисленных последовательностей.* Режим доступа: https//oeis.org/A001764.
11. A002293: *онлайн энциклопедия целочисленных последовательностей.* Режим доступа: https//oeis.org/A002293.
12. A002294: *онлайн энциклопедия целочисленных последовательностей.* Режим доступа: https//oeis.org/A002294.
13. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука; 1969. 528 с.