

## О РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДАХ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕМПЕРАТУРЫ ОБЪЕКТА ПО ГРАНИЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

**Т. П. Гаврилова**

*Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет),  
г. Челябинск, Российская Федерация*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5742-841X>, [✉ gavrilovatp@susu.ru](mailto:gavrilovatp@susu.ru)*

*Аннотация:* работа посвящена сравнению двух подходов к решению обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности. Подобные задачи позволяют восстановить распределение температуры в недоступных для прямого измерения областях объекта на основе зашумленных данных, регистрируемых на поверхности объекта и вблизи нее. Актуальность рассматриваемой задачи обусловлена ее широким применением в задачах термического контроля и диагностики при термообработке материалов, при неразрушающем тепловом контроле, а также при диагностике, мониторинге, прогнозировании и оптимизации тепловых режимов технологического оборудования. Математическая модель задачи включает уравнение теплопроводности, известное распределение температуры в начальный момент времени, нестационарную функцию, задающую температуру на одной границе, и дополнительное условие, характеризующее температуру вблизи этой границы. Требуется определить неизвестную температурную функцию на другой границе линейного объекта, на основании которой в последующем прогнозируется температура во всех внутренних точках линейного объекта.

*Ключевые слова:* уравнение теплопроводности, численные методы, преобразование Лапласа, метод регуляризации, конечно-разностные уравнения.

*Для цитирования:* Гаврилова Т. П. О различных подходах к определению температуры объекта по граничным измерениям. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):35–41.

*Поступила в редакцию:* 14.10.2025.

*В окончательном варианте:* 07.11.2025.

## APPROACHES TO DETERMINING AN OBJECT'S TEMPERATURE FROM BOUNDARY MEASUREMENTS

**T. P. Gavrilova**

*South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russian Federation*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5742-841X>, [✉ gavrilovatp@susu.ru](mailto:gavrilovatp@susu.ru)*

*Abstract:* we conducted a comparative analysis of two approaches for solving an inverse boundary problem for the heat conduction equation. These problems allow reconstruction of the temperature distribution in regions of an object that cannot be measured directly, using noisy data recorded on or near the object's surface. This class of problems is highly relevant due to its wide range of applications, including thermal monitoring and diagnostics during material heat treatment, nondestructive thermal testing, and the diagnostics, monitoring, forecasting, and optimization of thermal modes in technological equipment.

The mathematical model uses the heat conduction equation, a known initial temperature distribution, a time-dependent temperature specified on one boundary, and an additional condition describing the temperature near that boundary. Our objective is to determine the unknown temperature function on the opposite boundary of a one-dimensional object, which can then be used to predict the temperature at all internal points.

Two approaches to the numerical solution of this inverse problem are considered. The first approach is based on applying the Laplace integral transform, which reduces the problem to a Volterra integral equation of the first kind. A numerical algorithm with regularization is proposed to solve this equation. The second approach relies on finite-difference approximations, enabling direct numerical simulation of the original problem. A comparative analysis of the proposed approaches is presented in terms of accuracy in reconstructing the temperature distribution and robustness with respect to errors in the input data. The methods discussed can be applied to problems of predicting the thermal state of objects subjected to external thermal effects.

*Keywords:* heat conduction equation, numerical methods, Laplace transform, regularization method, finite difference equations.

*Cite this article:* Gavrilova T. P. Approaches to Determining an Object's Temperature from Boundary Measurements. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):35–41.

*Original article submitted:* 14.10.2025.

*Revision submitted:* 07.11.2025.

### Введение

Разработка методов неразрушающего теплового контроля при термообработке, проведении диагностики различных технических объектов позволит создать новые приборы мониторинга теплового состояния систем. Подобные задачи могут быть сформулированы как граничные обратные задачи теплопроводности, решение которых связано с трудностями по преодолению их некорректности. Многие современные исследователи занимались изучением и разработкой методов решения обратных задач [1–7].

В работе приведено сравнение двух методов решения обратной задачи теплопереноса для линейного объекта с нестационарными граничными условиями, известными вблизи одной из границ. Первый метод предполагает построение интегральной модели процесса теплопереноса на основе преобразования Лапласа и численный метод определения неизвестной функции на другой границе и внутри объекта, основанный на методе Лаврентьева, с апостериорным выбором параметров регуляризации. Второй метод включает построение конечно-разностных уравнений и их численное решение.

Результаты проведенного вычислительного эксперимента позволяют выявить особенности, преимущества и ограничения каждого из предложенных методов решения обратной граничной задачи.

### Постановка задачи

Рассмотрим обратную граничную задачу теплопроводности:

$$u_t = au_{xx}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(x_0, t) = g(t), \quad x_0 \in (0, \ell), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = C, \quad x \in [0, \ell]. \quad (3)$$

В данной задаче требуется найти граничное значение функции

$$u(\ell, t) = \psi(t) \quad (4)$$

и с ее помощью спрогнозировать значение  $u(x, t)$  во внутренних точках линейного объекта.

Согласно [1] во внутренних точках объекта решение задачи (1)–(4) существует и единственно.

При решении поставленной обратной задачи необходимо учитывать наличие погрешностей измерений исходных данных, обусловленных различными факторами, включая шумы и аппаратные погрешности приборов. Формальная постановка указанной ситуации предполагает, что вместо истинных значений  $g_0$  и  $\varphi_0$  определены лишь их приближенные значения  $g_\delta$ ,  $\varphi_\delta$ , удовлетворяющие условию  $\max \{ \|\varphi_\delta - \varphi_0\|, \|g_\delta - g_0\| \} \leq \delta$ , где  $\delta > 0$  устанавливает уровень допустимой погрешности. Таким образом, задача сводится к восстановлению неизвестной граничной температурной функции  $u_\delta(\ell, t)$  по исходным данным  $\delta$ ,  $g_\delta$ ,  $\varphi_\delta$  с последующим прогнозированием температурного распределения во внутренних областях исследуемого объекта.

### Построение интегрального уравнения

Исходя из предположения, что искомая функция  $\psi(t)$  является известной величиной, найдем решение прямой задачи для уравнения теплопроводности. Формальная постановка математической модели прямой задачи представляется следующим образом:

$$u_t = au_{xx}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0 \quad (5)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(\ell, t) = \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = C, \quad x \in [0, \ell]. \quad (7)$$

Учитывая особенности протекания процессов теплопереноса и принимая во внимание выводы, изложенные в исследовании [8], путем применения интегрального преобразования Лапласа к прямой

задаче (5)–(7) и последующей аппроксимации точного решения указанной задачи посредством конечного ряда, мы приходим к следующему аналитическому выражению для искомой функции  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^n n \sin\left(\frac{\pi n(\ell - x)}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} \tau} d\tau +$$

$$+ \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_2} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} \tau} d\tau +$$

$$+ \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{2n - 1} \sin\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{\ell^2} t}. \quad (8)$$

Рассмотрим дополнительное условие  $u(x_0, t) = g(t)$  обратной задачи. Для известной температурной функции  $g(t)$  обозначим ее сеточный аналог через  $g_N(t)$ . Тогда решение поставленной задачи (1)–(4) становится эквивалентным поиску решения соответствующего интегрального уравнения вида:

$$\frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) \int_0^t \psi(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} (t-\tau)} d\tau =$$

$$= g_N(t) - \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_2} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) \int_0^t \varphi(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} (t-\tau)} d\tau -$$

$$- \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{2n - 1} \sin\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{\ell^2} t}. \quad (9)$$

Для удобства будем пользоваться следующими обозначениями:

$$K_N(t - \tau) = \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} (t-\tau)},$$

$$L_N(t - \tau) = \frac{2\pi a}{\ell^2} \sum_{n=1}^{N_2} n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{\ell^2} (t-\tau)}.$$

Обозначим интегральный оператор  $\int_0^t K_N(t - \tau)\psi(\tau)d\tau = W\psi$ , а

$$h_N(t) = g_N(t) - \frac{4C}{\pi} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{2n - 1} \sin\left(\frac{(2n - 1)\pi x_0}{\ell}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{\ell^2} t} - \int_0^t L_N(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Отсюда вытекает следующая эквивалентная форма записи (9):

$$W\psi = h_N(t) \quad (10)$$

Из уравнения (10), учитывая зашумленность в исходных данных с заданным уровнем допустимого отклонения  $\delta$ , находим температурную функцию  $u_\delta(\ell, t) = \psi_\delta(t)$ , а затем прогнозируем температуру  $u_\delta(x, t)$  во внутренних точках линейного объекта.

### Вычислительная схема метода

Процесс численного прогнозирования температуры основывается на применении метода дискретной регуляризации. При этом параметрами регуляризации становятся величины  $N_1$ ,  $N_2$  и шаг дискретизации по времени  $h_t$ . Для выполнения вычислений процесс разделен на последовательные этапы, первый из которых заключается в выборе значений  $N_1$  и  $N_2$  — количества членов в функциональных рядах выражения (9) и начального значения  $s$ . На втором этапе вводится временная сетка с узлами  $t_i$ , где  $t_i = (i - 1)h_t$ ,  $h_t = T/s$ ,  $1 \leq i \leq s + 1$ , образующими равномерное распределение точек на интервале  $[0, T]$ . Для определения функции  $u_\delta(\ell, t_i) = \psi_\delta(t_i)$  найдем решение интегрального уравнения

(10), применяя для вычисления интегралов формулу средних прямоугольников. На следующем этапе решения оцениваем величину погрешности

$$\Delta(t) = \frac{\max_{t_i \in [0, T]} |\psi_\delta(t_i) - \psi(t_i)|}{\max_{t_i \in [0, T]} |\psi(t_i)|}.$$

Вычислительная процедура заканчивается при достижении установленного критерия точности, задаваемого условием  $\Delta(t) < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заранее фиксированная точность.

### Численный метод на основе конечно-разностных уравнений

Для решения задачи (1)–(4) численным методом с использованием конечно-разностных уравнений введем в области  $[0, \ell] \times [0, T]$  равномерную сетку с узлами  $(x_i, t_j)$ :

$$x_i = ih_x, \quad i = \overline{0, r}, \quad r = \frac{\ell}{h_x}; \quad t_j = jh_t, \quad j = \overline{0, m}, \quad m = \frac{T}{h_t}.$$

Обозначим значения температурных функций в узлах сетки следующим образом:

$$u(x_i, t_j) = u_{i,j}, \quad u(0, t_j) = \varphi_j, \quad u(x_i, 0) = u_{i,0} = C, \quad u(\ell, t_j) = \psi_j.$$

Пусть  $x_0 = rh_x$ , тогда  $u(x_0, t_j) = u_{r,j} = g_j$ . На каждом временном слое, посредством применения неявной четырехточечной конечно-разностной схемы, аппроксимируем уравнение (1):

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_t} - a \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h_x^2} = 0, \quad i = 1, \dots, R-1.$$

На основе полученной разностной схемы определим значения искомой функции при фиксированном шаге по времени и пространству. С целью повышения вычислительной эффективности и упрощения реализации численного алгоритма запишем уравнения в следующем виде:

$$A_i u_{i-1,j+1} + B_i u_{i,j+1} + C_i u_{i+1,j+1} = D_i, \quad i = 0, \dots, R-1, \quad (11)$$

где

$$A_i = C_i = \frac{a}{h_x^2}, \quad B_i = -\frac{2a}{h_x^2} - \frac{1}{h_t}, \quad D_i = -\frac{1}{h_t} u_{i,j}, \quad i = 1, \dots, R-1, \quad (12)$$

$$A_0 = C_0 = 0, \quad B_0 = -\frac{1}{h_t} \cdot \frac{\varphi_j}{\varphi_{j+1}}.$$

Следуя идее, изложенной в [9], аппроксимацию температурного поля объекта в точке  $(x_i, t_j)$  представим в виде композиции дискретных аналогов двух вспомогательных функций  $y(x, t)$  и  $z(x, t)$  в следующей форме:

$$u_{i,j} = y_{i,j} + \psi_j \cdot z_{i,j}, \quad i = 0, \dots, R. \quad (13)$$

В узловой точке  $(x_R, t_j)$  выражение (13) примет вид:  $u_{R,j} = y_{R,j} + \psi_j \cdot z_{R,j}$ . Согласно условию на правой границе линейного объекта  $u_{R,j} = \psi_j$ . Отсюда определим значения введенных функций в узлах сетки  $(x_R, t_j)$ :  $y_{R,j} = 0$ ,  $z_{R,j} = 1$ .

Заменяя в уравнении (11) неизвестную функцию на ее представление по формуле (13), на каждом  $j$ -ом временном слое приходим к следующим системам линейных алгебраических уравнений для определения  $y_{i,j}$  и  $z_{i,j}$ ,  $i = 0, \dots, R$ :

$$\begin{cases} A_i y_{i-1,j+1} + B_i y_{i,j+1} + C_i y_{i+1,j+1} = D_i, & i = 1, \dots, R-1, \\ y_{R,j} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_i z_{i-1,j+1} + B_i z_{i,j+1} + C_i z_{i+1,j+1} = 0, & i = 1, \dots, R-1, \\ z_{R,j} = 1, \end{cases}$$

где коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  определяются по формулам (12). Для нахождения решений  $y_{i,j}$  и  $z_{i,j}$  полученных систем линейных уравнений применяется метод прогонки.

С учетом наличия шума в исходных данных с максимально допустимым уровнем  $\delta$ , из дискретного аналога условия  $u_{r,j} = g_j^\delta$  в узле сетки  $x_0 = rh_x$  формируется уравнение  $g_j^\delta = y_{r,j} + \psi_j^\delta \cdot z_{r,j}$ . Тогда при  $z_{r,j} \neq 0$  получим следующее соотношение для искомой функции:

$$\psi_j^\delta = \frac{g_j^\delta - y_{r,j}}{z_{r,j}}, \quad j = 1, \dots, M.$$

### Вычислительный эксперимент

Для верификации разработанных численных методов и количественной оценки точности получаемых решений был проведен вычислительный эксперимент. В рамках данного эксперимента проведено сравнение численных решений, полученных различными методами, с заранее известными тестовыми данными. Проведенный анализ включал расчет оценок погрешностей и позволил выявить влияние шумов во входной информации на устойчивость и точность применяемых подходов.

В ходе эксперимента для тестовых граничных функций находилось численное решение прямой задачи (5)–(7) и моделировалось значение температурной функции  $g(t) = u(x_0, t)$ . Далее в значения функций  $\varphi(t)$  и  $g(t)$  вносились дополнительные шумы. После этого задача определения  $\psi_\delta(t)$  решалась с использованием двух предложенных методов. Затем полученное решение  $\psi_\delta(t)$  подставлялось в задачу (5)–(7), что позволило определить температурное поле  $u_\delta(x, t)$  внутри объекта.

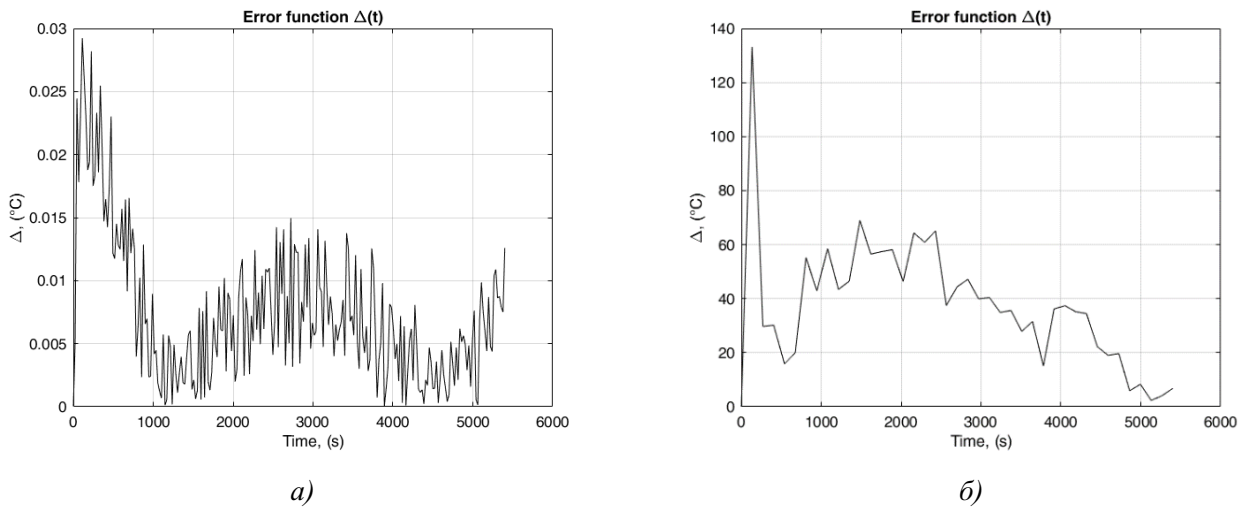
Вычислительный эксперимент проводился при  $\ell = 1$ ,  $a = 1$  и  $T = 6000c$ ,  $x_0 = 0,1 \cdot \ell$ ,  $x_1 = 0,8 \cdot \ell$ , начальная температура объекта  $u(x, 0) = 50$ . В эксперименте использовалась сетка с узлами  $(x_i, t_j)$ , где

$$\begin{cases} x_i = ih_x, & h_x = L/R, & 0 \leq i \leq R; \\ t_j = jh_t, & h_t = T/M, & 0 \leq j \leq M. \end{cases}$$

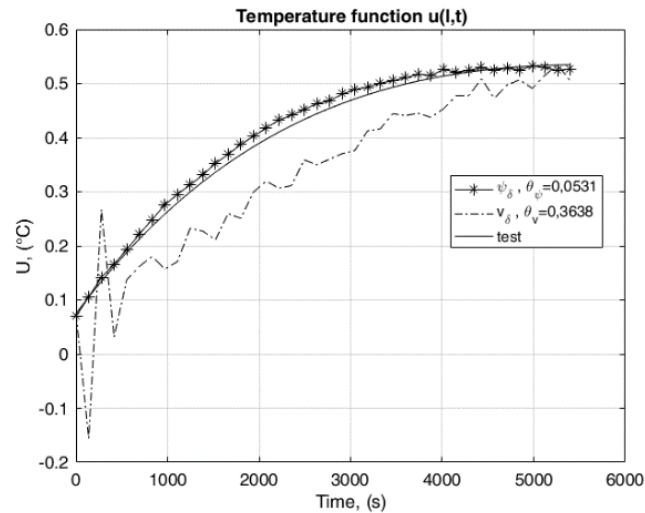
Для сравнения численного решения  $\psi_\delta(t)$  с тестовой функцией и получения оценок погрешностей использовалась функция  $\Delta(t) = |\psi_\delta(t) - \psi(t)|$  и величины

$$\Delta_\psi = \max_{t \in [0, T]} \Delta(t), \quad \varepsilon_\psi = \frac{\Delta_\psi}{\max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|}.$$

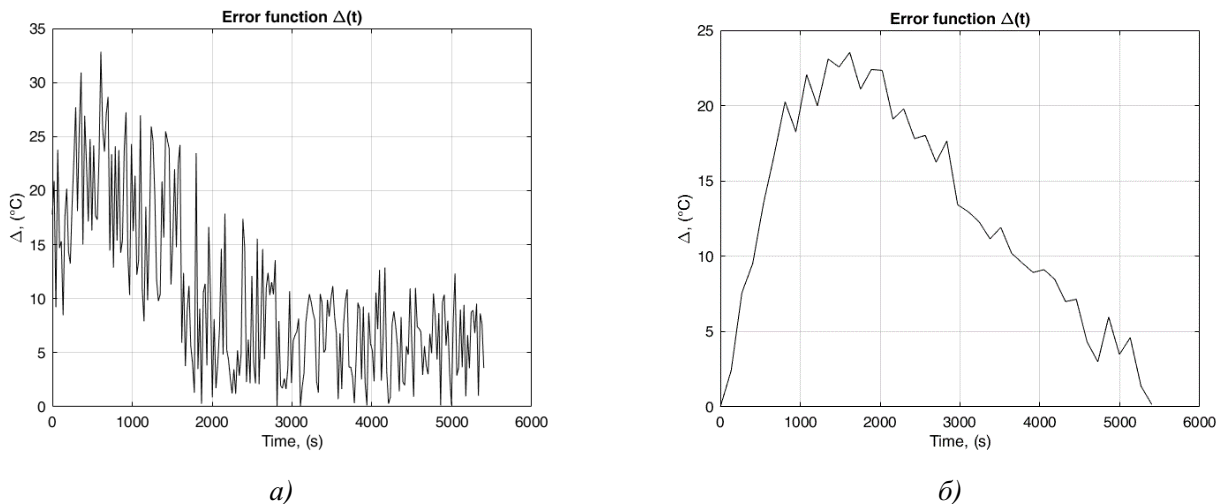
В ходе вычислительного эксперимента в качестве модельных использовались следующие функции: в точке  $x = 0$  – функция  $\varphi(t) = 50 + 1500t(e^{-t} - e^{-3})$ , а в точке  $x = 1$  – функция  $\psi(t) = 50 + 750te^{-t}$ .



**Рис. 1.** Графики функции температурной погрешности  $\Delta(t)$  при  $x_0 = 0,1 \cdot \ell$ : а) для решения с использованием интегрального уравнения; б) для решения с использованием конечно-разностных схем



**Рис. 2.** Графики функций  $\psi_\delta$  — решения задачи (5)–(7) с использованием интегрального уравнения и  $v_\delta$  — решения задачи (5)–(7) с использованием конечно-разностных схем при  $x_0 = 0,1 \cdot \ell$



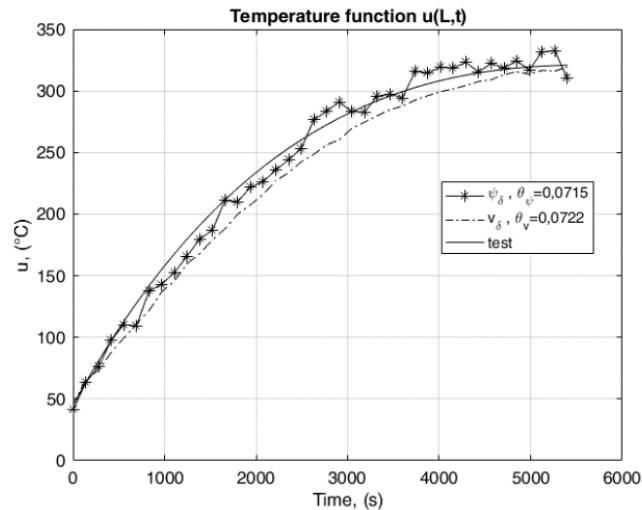
**Рис. 3.** Графики функции температурной погрешности  $\Delta(t)$  при  $x_0 = 0,1 \cdot \ell$ : а) для решения с использованием интегрального уравнения; б) для решения с использованием конечно-разностных схем

В таблице приведены результаты вычислительного эксперимента, проведенного при различных точках температурных измерений внутри объекта, позволяющие на основе анализа полученных погрешностей оценить устойчивость рассмотренных методов решения обратной граничной задачи и влияние на них неточностей исходных данных.

Таблица

Экспериментальные оценки погрешностей температурных функций

Точка измерения температуры	Погрешность исходных данных, $\delta$	Погрешности вычислений			
		Решение с использованием интегрального уравнения		Решение с использованием конечно-разностных схем	
		$\Delta_\psi$	$\theta_\psi$	$\Delta_\psi$	$\theta_\psi$
$x_0 = 0,1 \cdot \ell$	0,01	17,0069	0,0530	118,2624	0,3685
	0,05	27,2017	0,0848	397,5678	1,2389
	0,1	41,4863	0,1293	560,5154	1,7466
$x_0 = 0,8 \cdot \ell$	0,01	22,9322	0,0715	23,1770	0,0722
	0,05	27,1660	0,0847	29,1066	0,0907
	0,1	32,4754	0,1012	35,6682	0,1111



**Рис. 4.** Графики функций  $\psi_\delta$  — решения задачи (5)–(7) с использованием интегрального уравнения и  $v_\delta$  — решения задачи (5)–(7) с использованием конечно-разностных схем при  $x_0 = 0,1 \cdot \ell$

### Заключение

Анализ результатов численного моделирования показал, что при наличии шумов в исходных данных метод интегральных преобразований обеспечивает более стабильные и точные решения задачи по сравнению с конечно-разностной схемой, что делает его предпочтительным для задач прогноза в условиях ограниченной точности измерений. Метод, основанный на применении конечно-разностной схемы, демонстрировал уменьшение отклонений восстановленного температурного профиля от тестового решения при приближении точки измерения температуры к границе с неизвестной температурой.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М. *Обратные задачи теплообмена*. М.: Машиностроение; 1988. 280 с.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Вычислительная теплопередача*. М.: Едиториал УРСС; 2009. 784 с.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. *Некорректные задачи математической физики и анализа*. М.: Наука; 1980. 286 с.
4. Кабанихин С. И., Шишленин М. А. Прямые и итерационные методы решения обратных и некорректных задач. *Сибирские электронные математические известия*. 2008;5:595–608.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Изд-во МГУ; 1999. 799 с.
6. Тихонов А. Н., Гончарский А. Н., Степанов В. В., Ягола А. Г. *Численные методы решения некорректных задач*. М.: Изд-во МГУ; 1990. 115 с.
7. Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. М.: Наука; 1964. 488 с.
8. Yaparova N. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2014;22(5):832–847. DOI: 10.1080/17415977.2013.830614.
9. Вабищевич В. И., Васильев П. Н., Васильева М. В. Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2015;55(6):1020–1027.