

ВЫСОКОТОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИКИ ПРИ ОБТЕКАНИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ТЕЛА ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ

А. В. Александров^{1,a}, Л. В. Дородницын^{2,b}

¹ Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

^a ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4568-3805>, ✉ anatoly.v.alexandrov@gmail.com

^b ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5775-2794>, dorodn@cs.msu.ru

Аннотация: в работе представлена методика численного моделирования акустических возмущений, возникающих в результате рассеяния искусственно сгенерированных турбулентных полей на криволинейных препятствиях. Для расчетов применялись схемы, сохраняющие дисперсионные соотношения, широко используемые в задачах вычислительной аэроакустики. Эти разностные схемы имеют широкий шаблон, обеспечивающий их высокую точность и сеточное разрешение высоких гармоник. С учетом широкого шаблона схемы в центре внимания работы находится проблема постановки численных граничных условий на поверхности твердого тела. Авторы применяют подход, связанный с использованием фиктивной точки (ghost point), расположенной за пределами расчетной области, внутри области твердого тела рядом с границей. Получены новые теоретические результаты для случая криволинейных границ. При задании искусственного турбулентного поля применялась ранее разработанная авторами технология тензорной фильтрации белого шума, адаптированная к двумерной постановке задачи. Приведены результаты выполненного с помощью данной методики моделирования рассеяния турбулентного следа на эллиптическом цилиндре с образованием волн давления.

Ключевые слова: акустика, синтетическая турбулентность, разностные схемы, сохраняющие дисперсионные соотношения.

Благодарности: результаты работы автора из ИПМ имени М.В. Келдыша РАН получены в рамках госзадания.

Для цитирования: Александров А. В., Дородницын Л. В. Высокоточное моделирование акустики при обтекании криволинейного тела турбулентным потоком. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):17–23.

Поступила в редакцию: 17.10.2025.

В окончательном варианте: 08.11.2025.

HIGH-PRECISION ACOUSTIC SIMULATION OF A TURBULENT FLOW OVER A CURVED BODY

A. V. Aleksandrov^{1,a}, L. V. Dorodnitsyn^{2,b}

¹ Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

² Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

^a ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4568-3805>, ✉ anatoly.v.alexandrov@gmail.com

^b ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5775-2794>, dorodn@cs.msu.ru

Abstract: we present a method for numerical modeling of acoustic disturbances generated by the scattering of artificially created turbulent fields on curved obstacles. We performed the calculations using dispersion-preserving finite-difference schemes commonly applied in computational aeroacoustics. These schemes employ wide stencils, providing high accuracy and resolving high-frequency harmonics. Given the wide stencil, we focused on the problem of setting numerical boundary conditions on the surface of a solid body. We applied an approach using a ghost point located inside the solid body near the boundary, outside the computational domain. We obtained new theoretical results for curved boundaries. To generate the artificial turbulent field, we applied a previously developed method of tensor filtering of white noise, adapted to a two-dimensional formulation. We present results of modeling the scattering of a turbulent wake on an elliptical cylinder, demonstrating the formation of pressure waves using this approach.

Keywords: acoustics, synthetic turbulence, difference schemes, dispersion-relation-preserving scheme.

Acknowledgements: the author, affiliated with the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, worked under a government contract.

Cite this article: Aleksandrov A. V., Dorodnitsyn L. V. High-Precision Acoustic Simulation of a Turbulent Flow over a Curved Body. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):17–23.

Original article submitted: 17.10.2025.

Revision submitted: 08.11.2025.

Введение

Расчет акустических полей, возникающих в результате взаимодействия турбулентных следов с препятствиями различного рода, является, с одной стороны, важным для инженерных приложений, а с другой — довольно сложной задачей. Например, широко востребовано моделирование акустических полей, возникающих при взаимодействии турбулентного следа, генерируемого винтом вертолета или двигателем с открытым ротором, с находящимися вниз по потоку элементами конструкции. Расчет таких задач напрямую — без привлечения искусственно генерируемых турбулентных полей — представляется очень дорогостоящим, если в принципе возможным. Другим затрудняющим моделирование фактором является необходимость использования в задачах аэроакустики схем высокой точности, которая достигается за счет широких шаблонов. Применение таких схем, в свою очередь, требует корректной численной постановки граничных условий.

Моделирование взаимодействия турбулентного следа с препятствием проводится в три этапа. Вначале решается газодинамическая задача стационарного обтекания тела, для чего применяется метод установления. Затем в подобласти вверх по потоку от тела задаются турбулентные возмущения скорости. Наконец, решается задача нестационарного обтекания, в ходе которого происходит генерация и распространение акустических возмущений.

В настоящей работе приведена оригинальная методика моделирования акустических полей, генерируемых при обтекании криволинейного тела турбулентным потоком. Для численного моделирования как стационарной, так и основной задачи применялись высокоточные схемы, сохраняющие дисперсионные соотношения [1]. Особенность данных схем заключается в использовании для сохранения дисперсионных характеристик более широкого шаблона, чем это необходимо для четвертого порядка аппроксимации. Применение данных схем в задаче с криволинейной границей потребовало доработки численной постановки граничных условий. Процедура генерации турбулентного следа основана на предложенном ранее авторами методе тензорной фильтрации белого шума [2].

В работе описываются вычислительные алгоритмы и технология генерации синтетического турбулентного поля. На основе предложенной методики выполнен расчет рассеяния турбулентного следа на эллиптическом препятствии.

Вычислительные алгоритмы

Основой газодинамического моделирования служат нелинейные уравнения Эйлера, записанные в квазилинейной форме. В декартовых координатах эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + C_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{U} = (\rho \ u \ v \ p)^T, \quad (1)$$

$$C_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix}, \quad C_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}.$$

Уравнения Эйлера (1) аппроксимируются на равномерной сетке (x_i, y_j) с шагами $(\Delta x, \Delta y)$ разностной схемой

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_x \mathcal{D}_x^h \mathbf{U} + C_y \mathcal{D}_y^h \mathbf{U} = 0.$$

Используется DRP-аппроксимация [1] на 7-точечном шаблоне:

$$\mathcal{D}_x^h u \equiv \frac{1}{\Delta x} [a_1 (u_{i+1} - u_{i-1}) + a_2 (u_{i+2} - u_{i-2}) + a_3 (u_{i+3} - u_{i-3})],$$

$$a_1 = 0.79926643, \quad a_2 = -0.18941314, \quad a_3 = 0.02651995.$$

Ввиду широкого шаблона, DRP-схема вблизи границ области не может задаваться в неизменном виде. Для 7-точечной схемы возникают приграничные полосы шириной в три узла. Иными словами, DRP-схема требует большего числа граничных условий, чем уравнения Эйлера. Условия на внешних границах расчетной области изучались, в частности, в [1, 3]. Для задачи, рассматриваемой в настоящей работе, особо остро стоит вопрос об уравнениях в узлах, прилегающих к твердой стенке обтекаемого тела.

В качестве решения проблемы постановки пристеночных разностных граничных условий лучше других зарекомендовала себя технология «фиктивного узла» (Ghost point) [4]. Она приводит к устойчивым алгоритмам без потери точности в приграничной зоне, в отличие, например, от подхода [5].

Пусть граница твердого тела проходит вдоль прямой $y = 0$. В приграничной полосе (узлы $j = 0, 1, 2$) уравнения Эйлера аппроксимируются с использованием несимметричных шаблонов по y , где коэффициенты выписаны в [1, 4]. Производная давления $\partial p / \partial y$ реализуется на шаблоне с фиктивным узлом ($j = -1, 0, \dots, 5$). Все остальные производные по y – на шаблоне в пределах области ($j = 0, 1, \dots, 6$).

На границе ($j = 0$) вертикальная скорость $v \equiv 0$. Отсюда

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Аппроксимация на 7-точечном шаблоне в узле $j = 0$ определяет значение давления в фиктивной точке $p_{j=-1}$.

Перейдем к схемам в криволинейных координатах. Базовые идеи заложены в работах [6–8]. Связь между декартовыми (x, y) и криволинейными (ξ, η) координатами выражается функциями $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$. Область в криволинейных координатах изоморфна прямоугольнику

$$\xi_0 \leq \xi \leq \Xi, \quad \eta_0 \leq \eta \leq H.$$

При этом граница $\eta = \eta_0$ лежит на поверхности тела.

В процессе построения уравнений участвует матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix},$$

которой отвечает якобиан $\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$. Детальный вывод содержится в [7, 9].

Квазилинейные уравнения Эйлера в криволинейных координатах приобретают вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_\xi \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} + C_\eta \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} = 0, \quad \mathbf{U} = (\rho \ u \ v \ p)^T, \quad (2)$$

$$C_\xi = \xi_x C_x + \xi_y C_y = \begin{pmatrix} u\xi_x + v\xi_y & \rho\xi_x & \rho\xi_y & 0 \\ 0 & u\xi_x + v\xi_y & 0 & \xi_x/\rho \\ 0 & 0 & u\xi_x + v\xi_y & \xi_y/\rho \\ 0 & \gamma p \xi_x & \gamma p \xi_y & u\xi_x + v\xi_y \end{pmatrix},$$

$$C_\eta = \eta_x C_x + \eta_y C_y = \begin{pmatrix} u\eta_x + v\eta_y & \rho\eta_x & \rho\eta_y & 0 \\ 0 & u\eta_x + v\eta_y & 0 & \eta_x/\rho \\ 0 & 0 & u\eta_x + v\eta_y & \eta_y/\rho \\ 0 & \gamma p \eta_x & \gamma p \eta_y & u\eta_x + v\eta_y \end{pmatrix}.$$

Обращаем внимание на то, что вектор неизвестных \mathbf{U} не изменился по сравнению с (1) и компоненты скорости декартовы.

При построении граничных условий введем обозначения для касательной скорости U и поперечной скорости V :

$$U = u\xi_x + v\xi_y, \quad V = u\eta_x + v\eta_y.$$

На твердой стенке скорость направлена по касательной: $V \equiv 0$. Этому соответствует уравнение для давления

$$U\eta_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + U\eta_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0. \quad (3)$$

Для ортогональных координат, которые рассматривались в [6], $\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0$, и в выражении (3) исчезает один член.

Дискретизация уравнений проводится по аналогии со случаем декартовых координат, и давление в фиктивной точке вычисляется из уравнения для $\partial p / \partial \eta$, вытекающего из (3).

Генерация турбулентного поля скоростей

Синтетическая турбулентность — направление, имеющее более чем полувековую историю. Из многочисленных публикаций по этой тематике упомянем [10, 11]. Генерируемое турбулентное поле должно обладать детерминированными и статистическими свойствами, близкими к реальной физике. Важнейшие характеристики перечислены ниже.

1. Поле пульсационных скоростей является бездивергентным (соленоидальным).
2. Основные параметры турбулентности, а также возникающего акустического поля определяет тензор двухточечных пространственных ковариаций скоростей (корреляции второго порядка). Однако для этого тензора нет ни законченной теории, особенно в случае анизотропной турбулентности, ни достаточно полных экспериментальных данных.
3. Необходимо иметь *модельный* тензор, обеспечивающий бездивергентность и количественные характеристики пульсационного поля: тензор турбулентных напряжений Рейнольдса; масштабы турбулентности; энергетический спектр турбулентности.

Для генерации синтетического турбулентного поля в данной работе применяется разновидность метода фильтрации [12, 13]. Строится поле функции тока, ротором которой является пульсационная скорость, в виде свертки поля белого шума с детерминированным ядром. А именно, использовался тензорный метод фильтрации [2] в двумерном (квазитрехмерном) приближении [13].

В двумерном случае функция тока является скалярной $\psi(\mathbf{x}, t)$ и ее статистику описывает корреляция

$$C(\mathbf{r}) \equiv \langle \psi(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

Преобразование Фурье ставит в соответствие $C(\mathbf{r})$ спектральную корреляционную функцию $\hat{C}(\mathbf{k})$.

Настоящая работа опирается на анизотропную модель [14], развитую затем в [2, 13, 15]:

$$\hat{C}(\mathbf{k}) = 2 l_x l_y l_z f(\xi), \quad \xi^2 = l_x^2 k_x^2 + l_y^2 k_y^2. \quad (4)$$

Здесь фигурируют: волновой вектор $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, интегральные масштабы турбулентности l_x, l_y, l_z , изотропная безразмерная спектральная функция $f(\xi)$. В работе использовалась функция Липмана (Lipmann)

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi^2 (1 + \xi^2)^3}.$$

Дискретная двумерная модель [12, 13] белого шума представляет собой регулярную решетку точечных вихрей с центрами

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^{(ij)} = (x_i, y_j), \quad n = 1, \dots, N.$$

Поле функции тока дается формулой

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N G(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n) \Omega^n \sqrt{\Delta_x \Delta_y}. \quad (5)$$

Здесь Δ_x, Δ_y — расстояния между центрами соседних вихрей; случайная величина $\Omega^n = \pm 1$ с вероятностью 1/2. Фактически сумма берется только по вихрям, ближайшим к текущей точке \mathbf{x} .

Скалярное ядро фильтра $G(\mathbf{r})$ с учетом (4) имеет вид:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{g(\zeta)}{\sqrt{l_x l_y l_z}}, \quad g(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{f(\xi)} J_0(\xi \zeta) \xi d\xi, \quad \zeta(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{x^2}{l_x^2} + \frac{y^2}{l_y^2}}, \quad (6)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя 1-го рода индекса 0.

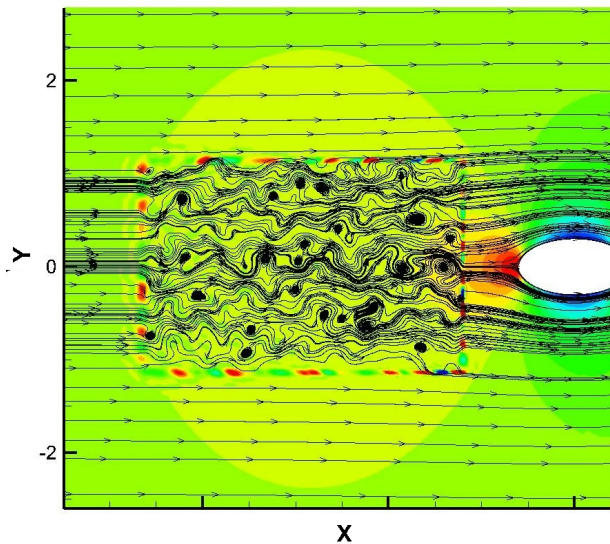


Рис. 1. Искусственное турбулентное поле в первые моменты времени

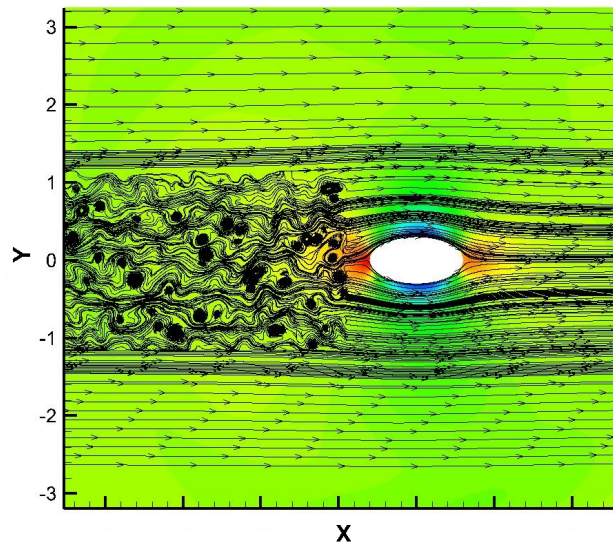


Рис. 2. Искусственное турбулентное поле после ухода нефизических возмущений

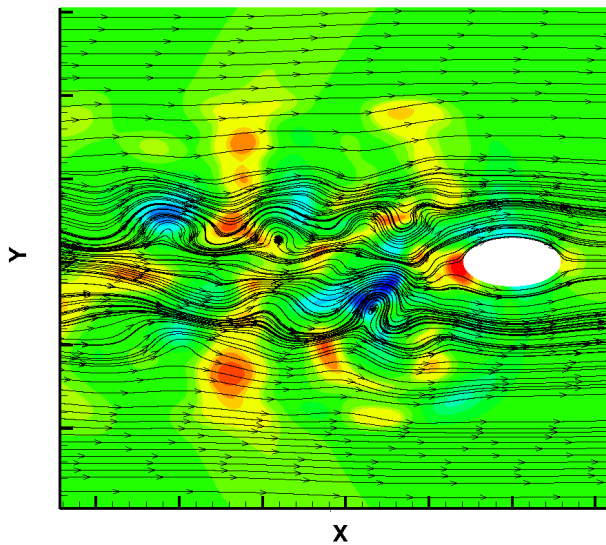


Рис. 3. Искусственное турбулентное поле в первые моменты времени

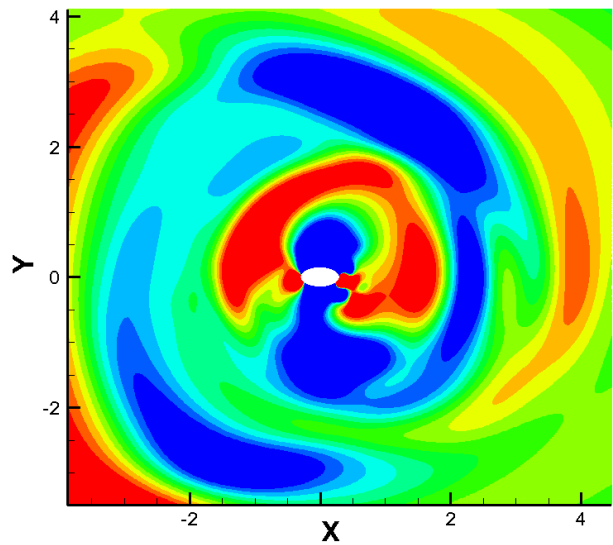


Рис. 4. Искусственное турбулентное поле после ухода нефизических возмущений

Результаты расчетов

Представленная выше методика применялась для моделирования рассеяния искусственно турбулентного поля, имитирующего турбулентный след, на эллиптическом цилиндре в двумерной постановке. Набегающий невозмущенный поток имел число Маха $M = 0.3$. Расчетная область представляла собой пространство между двумя соосными подобными цилиндрами. Полуоси внутреннего эллипса равнялись 0.7 и 0.35 безразмерным единицам, а внешнего — соответственно 300 и 150. Использованная расчетная сетка из 1000×500 узлов по (ξ, η) не являлась ортогональной: косинус угла между сторонами ячейки сетки достигал значения 0.6.

Искусственное турбулентное поле задавалось в прямоугольнике, правая сторона которого находилась на расстоянии 0.5 от границы обтекаемого цилиндра вверх по потоку (рис. 1). В первые моменты времени по периметру области искусственно заданной турбулентности образовывались нефизические возмущения, которые в дальнейшем уходили (рис. 2).

Рисунок 3 демонстрирует возмущенное поле скорости в момент, когда турбулентное пятно достигало цилиндра.

На рисунке 4 приведено поле давления вокруг эллиптического цилиндра после прохождения

турбулентного следа. Заметно образование акустических пульсаций, возникших в результате взаимодействия турбулентного следа с препятствием.

Заключение

Изложена методика моделирования акустических пульсаций, вызванных взаимодействием начального турбулентного следа с препятствием достаточно произвольной формы, имеющим гладкую границу. Теоретической основой алгоритмов является оригинальный метод тензорной фильтрации белого шума для генерации синтетического турбулентного поля скоростей с заданными характеристиками, а также модификация схемы, сохраняющей дисперсионные соотношения, с учетом криволинейных границ твердого тела.

Методика продемонстрировала свою работоспособность на примере моделирования рассеяния турбулентного следа прямоугольных очертаний на препятствии эллиптической формы. Полученные результаты качественно соответствуют физике процесса.

В перспективе предполагается применение данной методики в целях исследования спектральных характеристик шума в дальнем поле, вызванного взаимодействием турбулентного потока с элементами конструкции летательного аппарата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tam C. K. W., Webb J. C. Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics. *J. Comput. Phys.* 1993;107:262–281.
2. Александров А. В., Дородницын Л. В. Прямой тензорный метод фильтрации для генерации синтетических турбулентных полей скорости. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2021;95. 15 с. DOI: 10.20948/prepr-2021-95.
3. Александров А. В., Дородницын Л. В. Использование аэроакустических схем высокой точности на регулярных сетках для моделирования вязких течений. *Матем. моделирование.* 2017;29(1):63–83.
4. Tam C. K. W., Dong Z. Wall Boundary Conditions for High-Order Finite-Difference Schemes in Computational Aeroacoustics. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* 1994;6:303–322.
5. Berland J., Bogey C., Marsden O., Bailly C. High-Order, Low Dispersive and Low Dissipative Explicit Schemes For Multiple-Scale and Boundary Problems. *J. Comput. Phys.* 2007;224:637–662. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.10.017.
6. Tam C. K. W. *Computational Aeroacoustics: A Wave Number Approach.* Cambridge University Press; 2012.
7. Marsden O., Bogey C., Bailly C. High-Order Curvilinear Simulations of Flows Around Non-Cartesian Bodies. *J. Comput. Acoustics.* 2005;13(4):731–748. DOI: 10.1142/S0218396X05002906.
8. Marsden O., Bogey C., Bailly C. Direct Noise Computation around a 3-D NACA 0012 Airfoil. *AIAA 2006-2503.* DOI: 10.2514/6.2006-2503.
9. Александров А. В., Дородницын Л. В. Методика моделирования искусственных турбулентных полей высокоточными схемами на криволинейных сетках в присутствии твердых границ. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2025;20. 20 с. Режим доступа: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-20>.
10. Kraichnan R. Diffusion by a Random Velocity Field. *Phys. Fluids.* 1970;13(1):22–31.
11. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. K., Travin A. K. Synthetic Turbulence Generators for RANS-LES Interfaces in Zonal Simulations of Aerodynamic and Aeroacoustic Problems. *Flow Turbulence Combust.* 2014;93(1):63–92. DOI: 10.1007/s10494-014-9534-8.
12. Gea-Aguilera F., Gill J., Zhang X. Synthetic Turbulence Methods for Computational Aeroacoustic Simulations of Leading Edge Noise. *Comp. Fluids.* 2017;157:240–252. DOI: 10.1016/j.compfluid.2017.08.039.
13. Shen Z., Zhang X. Direct Anisotropic Filter Method of Generating Synthetic Turbulence Applied to Turbulence-Airfoil Interaction Noise Prediction. *J. Sound Vibr.* 2019;458:544–564. DOI: 10.1016/j.jsv.2019.07.003.
14. Kerschen E. J., Gliebe P. R. Noise Caused by The Interaction of a Rotor with Anisotropic Turbulence. *AIAA Journal.* 1981;19:717–723.

-
15. Александров А. В., Дородницын Л. В. Численное моделирование образования отраженных акустических волн при взаимодействии турбулентного следа с прямоугольным профилем. *Прикладная математика и информатика*. 2024;75:52–65.