

ВЫРОЖДЕНИЕ СОСТОЯНИЙ ОДНОМЕРНОЙ СПИНОВОЙ ЦЕПОЧКИ

Б. В. Крыжановский^a, В. И. Егоров^b

Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского
центра «Курчатовский институт», Москва, Российская Федерация

^a ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0901-6370>, kryzhanov@mail.ru

^b ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9441-3695>, rvladegorov@rambler.ru

Аннотация: одномерная спиновая модель является одной из наиболее детально исследованных точно решаемых моделей. В частности, известны выражения для плотности состояний $D(E)$, где $D(E)$ — число состояний с энергией E . В настоящей работе получены выражения для обобщенной плотности состояний $D(E, m)$, т.е. для числа состояний с энергией E и намагниченностью m . Знание величины $D(E, m)$ позволяет не только вычислять термодинамику системы, но и исследовать поведение спонтанной намагниченности m во времени. Выражения получены для цепочки со свободными и периодическими граничными условиями.

Ключевые слова: одномерная модель Изинга, плотность состояний, спонтанная намагниченность, распределение намагниченности.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ № FNEF-2024-0001.

Для цитирования: Крыжановский Б. В., Егоров В. И. Вырождение состояний одномерной спиновой цепочки. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):55–63.

Поступила в редакцию: 13.10.2025.

В окончательном варианте: 19.11.2025.

DEGENERACY OF STATES IN A ONE-DIMENSIONAL SPIN CHAIN

B. V. Kryzhanovsky^a, V. I. Egorov^b

Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”,
Moscow, Russian Federation

^a ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0901-6370>, kryzhanov@mail.ru

^b ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9441-3695>, rvladegorov@rambler.ru

Abstract: we studied a one-dimensional spin model, one of the most detailed and thoroughly investigated exactly solvable models. Expressions for the density of states $D(E)$, representing the number of states with a given energy E , are well known. In this work, we derived expressions for the generalized density of states $D(E, m)$, which represent the number of states with a given energy E and magnetization m . Knowing $D(E, m)$ allows us not only to calculate the system’s thermodynamic properties but also to analyze the time evolution of spontaneous magnetization m . The expressions were derived for chains with both free and periodic boundary conditions.

Keywords: one-dimensional Ising model, the density of states, spontaneous magnetization, magnetization distribution.

Acknowledgements: this is a part of the FNEF-2024-0001 government contract granted to the NRC “Kurchatov Institute” – SRISA.

Cite this article: Kryzhanovsky B. V., Egorov V. I. Degeneracy of States in a One-Dimensional Spin Chain. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):55–63.

Original article submitted: 13.10.2025.

Revision submitted: 19.11.2025.

Введение

Впервые поведение одномерной системы спинов было исследовано в 1925 году Изингом [1]. Детальное описание такой системы приведено в монографии [2] как введение в технику трансфер-матриц. Предложенная Изингом модель представляет собой интерес как точно решаемая задача. Было показано, что одномерная модель не имеет фазового перехода при ненулевой температуре. Тем не менее в такой модели могут быть введены критические показатели, выполняются гипотеза подобия и связанные с ней соотношения [2]. Подход, основанный на технике трансфер-матриц, позволил описать все термодинамические свойства одномерной модели. В частности, утверждается, что спонтанная

намагниченность такой модели при ненулевой температуре строго равна нулю. Однако в данном утверждении речь идет о термодинамическом среднем величине намагниченности $\langle\langle m \rangle\rangle = 0$, полученном усреднением по ансамблю. Квантово-механический подход [4–6] не меняет эти результаты. Но стоит отметить, что при добавлении дальнедействующих взаимодействий в одномерных моделях возможно существование фазовых переходов при отличной от нуля температуре [7, 8].

Знание обобщенной плотности состояний $D(E, m)$ позволяет проследить за распределением намагниченностей системы и показать, что отличная от нуля спонтанная намагниченность появляется при конечном, отличном от нуля, значении температуры. Однако величина спонтанной намагниченности зависит от времени $m = m(t)$. Обусловлено это следующим: энергетический барьер между двумя основными состояниями системы настолько мал, что система достаточно легко переходит из области вблизи одного основного состояния с намагниченностью $m \sim N$ в область вблизи другого основного состояния с намагниченностью $m \sim -N$, где N — число спинов. В итоге получаем, что среднее по времени значение спонтанной намагниченности $\langle m(t) \rangle$ также равно нулю, в полном согласии с эргодической теоремой $\langle m(t) \rangle = \langle\langle m \rangle\rangle = 0$.

Рассмотрим модель Изинга, состоящую из N спинов, в которой имеется взаимодействие только с ближайшими соседями. Энергия такой системы описывается выражением:

$$E_H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} - J_{1N} s_1 s_N - H m, \quad m = \sum_{i=1}^N s_i. \quad (1)$$

В этом выражении мы выделили член $J_{1N} s_1 s_N$, чтобы иметь возможность рассматривать модели с периодическими ($J_{1N} = J$) и свободными ($J_{1N} = 0$) граничными условиями. Ниже мы получим выражения для обобщенной плотности состояний $D(E, m)$ для обоих типов моделей $J_{1N} = J$ и $J_{1N} = 0$. Отметим лишь, что для случая $J_{1N} = J$ выражение для плотности состояний $D(E) = \sum_m D(E, m)$ хорошо известно [3]. Кроме того, недавно для модели с периодическими граничными условиями ($J_{1N} = J$) в работах [9, 10] получено и выражение для обобщенной плотности состояний $D(E, m)$. Результат в [9, 10] получен численным анализом моделей малых размеров ($N = 4, 5, 6$), а наши результаты получены аналитическим путем на основе простой комбинаторики.

Свободные граничные условия ($J_{1N} = 0$)

Рассмотрим сначала спиновую цепочку со свободными границами ($J_{1N} = 0$) в отсутствие магнитного поля ($H = 0$). Для простоты выражений примем $J = 1$. Энергия такой системы описывается выражением:

$$E = - \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}. \quad (2)$$

Нетрудно заметить, что такая модель имеет два основных состояния с энергией $E = E_0$, где

$$E_0 = -N + 1. \quad (3)$$

Одно из основных состояний соответствует конфигурации с намагниченностью $m = N$ (все спины направлены вверх: $s_i = 1, i = 1, 2, \dots, N$), а другое — с намагниченностью $m = -N$ (все спины направлены вниз: $s_i = -1, i = 1, 2, \dots, N$).

Опишем процедуру вычислений. Пусть система находится в одном из основных состояний, например, все спины направлены вверх. Мысленно сделаем разрез в каком-либо месте цепочки и развернем одну из частей цепочки спинами «вниз». При этом мы перейдем в состояние с энергией $E = E_0 + 2$ (энергия системы увеличится на 2, поскольку изменит знак только взаимодействие спинов в месте разреза). Если повторить эту процедуру k раз, то получим конфигурацию с энергией:

$$E = E_0 + 2k, \quad k = 0, 1, \dots, (N - 1). \quad (4)$$

Поскольку между N спинами есть $(N - 1)$ связей, в которые можно вставить k разрезов, то число состояний с энергией $E = E_0 + 2k$ опишется числом сочетаний из $N - 1$ по k , т.е. выражением:

$$D(E) = 2C_{N-1}^k. \quad (5)$$

Двойка в этом выражении образовалась, поскольку в описанной процедуре разрезов и переворотов можно переворачивать либо «правую» часть цепочки, либо «левую». Здесь и далее мы будем использовать более привычные нам обозначения для числа сочетаний:

$$C_A^b \equiv \binom{A}{b}.$$

Перейдем теперь к вычислению обобщенной плотности состояний $D(E, m)$. В начале этого раздела мы отмечали, что система имеет два основных состояния с энергией $E_0 = -N + 1$, то есть:

$$D(E_0, m) = \begin{cases} 1, & |m| = N \\ 0, & |m| \neq N \end{cases}. \quad (6)$$

Перейдем к определению обобщенной плотности состояний с более высокими энергиями $E > E_0$ ($k \geq 1$). Проводя операции k разрезов и переворотов, получаем состояния с энергией $E = E_0 + 2k$, число которых $D(E)$ определяется выражением (5). Среди этих состояний имеется некоторое число конфигураций $D(E, m)$, в которых n спинов направлены вниз и $N - n$ спинов направлены вверх, т.е. с числом состояний с намагниченностью $m = N - 2n$. Получаемое в этом случае выражение для $D(E, m)$ зависит от четности числа разрезов k . Для единообразия получаемых ниже выражений введем здесь обозначение:

$$r = \text{Int} \left(\frac{k+1}{2} \right). \quad (7)$$

а) Нечетное k . При нечетном числе разрезов и переворотов образуется четное число ($2r = k+1$) доменов: r доменов из спинов, направленных вниз, и r доменов из спинов, направленных вверх. Пусть в направленных вниз доменах содержится n спинов, а в направленных вверх доменах содержится $N - n$ спинов. Между n спинами имеется $n - 1$ промежутков, в которые разным числом способов можно вставить $r - 1$ разрезов: число возможных вариантов равно числу сочетаний из $n - 1$ по $r - 1$. Аналогично рассчитывается и число вариантов для $N - n$ спинов, направленных вниз. Как итог, число состояний с энергией $E = E_0 + 2k$ и намагниченностью $m = N - 2n$ описывается выражением:

$$D(E, m) = 2C_{n-1}^{r-1} C_{N-n-1}^{r-1}, \quad (8)$$

где $r = \text{Int} [(k+1)/2] = (k+1)/2$, $k = (E + N - 1)/2$, $n = (N - m)/2$.

б) Четное k . В этом случае в результате процедуры k разрезов и переворотов образуется $k+1$ домен. Число доменов нечетно ($k+1 = 2r+1$), поэтому возможны два варианта: либо имеем r доменов из n спинов, направленных вниз, и $r+1$ домен из $N - n$ спинов, направленных вверх, либо наоборот. Проводя рассуждения, аналогичные случаю нечетного k , для плотности состояний в этом случае получим:

$$D(E, m) = C_{n-1}^r C_{N-n-1}^{r-1} + C_{n-1}^{r-1} C_{N-n-1}^r, \quad (9)$$

где $r = \text{Int} [(k+1)/2] = k/2$, $k = (E + N - 1)/2$, $n = (N - m)/2$.

в) Сделаем несколько общих замечаний.

Во-первых, следует отметить, что величина $D(E) = \sum_m D(E, m)$ в точности совпадает с выражением (5). В этом нетрудно убедиться, проводя в (8) или (9) суммирование по n .

Во-вторых, состояния с энергией $E = E_0 + 2$, ближайшей к энергии основных состояний $E = E_0$, многократно вырождены и плотность состояний отлична от нуля для всех состояний с намагниченностью $N - 1 \geq m \geq -(N - 1)$:

$$D(E = E_0 + 2, m) = \begin{cases} 2, & |m| \neq N \\ 0, & |m| = N \end{cases}. \quad (10)$$

В-третьих, из (8)–(9) следует, что отличная от нуля плотность состояний имеется только для состояний, в которых число перевернутых спинов связано с энергией соотношением $r \leq n \leq N - r$, что адекватно соотношению $(N - 2r) \geq m \geq -(N - 2r)$ или $|m| \leq (N - 2r)$. Соответственно, для обобщенной плотности состояний получим:

$$D(E, m) \neq 0 \text{ при } |m| \leq N - 2 \text{Int} \left(\frac{E + N + 1}{4} \right). \quad (11)$$

В-четвертых, максимальное значение энергии системы $E_{\max} = N - 1$ дважды вырождено:

$$D(E_{\max}, m) = \begin{cases} 2, & m = 0, & \text{четное } N \\ 1, & |m| = 1, & \text{нечетное } N \end{cases} \quad (12)$$

Как видим, распределение $D(E, m)$ на плоскости (E, m) представляет собой сужающуюся с ростом E усеченную пирамиду, основание которой имеет ширину $2N$, а вершина — ширину 1 или 2 в зависимости от четности длины цепочки N .

Наиболее существенный результат следует из (10): высота энергетического барьера между двумя основными состояниями мала (равна 2); имеется цепочка из $2(N - 1)$ дважды вырожденных состояний с энергией $E = E_0 + 2$, по которой при отличной от нуля температуре система достаточно легко может мигрировать из одного основного состояния в другое.

Периодические граничные условия ($J_{1N} = 1$)

Рассмотрим спиновую цепочку с периодическими границами ($J_{1N} = J = 1$) в отсутствие магнитного поля ($H = 0$). Энергия такой системы описывается выражением:

$$E = -s_1 s_N - \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}. \quad (13)$$

Сначала выпишем очевидные выражения. Основное состояние дважды вырождено. Конфигурации, доставляющие основное состояние, имеют намагниченность $m = N$ и $m = -N$, а энергия основного состояния $E = E_0$ имеет вид:

$$E_0 = -N. \quad (14)$$

Соответственно, имеем:

$$D(E_0, m) = \begin{cases} 1, & |m| = N \\ 0, & |m| \neq N \end{cases} \quad (15)$$

Рассмотрим обобщенную плотность состояний с более высокими энергиями $E > E_0$. Нетрудно заметить, что для перехода из основного состояния в состояние с энергией $E > E_0$ следует сделать $2k$ разрезов и k переворотов образующихся доменов. В результате таких процедур мы перейдем в состояния с энергией:

$$E = E_0 + 4k, \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max}, \quad k_{\max} = \text{Int}(N/2). \quad (16)$$

Число состояний с энергией $E = E_0 + 4k$ и намагниченностью m имеет вид:

$$D(E, m) = \frac{N}{k} C_{n-1}^{k-1} C_{N-n-1}^{k-1}, \quad k = (E + N)/4, \quad n = (N - m)/2. \quad (17)$$

Получение выражения (17) можно аргументировать следующим образом. Сделаем первый из $2k$ разрезов между первым и вторым спинами. Тогда задача сведется к задаче о цепочке со свободными граничными условиями с $2k - 1$ разрезами, описываемой выражением (8). Казалось бы, первый разрез можно сделать между любыми спинами, т.е. N вариантов. Однако нетрудно заметить, что при сдвиге первого разреза на $(N/2k) + 1$ позиций картина повторяется, т.е. имеется $N/2k$ неповторяющихся комбинаций. Таким образом, делая в (8) замену $r \rightarrow k$ и домножая на $N/2k$, получим выражение (17).

Проводя (17) суммирование по n (т.е. суммирование по m), получим ожидаемый результат:

$$D(E) = 2C_N^{2k}. \quad (18)$$

Как мы уже отмечали, этот результат получен ранее в [9, 10] численным анализом моделей малых размеров ($N \leq 7$) и обобщением на модели произвольных размеров.

Сделаем несколько общих замечаний по результатам этого раздела.

Во-первых, для состояний с энергией $E = E_0 + 4$, ближайшей к энергии основных состояний, из (17) следует:

$$D(E = E_0 + 4, m) = \begin{cases} N, & |m| \leq N - 2 \\ 0, & |m| > N - 2 \end{cases} \quad (19)$$

Это означает, что имеется $(N - 1)$ состояний с такой энергией, но с различными намагниченностями ($|m| \neq N - 1$), каждое из которых N -кратно вырождено.

Во-вторых, величина и вырождение максимального значения энергии системы E_{\max} зависят от четности N и достигаются при разных m :

$$E_{\max} = \begin{cases} N, & \text{четное } N \\ N - 2, & \text{нечетное } N \end{cases}, \quad D(E_{\max}, m) = \begin{cases} 2, & m = 0, \text{ четное } N \\ N, & |m| = 1, \text{ нечетное } N \end{cases}. \quad (20)$$

Как видим, в случае нечетного N имеются два состояния с $E = E_{\max}$, достигаемые при $m = \pm 1$, каждое из которых N -кратно вырождено.

В-третьих, из (17) следует, что отличная от нуля плотность состояний имеется только для состояний, в которых число перевернутых спинов связано с энергией соотношением $k \leq n \leq N - k$, что адекватно соотношению $|m| \leq N - 2k$. Соответственно, для плотности состояний получим:

$$D(E, m) \neq 0 \text{ при } |m| \leq \frac{N + E}{2}. \quad (21)$$

Как видим, распределение $D(E, m)$ на плоскости (E, m) представляет собой сужающуюся с ростом E усеченную пирамиду, основание которой имеет ширину $2N$, а ширина вершины равна 1 или 2 в зависимости от четности длины цепочки N .

Наиболее существенный результат следует из (19): 1) высота энергетического барьера между двумя основными состояниями мала (равна 4); 2) имеется цепочка из $N - 1$ состояний с энергией $E = E_0 + 4$, каждое из которых N -кратно вырождено; 3) по этой цепочке состояний при отличной от нуля температуре система достаточно легко может мигрировать из одного основного состояния в другое.

Распределение намагниченности

Рассмотрим зависимость распределении намагниченности системы от температуры.

Прежде всего, отметим, что знание обобщенной плотности состояний $D(E, m)$, выражения для которой получены в предыдущих разделах для случая $H = 0$, вполне достаточно для описания поведения системы при наличии магнитного поля ($H \neq 0$). Действительно, энергия системы при наличии внешнего поля описывается выражением (1): $E_H = E - mH$, где E — энергия взаимодействия спинов между собой, описываемая выражениями (2) или (12). Очевидно, что число состояний с энергией E_H и намагниченностью m — это число с энергией E и намагниченностью m , т.е. величины $D(E, m)$.

Вероятность того, что система находится в состоянии с намагниченностью m , дается выражением:

$$P(m) = \frac{1}{Z} \sum_E D(E, m) e^{-\beta E + \beta m H}, \quad (22)$$

где β — обратная температура, а Z — нормировочная константа (статсумма):

$$Z = \sum_m \sum_E D(E, m) e^{-\beta E + \beta m H}. \quad (23)$$

Дальнейший анализ проведем на примере одномерной модели с периодическими граничными условиями ($J_{1N} = 1$). В этом случае, проводя в (23) суммирование по E и m , получим хорошо известное выражение [1–3]:

$$Z = \lambda_1^N + \lambda_2^N, \quad \lambda_{1,2} = e^\beta \cosh \beta H \pm \left(e^{2\beta} \sinh^2 \beta H + e^{-2\beta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (24)$$

которое в случае $H = 0$ примет вид:

$$Z = \left(e^\beta + e^{-\beta} \right)^N + \left(e^\beta - e^{-\beta} \right)^N. \quad (25)$$

Исследуем модовый состав распределения $P(m)$. Для этого проведем графический анализ распределения $P(m)$ в случае $H = 0$. На рисунках 1 показано, как изменяется вид кривой $P(m)$ при

изменении обратной температуры. Как видим (см. рис. 1а), при изменении обратной температуры в пределах $0 \leq \beta \leq \beta_0$ (величина β_0 будет определена ниже) распределение $P(m)$ одномодово с центром в точке $m = 0$. При $\beta > \beta_0$ (см. рис. 1б) распределение $P(m)$ становится трехмодовым: помимо центрального пика в точке $m = 0$, появляются пики равной высоты на краях распределения в точках $m = \pm N$: при $\beta = \beta_1$ эти пики сравниваются по высоте с центральным пиком, а при дальнейшем увеличении β (см. рис. 1с) становятся подавляющими: пик в центре по-прежнему имеется, однако его высота стремится к нулю.

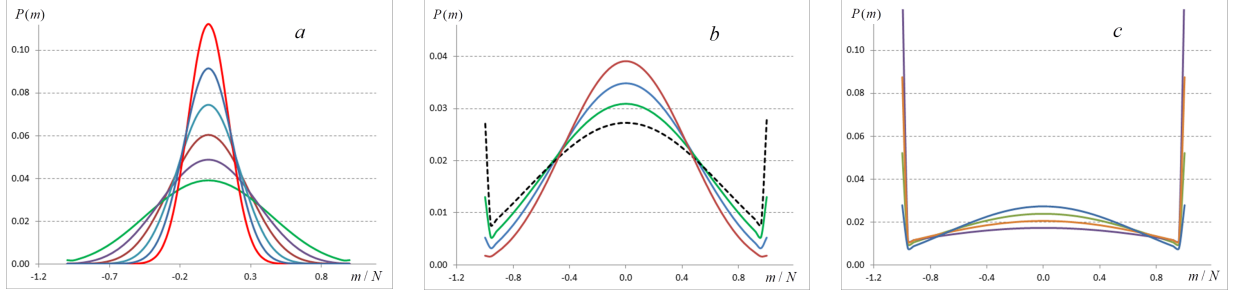


Рис. 1. Зависимость вида распределения $P(m)$ от температуры: а) одномодовое распределение при $0 \leq \beta \leq \beta_0$; б) распределение при $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$, пунктиром выделена кривая, соответствующая $\beta = \beta_1$; в) отрезок температур $\beta \geq \beta_1$

Определим введенные выше величины β_0 и β_1 . Величина β_0 задается из условия появления пика на краях распределения $P(m)$ в точках $m = \pm N$. Нетрудно заметить, что появление пика в точках $m = \pm N$ соответствует условию $P(|m| = N) \geq P(|m| = N - 1)$, т.е. условию $(e^{-\beta E_0}/Z) \geq (e^{-\beta E_0}/Z) \cdot Ne^{-4\beta}$. Из условия равенства получаем:

$$\beta_0 = \frac{1}{4} \text{Ln } N. \quad (26)$$

Величина β_1 определяется из условия $P(m = 0) = P(|m| = N)$. Оценим величину $P(m = 0)$ в случае $N \gg 1$. Для этого подставим в (22) соответствующие выражения для $D(E, m)$ и заменим суммирование по k (суммирование по $E = E_0 + 4k$) интегрированием методом перевала. Тогда рассматриваемое условие после всех сокращений примет вид:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\beta} (1 + e^{-2\beta})^N = 1. \quad (27)$$

Отсюда вытекает оценочное выражение:

$$\beta_1 \simeq \frac{1}{2} \text{Ln } N - \frac{1}{2} \text{Ln Ln } N. \quad (28)$$

Как следует из проведенного выше анализа, при $\beta > \beta_0$ распределение $P(m)$ становится трехмодовым, а при $\beta > \beta_1$ моды в точках $m = \pm N$ становятся подавляющими. Казалось бы, что система, находясь в термодинамическом равновесии, при $\beta > \beta_1$ должна сваливаться в состояния с $|m| \neq 0$, т.е. должна появляться спонтанная намагниченность. Такое, действительно, имеет место, однако имеются особенности, которые мы рассмотрим ниже.

Зависимость намагниченности от времени наблюдения

Как мы уже отмечали, величина $P(m)$ — это вероятность того, что находящаяся в термодинамическом равновесии система находится в состоянии с намагниченностью m . С физической точки зрения сказанное означает, что при достаточно большом времени наблюдения τ система в течение времени $\tau P(m)$ будет демонстрировать наличие спонтанной намагниченности, равной m .

Очевидно, что при $\beta \leq \beta_0$, когда распределение $P(m)$ одномодово, спонтанная намагниченность отсутствует (см. рис. 2). Она может наблюдаться только при $\beta > \beta_0$, когда распределение $P(m)$ становится многомодовым. В частности, при достаточно сильном понижении температуры можно наблюдать спонтанную намагниченность $|m| \rightarrow 1$ (рис. 2а). Такая картина наблюдается при относительно

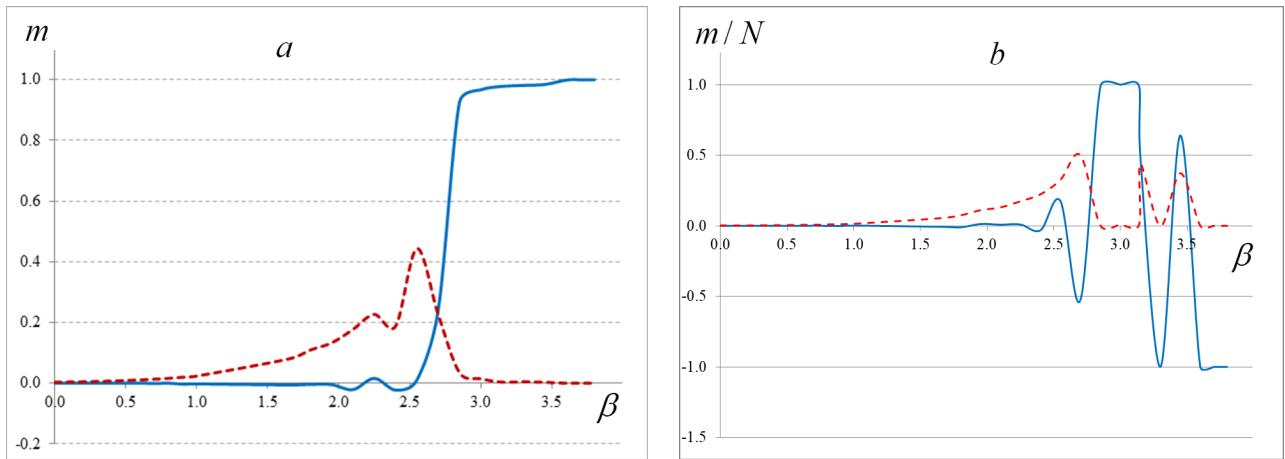


Рис. 2. Сплошная кривая соответствует зависимости $m = m(\beta)$, пунктирная кривая — дисперсия намагниченности: а) 10^5 переворотов на один спин; б) $4 \cdot 10^5$ переворотов на один спин

малых временах наблюдения τ , когда система не успевает побывать во всех состояниях: при достаточно больших временах τ можно наблюдать процесс реполяризации системы, когда намагниченность самопроизвольно меняет знак (рис. 2б). Чтобы судить о скорости этих процессов, следует сравнить время нахождения системы в одном из основных состояний, т.е. величину $P_0 = \tau P$ ($|m| = N$), со временем нахождения системы во всех остальных состояниях, равным $\tau(1 - 2P_0)$. Для простоты примем $\tau = 1$ и в дальнейшем будем опускать этот множитель в выражениях.

Для начала определим температуру β_2 , при которой система половину времени проводит в одном из основных состояний, а половину времени — во всех остальных состояниях. Поскольку $P_0 = e^{-\beta E_0}/Z$, где Z определено в (25), то равенство $2P_0 = 1 - 2P_0$ примет вид:

$$\frac{4}{(1 + e^{-2\beta})^N + (1 - e^{-2\beta})^N} = 1. \quad (29)$$

Удовлетворяющая этому равенству величина $\beta = \beta_2$ в случае $N \gg 1$ имеет вид:

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{N}{\alpha}, \quad (30)$$

где

$$\alpha = \text{Ln} (2 + \sqrt{3}). \quad (31)$$

Действительно, подставляя $\beta = \beta_2$ в (29), получим легко разрешаемое относительно α уравнение:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{N}\right)^N + \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)^N \simeq e^\alpha + e^{-\alpha} = 4.$$

Отметим, что полное число состояний при $\beta = \beta_2$ достаточно велико. Тем не менее половину времени система проводит в двух основных состояниях ($|m| = N$), а оставшаяся половина времени приходится на блуждание среди множества всех остальных состояний с намагниченностями $|m| \neq N$. Отметим также, что из сравнения (30) с (28) вытекает $\beta_2 > \beta_1 > \beta_0$.

Теперь рассмотрим, как изменится время перемагничивания ($\bar{P} = 1 - 2P_0$) при $\beta > \beta_2$. Введем здесь безразмерную величину t , характеризующую отклонение от β_2 :

$$t = \frac{\beta - \beta_2}{\beta_2}. \quad (32)$$

Тогда получим, что время перемагничивания при температурах $t > 0.5$ экспоненциально быстро затухает:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \alpha^2 \exp(-4\beta_2 t). \quad (33)$$

Для проверки полученных выражений мы провели ряд численных экспериментов. Для получения графиков рис. 2 запускался алгоритм Метрополиса, в котором для каждого значения температуры в

термодинамическом равновесии вычислялось среднее значение и дисперсия намагниченности. На рис. 2а показаны измеряемые величины при малом времени наблюдения: 10^5 переворотов на один спин. Как видим, при $\beta > \beta_0$ система демонстрирует наличие спонтанной намагниченности, поскольку из-за относительной малости времени наблюдения не успевает перемагнититься. На рис. 2б показаны измеряемые величины при большом времени наблюдения: $4 \cdot 10^5$ переворотов на один спин. Как видим, при таком времени наблюдения наблюдается перемагничивание системы.

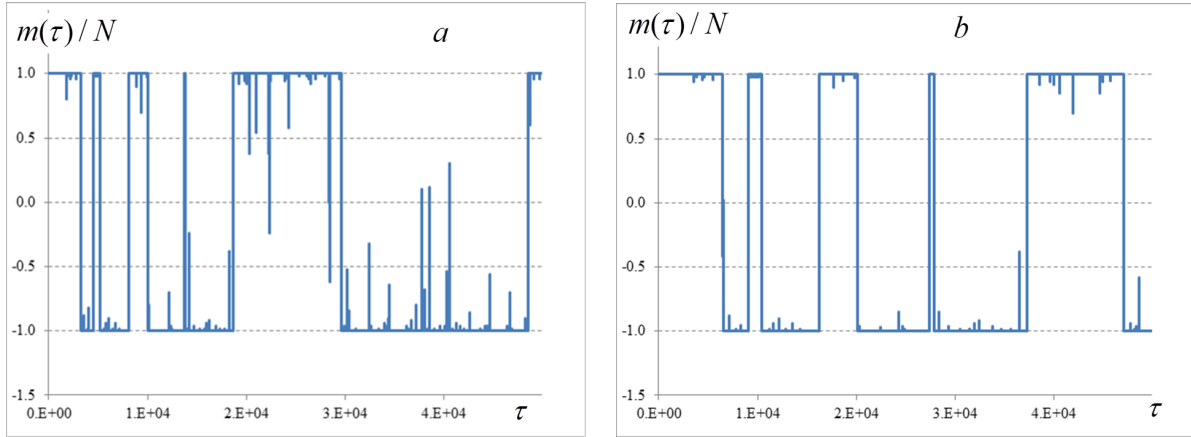


Рис. 3. Зависимость намагниченности от времени $m = m(\tau)$ при $\beta = 1.5\beta_2$ (а) и $\beta = 2\beta_2$ (б)

Чтобы понять происходящее, мы в алгоритме Метрополиса при заданной температуре измеряли текущее значение намагниченности $m = m(\tau)$ в каждый момент времени τ : за единицу времени принималось $2 \cdot 10^3$ переворотов спинов. На рисунках 3а и 3б показана зависимость от времени $m = m(\tau)$ при $\beta = 1.5\beta_2$ и $\beta = 2\beta_2$ соответственно. Как видим, в соответствии с (33), с ростом β относительное время перемагничивания резко уменьшается и кривая $m = m(\tau)$ все больше вырождается в меандр.

Обсуждение результатов

Полученные выше выражения для обобщенной плотности состояний $D(E, m)$ имеют, скорее всего, справочный характер, поскольку выражения для статсуммы одномерной модели хорошо известны. Соответственно, известны практически все термодинамические характеристики одномерной системы. Однако, знание обобщенной плотности состояний $D(E, m)$ позволяет проследить за распределением намагниченностей системы и показать, что отличная от нуля спонтанная намагниченность появляется при конечном, отличном от нуля, значении температуры.

Утверждение о наличии спонтанной намагниченности не противоречит классическому результату $\langle\langle m \rangle\rangle = 0$, где двойные скобки означают усреднение по ансамблю [1–3]. Действительно, выше было показано, что величина спонтанной намагниченности зависит от времени $m = m(\tau)$. Обусловлено это следующим: энергетический барьер между двумя основными состояниями системы настолько мал, что система достаточно легко переходит из области вблизи одного основного состояния с намагниченностью $m \sim N$ в область вблизи другого основного состояния с намагниченностью $m \sim -N$ и обратно. В итоге получаем, что при большом времени наблюдения среднее по времени значение спонтанной намагниченности $\langle m(\tau) \rangle$ также равно нулю, в полном согласии с эргодической теоремой $\langle m(t) \rangle = \langle\langle m \rangle\rangle = 0$. Отметим только, что переходы между состояниями $m \sim N$ и $m \sim -N$ носят случайный характер и, соответственно, приведенная на рис. 3 картина меняется от эксперимента к эксперименту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ising E. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Z. Physik.* 1925;31:253–258. DOI: 10.1007/BF02980577.
2. Baxter R. J. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. New York: Academic Press; 1982. 512 p.
3. Stanley H. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford: Clarendon Press; 1971. 336 p.

4. Bonner J. C., Fisher M. E. Linear Magnetic Chains with Anisotropic Coupling. *Physical Review*. 1964;135(3A):640–658. DOI: 10.1103/PhysRev.135.A640.
5. Stodolsky L., Wosiek J. Exact Density of States and Its Critical Behavior. *Nuclear Physics B*. 1994;413:813–826. DOI: 10.1016/0550-3213(94)90014-0.
6. Ginzburg V. L., Fain V. M. On the Magnetic Properties of Paramagnetic Fluids of the Molecular Chain Type. *Soviet Physics JETP*. 1962;42:183–190.
7. Benedetti D., Lauria E., Mazáč D., van Vliet P. One-Dimensional Ising Model with $1/r^{1.99}$ Interaction. *Physical Review Letters*. 2025;134(20):201602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.134.201602.
8. Benedetti D., Lauria E., Mazac D., van Vliet P. A Strong-Weak Duality for the 1d Long-Range Ising Model. *arXiv:2509.05250*. DOI: 10.48550/arXiv.2509.05250.
9. Andriushchenko P. D., Nefedev K. V. Partition Function and Density of States in Models of a Finite Number of Ising Spins with Direct Exchange between the Minimum and Maximum Number of Nearest Neighbors. *Solid State Phenomena*. 2016;247:142–147. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.247.142.
10. Kryzhanovsky B., Litinskii L. n-vicinity Method and 1D Ising Model. *Optical Memory and Neural Networks*. 2018;27(4):235–245. DOI: 10.3103/S1060992X18040033.