

## О РАЗВИТИИ АЛГОРИТМА МОРФИНГА СЕТОК ДЛЯ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ОБЪЕМОВ

Н. А. Артёмова<sup>1,a</sup>, О. В. Ушакова<sup>1,2,b</sup><sup>1</sup> *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация*<sup>2</sup> *Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация*<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7305-6799>, ✉ [ana@imm.uran.ru](mailto:ana@imm.uran.ru)<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-5009-8423>, [uov@imm.uran.ru](mailto:uov@imm.uran.ru)

*Аннотация:* в связи с усложнением деформирующего тела в технологии построения трехмерных структурированных сеток, предназначенной для моделирования процессов многокомпонентной гидродинамики, описаны исследования с целью расширения возможностей развиваемой технологии: описана модификация алгоритма морфинга сеток для случаев деформации телами, образованными поверхностями вращения с параллельными осями, когда образующие поверхностей вращения могут быть и дугами окружностей. Ранее алгоритм морфинга был реализован для образующих, состоящих только из отрезков прямых. В новой модификации морфинга усложнен и способ формирования тел. Для деформирующих тел рассматриваются парные образующие — левые и правые. В случаях возникновения для них разных по типу тел вращения (для задания отрезками прямых возникают цилиндр и конус) при осуществлении морфинга налагалось ограничение принадлежности узлов обоим телам. Сейчас это ограничение снято (в том числе и для дуг окружностей) и разработан универсальный алгоритм: узел может принадлежать только одному телу вращения. Модификация алгоритма реализована в виде программы на языке C++ по единым для технологии требованиям и может быть выбрана основой системы искусственного интеллекта.

*Ключевые слова:* структурированные сетки, оптимальные сетки, алгоритм морфинга, деформированные объемы.

*Для цитирования:* Артёмова Н. А., Ушакова О. В. О развитии алгоритма морфинга сеток для деформированных объемов. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):24–28.

*Поступила в редакцию:* 10.10.2025.

*В окончательном варианте:* 13.11.2025.

## ADVANCED MESH MORPHING ALGORITHM FOR DEFORMED VOLUMES

N. A. Artyomova<sup>1,a</sup>, O. V. Ushakova<sup>1,2,b</sup><sup>1</sup> *N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*<sup>2</sup> *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7305-6799>, ✉ [ana@imm.uran.ru](mailto:ana@imm.uran.ru)<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-5009-8423>, [uov@imm.uran.ru](mailto:uov@imm.uran.ru)

*Abstract:* we studied how to extend a simulation of 3D structured meshes for multicomponent hydrodynamic processes. We focused on an improved mesh morphing algorithm for cases where the deforming body consists of surfaces of revolution with parallel axes, and the generatrix curve may also be a circular arc. Earlier work implemented morphing only for a generatrix made of straight-line segments.

In the new version, we expanded the body construction method. We introduced two generatrix curves: left and right. When these curves produce different types of surfaces of revolution (for example, a cylinder and a cone), the previous algorithm required each node to belong to both bodies. We removed this restriction (also for circular arcs) and developed a general rule: a node belongs to only one surface of revolution.

We implemented the modified algorithm in C++. It can be used in AI applications.

*Keywords:* structured meshes, optimal meshes, morphing algorithm, deformed volumes.

*Cite this article:* Artyomova N. A., Ushakova O. V. Advanced Mesh Morphing Algorithm for Deformed Volumes. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):24–28.

*Original article submitted:* 10.10.2025.

*Revision submitted:* 13.11.2025.

### Описание целей исследований

В статье описывается дальнейшее развитие алгоритма морфинга сеток, разрабатываемого для моделирования процессов многокомпонентной гидродинамики, см. [1]. Модификация алгоритма осуществлена с целью расширения возможностей технологии расчета сеток [2], для этого она реализована в виде программы на языке C++ по единым для технологии требованиям. Морфинг применяется для построения сеток в объемах вращения, деформированных телами, образованными поверхностями вращения с параллельными осями, называемыми обобщениями объемов вращения. Он осуществляется путем плавной деформации объема вращения и сетки для него с последующей оптимизацией — процедуры, позволяющей улучшить качество деформированной сетки и сделать сетку оптимальной — удовлетворяющей критериям оптимальности [3] и требованиям, необходимым для моделирования многокомпонентных сред, подробно перечисленным в [1]. Процесс морфинга осуществляется до достижения деформации объема нужной степени. Ранее алгоритм был разработан для случаев объемов вращения, деформированных другими объемами вращения [3], а также для случаев деформации телами, образованными вращением отрезков прямых (элементов образующей) вокруг параллельных осей [1]. В настоящей работе рассматривается случай, когда элементы образующей деформирующего тела могут включать в себя и дуги окружностей, т.е. само тело может иметь более сложную форму и состоять из частей цилиндров, конусов и сфер. Усложнен и способ формирования тел. Для этого разработаны универсальные алгоритмы проверки попадания узла в тело и проецирования на границу обобщения объема вращения.

Описываемые исследования были проведены также с целью повышения экономичности алгоритма морфинга — важной характеристики генераторов сеток, см. [4]. В отличие от современных методов морфинга [5], основанных на интерполяции (алгебраическом подходе), алгоритм морфинга [1] разработан с помощью вариационного подхода [3], применяемого для оптимизации сеток. Обоснование целесообразности выбора подхода приведено в [3]. Оптимизация предполагает осуществление итераций, сокращение числа которых было еще одной целью исследований.

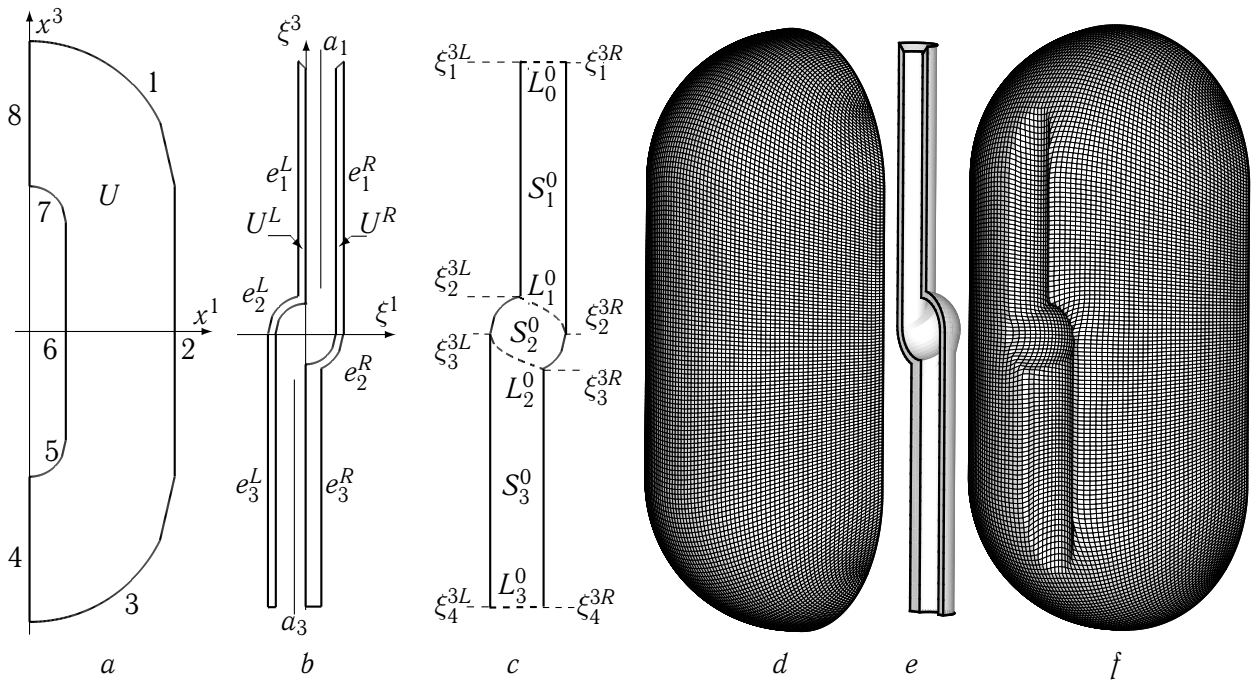
### Изменения в моделировании морфинга сеток

Для описания изменений будем использовать следующие обозначения. Будем называть деформируемый объем также основным объемом, телом, а деформирующий — вспомогательным объемом, телом. Системы координат для задания тел будем называть одноименными телам названиями. На рис. 1(a) элементы образующей основного тела (объема вращения) обозначены цифрами, на рис. 1(b) элементы образующей вспомогательного тела (обобщения объема вращения) —  $e_L^L, e_R^R$  (далее верхние индексы  $L, R$  могут опускаться) для левой и правой образующей соответственно. Элементы образующих вращаются вокруг осей вращения на угол 180 градусов по часовой или против часовой стрелки. Для объема вращения ось вращения — это ось  $x^3$ , а для обобщения объема вращения — это отрезки параллельных прямых  $a_l$ , параллельных оси  $\xi^3$ . На рис. 1(b) обозначены только элементы деформирующей поверхности (они отдельно представлены на рис. 1(c)):  $e_1, e_2, e_3$  (общее число элементов и осей вращения  $I_0 = 8$ ). Ось вращения  $a_2$  совпадает с осью  $\xi^3$ .

Морфинг начинается с генерации [3, 6] структурированной сетки для недеформированного объема вращения (рис. 1(d)) и проводится путем деформации основного тела и сетки для него, которая моделируется движением одного тела на другое, проецированием узлов сетки основного тела (основной сетки), попавших во вспомогательное тело (рис. 1(e)), на деформирующую поверхность (детали см. в [1]). Улучшение качества деформированной сетки осуществляется алгоритмом оптимизации [3]. Итерации повторяются до достижения нужной деформации основного тела, см. рис. 1(f).

Для удобства организации вычислений процесса деформации все проверки проводятся во вспомогательной системе координат, поэтому движется основное тело на вспомогательное. Для достижения плавности процесса деформации возникновение вырождений в деформированной сетке не допускается и движение осуществляется с малым шагом. Для его выбора определяется момент возникновения пересечения тел. Для этого проверяется условие попадания узла в деформирующее тело для узлов приграничной поверхности основной сетки. Условие попадания узла в тело в процессе деформации используется еще раз, но для граничных узлов основного тела, когда тело уже сдвинуто на величину шага деформации. Те узлы, которые попали в тело, проецируются на его поверхность, тем самым сетка деформируется. А далее осуществляется ее оптимизация.

Так как деформация осуществляется с малым шагом, проверка попадания узла в деформиру-



**Рис. 1.** Образующие основного (a) и вспомогательного (b, c) тел, сетка для основного тела (d), вспомогательное тело (e), сетка для деформированного тела (f)

ющее тело осуществляется для обобщения объема вращения с образующей кривой (см. рис. 1(c)), соответствующей только деформирующей поверхности.

Ранее деформирующая поверхность состояла только из цилиндрических и конических поверхностей и условия попадания узла в тело проверялись с помощью условий попадания в конус и цилиндр. При этом на тела налагалось ограничение: при попадании узла в диапазон элементов (третья координата узла попала в диапазоны изменения третьей координаты элементов), когда элементам соответствовали разные тела, условия попадания узла в тело должно выполняться для обоих тел. В этом случае при проецировании узла на соответствующие поверхности вращения в качестве проекции выбиралась ближайшая к узлу (проецирование узлов в этом случае осуществлялось приближенно).

В новой модификации алгоритма морфинга указанное выше ограничение снято (узел может попадать только в одно тело), и разработан универсальный алгоритм (в нем проецирование узлов уже осуществляется во всех случаях точно). Опишем его.

Сначала поясним, как образуется обобщение объема вращения. Элементы  $e_i^L, e_i^R$ , описывая одну и ту же поверхность вращения  $S(e_i)$ , формируют тело вращения  $T_i$  (половину от классического тела вращения). Поверхности вращения  $S(e_i)$  и  $S(e_{i+1})$  образуют в пересечении кривые  $L_i = S(e_i) \cap S(e_{i+1})$  с ортогональными проекциями на плоскость  $\xi^1, \xi^3 - L_i^0$  (рис. 1(c)). Криволинейные четырехугольники, ограниченные элементами  $e_i^L, e_{i+1}^L$  и кривыми  $L_{i-1}^0$  и  $L_i^0$ , обозначим  $S_i^0$  (рис. 1(c)). Для  $S_1^0$  полагается  $L_0^0 = L_{i_0}^0, e_{i_0+1}^L = e_1^L$  ( $e_{i_0+1}^R = e_1^R$ ). Обобщение объема вращения ограничивается областями  $U^L, U^R$  (внутри левой и правой образующих) и поверхностями  $S(e_i)$ , ортогональные проекции которых совпадают с  $S_i^0$ , см. рис. 1(e).

#### Алгоритм проверки попадания узла в тело

Алгоритм состоит в следующем. Пусть  $P = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  — узел сетки во вспомогательной системе координат. Деформирующее тело линейчатými поверхностями, формируемыми прямыми для нахождения ортогональных проекций линий  $L_i$ , проходящими через каждую точку кривой  $L_i$  ортогонально плоскости образующей, разбивается на подтела  $T_i^0$  — части тел вращения  $T_i$ . Ортогональные проекции подтел  $T_i^0$  на плоскость образующей совпадают с четырехугольниками  $S_i^0$  (рис. 1(c)). Для того чтобы проверить, что узел принадлежит телу, достаточно проверить, что он принадлежит какому-либо из его подтел  $T_i^0$ , а для этого нужно проверить, что узел принадлежит телу вращения  $T_i$ , а его ортогональная проекция  $P^0 = (\xi^1, 0, \xi^3) = (\xi^1, \xi^3)$  принадлежит какому-либо из четырехугольников  $S_i^0$ . Это осуществляется с помощью следующего процесса.

Этап 1. Проверка принадлежности узла  $P$  диапазонам элементов. Для элементов образующих

деформирующей поверхности — отрезков прямых  $e_l^L = [P_l^L, P_{l+1}^L]$ ,  $e_l^R = [P_l^R, P_{l+1}^R]$ , ( $P_l = (\xi_l^1, \xi_l^2, \xi_l^3)$ ) либо дуг окружностей  $e_l^L = \cup P_l^L, P_{l+1}^L$ ,  $e_l^R = \cup P_l^R, P_{l+1}^R$  в порядке их нумерации  $l = 1, 2, \dots, K$ , где  $K$  — число элементов, формирующих деформирующую поверхность, проверяем, принадлежит ли третья координата  $\xi^3$  узла сетки  $P$  левому или правому диапазону:  $\xi^3 \in [\xi_l^3, \xi_{l+1}^3]$  (рис. 1(c)). Считаем, что  $\xi_1^{3L} = \xi_1^{3R}$  и  $\xi_K^{3L} = \xi_K^{3R}$ , нумерация элементов осуществляется в порядке убывания третьих компонент  $\xi_l^3$  их концов ( $\xi_{l+1}^3 < \xi_l^3$ ), отрезки прямых, перпендикулярные оси вращения, в образующей деформирующей поверхности не допускаются, дуги окружностей задаются однозначными функциями  $\xi^3 = \xi^3(\xi^1)$ . Если условие выполнено, переходим к этапу 2. Если нет, переходим к следующему элементу.

Этап 2. Проверка  $P \in T_l$ . Проверяем выполнение неравенств:  $f_l \leq 0$ , где

$$\begin{aligned} f_l &= (\xi^1 - a_l)^2 + (\xi^2)^2 - R_l^2, \\ f_l &= (\xi^1 - a_l)^2 + (\xi^2)^2 - t^2(\xi^3 - \xi_{V_l}^3)^2, \\ f_l &= (\xi^1 - a_l)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3 - \xi_{O_l}^3)^2 - R_l^2 \end{aligned}$$

для цилиндра, конуса и сферы с центром  $O_l = (a_l, 0, \xi_{O_l}^3)$ , соответственно. Радиус  $R_l$  цилиндра определяется как разность координат  $\xi^1$  для образующей цилиндра (см., например,  $e_1^R$  на рис. 1(b)) и оси вращения (например,  $a_1$ ), радиус  $R_l$  сферы задается пользователем в файле с описанием геометрии образующей кривой. Параметр  $a_l$  — это координата  $\xi^1$  оси вращения  $a_l$  (для удобства с тем же обозначением). Для конуса  $t = (\xi_l^1 - \xi_{l+1}^1)/(\xi_l^3 - \xi_{l+1}^3)$  координата вершины  $V_l$ :  $\xi_{V_l}^3 = \xi_l^3 - (\xi_l^1 - a_l)/t$ . Если условие выполнено, переходим к этапу 3, если нет — к следующему элементу.

Этап 3. Проверка  $P^0 \in S_l^0$ . После проверок этапов 1, 2 известно: узел  $P$  лежит в диапазоне элементов  $e_l^L, e_l^R$  по  $\xi^3$  и принадлежит телу вращения  $T_l$ . Так как узел принадлежит телу вращения, его ортогональная проекция  $P^0$  принадлежит ортогональной проекции тела вращения  $T_l$ , а значит, находится либо на, либо правее левой границы четырехугольника  $S_l^0$  или на, либо левее его правой границы. Нужно убедиться только для проекций  $P^0$ , попадающих в диапазон линии  $L_{l-1}^0$  по  $\xi^1$ , т.е. когда  $\xi^1 \in [\xi_{l-1}^{1L}, \xi_{l-1}^{1R}]$ , что они лежат не выше линии  $L_{l-1}^0$  (условие а), и только для проекций  $P^0$ , попадающих в диапазон линии  $L_l^0$  по  $\xi^1$ , т.е. когда  $\xi^1 \in [\xi_l^{1L}, \xi_l^{1R}]$ , что они лежат не ниже линии  $L_l^0$  (условие б). Для этого для первого элемента ( $l = 1$ ) нужно проверить выполнение только условия (б), так как  $\xi_1^{3L} = \xi_1^{3R}$ , а для последнего элемента ( $l = K$ ) условие (б) проверять не нужно, так как  $\xi_K^{3L} = \xi_K^{3R}$ . Для него и внутренних элементов ( $l = 2, \dots, K-1$ ) условие (а) проверять в данном процессе тоже не нужно, так как проекции линий пересечения поверхностей — это дуги ветвей парабол  $\xi^1 = \xi^1(\xi^3)$  (как на рис. 1(c) линии  $L_1^0, L_2^0$ ) либо отрезки прямых линий, проходящих через концы элементов и поэтому лежащих не ниже прямой линии  $\xi^3 = \min\{\xi_{l-1}^{3L}, \xi_{l-1}^{3R}\} = \xi_{\min, l-1}^3$  (для примера см. рис. 1(c),  $\xi_{\min, l-1}^3 = \xi_{l-1}^{3R}$ ). Поэтому для всех проекций с диапазоном из условия (а), лежащих ниже прямой линии  $\xi^3 = \xi_{\min, l-1}^3$ , условие (а) выполняется. А для проекций, лежащих на самой линии и выше, это условие также выполняется, так как в этом случае, если проекции узлов не принадлежат проекции верхнего тела  $T_{l-1}$ , то они, очевидно, находятся ниже линии пересечения  $L_{l-1}^0$  его поверхности с поверхностью нижнего тела, а если принадлежат, то для них было не выполнено условие (б) для элемента  $l-1$  (в противном случае соответствующие узлы принадлежали бы подтелу  $T_{l-1}^0$ ), а невыполнение условия (б) для элемента  $l-1$  — это выполнение условия (а) для элемента  $l$ .

Уравнения линий  $L_l^0$  находятся путем решения системы уравнений  $f_l = 0, f_{l+1} = 0$  в виде  $\xi^3 = \xi^3(\xi^1)$  (в случае парабол выбирается одна из ветвей — та, которая проходит через концы левого и правого элементов).

Если условие этапа 3 выполнено, узел принадлежит деформирующему телу. Если нужно найти его проекцию на поверхность вращения, находим ее по алгоритму из [3]. Если условие этапа 3 не выполнено, переходим к следующему элементу. Если условия этапов 1–3 не выполнены ни для какого из элементов деформирующей поверхности, то узел не принадлежит деформирующему телу.

Алгоритм проверки попадания узла в тело используется и в алгоритме оптимизации. Так как проецирование узлов на границу области осуществляется точно, возросла точность аппроксимации краевых условий в вариационных задачах построения сеток<sup>1</sup>. Это позволило сократить количество итераций оптимизации (см. примеры расчетов далее).

<sup>1</sup> Их отличия от других вариационных задач оптимизации сеток [7–10] приведены в [3].

### Примеры расчетов

Морфинг для объемов, приведенных на рис. 1(*d,e*), осуществлялся на персональном компьютере<sup>2</sup> с разными параметрами. Для построения сетки из  $101 \times 161 \times 30 = 487830$  узлов на рис. 1(*f*) потребовалось 248 шагов морфинга по 50 итераций оптимизации на каждом шаге (8 часов 43 минуты). На 100-ом (200-ом) шагах морфинга оптимизация проводилась во всем объеме, на остальных шагах — в деформированном фрагменте. На более густой сетке  $151 \times 181 \times 30 = 819930$  узлов с такими же параметрами оптимизации морфинг осуществился за 101 шаг (5 часов 22 минуты). Количество итераций оптимизации в расчетах (см., например, [1]) было 100–300, и морфинг длился несколько суток. В новой модификации морфинга осуществляется 50 итераций оптимизации.

### Выводы

Универсальный алгоритм проверки попадания узла в тело снимает ограничение на геометрию тел, позволяет более точно аппроксимировать граничные условия в вариационных задачах построения сеток и в результате не только осуществить построение сеток для существенно более сложных геометрий, чем в примерах, рассчитанных авторами ранее (и в примерах других авторов [7–10], где рассматриваются либо двумерные примеры, либо для трехмерного случая более простые геометрии), но и сократить в несколько раз количество итераций оптимизации, а как итог — общее время морфинга.

Таким образом, универсальный алгоритм проверки попадания узла в тело позволил существенно расширить класс деформируемых областей и возможности алгоритма морфинга, повысить его эффективность.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Артёмова Н. А., Ушакова О. В. Алгоритм морфинга для построения структурированных сеток в деформированных объемах. *Сиб. журн. вычисл. математики*. 2025;28(3):257–267. DOI: 10.15372/SJNM20250302.
2. Anuchina A. I., Artyomova N. A., Gordeychuck V. A., Ushakova O. V. A Technology for Grid Generation in Volumes Bounded by the Surfaces of Revolutions. *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* 2019;131:281–292. DOI: 10.1007/978-3-030-23436-2\_21.
3. Ушакова О. В. О развитии вариационного подхода построения оптимальных сеток (обзор). *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2023;29(2):217–247. DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-217-247.
4. Cary A. et al. Realizing the Vision of CFD in 2030. *Computing in Science and Engineering*. 2022;24(1):64–70. DOI: 10.1109/MCSE.2021.3133677.
5. Malcevic I., Mousavi A. Explicit Interpolation-Based CFD Mesh Morphing. *SIAM International Meshing Roundtable*. Ruiz-Girones E., Sevilla R., Moxey D. eds. 2023:189–215. DOI: 10.1007/978-3-031-40594-5\_9.
6. Бронина Т. Н. Алгоритмы построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2008;14(1):3–10.
7. Knupp P. Seventeen Criteria for Evaluating Jacobian-Based Optimization Metrics. *Engineering with Computers*. 2024;40(3):1375–1396. DOI: 10.1007/s00366-023-01869-w.
8. Dobrev V., Knupp P., Kolev T., Mittal K., Tomov V. hr-Adaptivity for Nonconforming High-Order Meshes with the Target Matrix Optimization Paradigm. *Eng. Comput.* 2022;38:3721–3737. DOI: 10.1007/s00366-021-01407-6.
9. Dobrev V., Knupp P., Kolev T., Mittal K., Rieben R., Tomov V. Simulation-Driven Optimization of High-Order Meshes in ALE Hydrodynamics. *Computers and Fluids*. 2020;208(4). DOI: 10.1016/j.compfluid.2020.104602.
10. Xu K., Gao X., Chen G. Hexahedral Mesh Quality Improvement via Edge-Angle Optimization. *Comput. Graph.* 2018;70:17–27. DOI: 10.1016/j.cag.2017.07.002.

<sup>2</sup> 2-ядерный процессор Intel Core i3-7100, частота 3.9 ГГц, 16Гб ОЗУ, 64-разрядная ОС.