

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ИСПАРЯЮЩИХСЯ КАПЕЛЬ НА ТВЕРДОЙ ПОДЛОЖКЕ

С. З. Дунин<sup>a</sup>, О. В. Нагорнов<sup>b</sup>, В. П. Трифоненков<sup>c</sup>

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Российская Федерация

<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0005-3588-6889>, [szdunin@gmail.com](mailto:szdunin@gmail.com)

<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1355-788X>, [ovnagornov@mephi.ru](mailto:ovnagornov@mephi.ru)

<sup>c</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0002-8979-964X>, [vp trifonenkov@mephi.ru](mailto:vp trifonenkov@mephi.ru)

*Аннотация:* исследуется спонтанное испарение капель жидкости с горизонтальных подложек в неизотермическом приближении. Получены аналитические выражения для температуры и концентрации пара как функции безразмерных параметров, выраженные через термодинамические параметры подложки, жидкости и пара. Учет температурных поправок позволяет рассчитать силу Марангони, определяющую термокапиллярные течения в капле. Определены значения параметров, при которых немонотонный профиль температур порождает силы Марангони, которые меняют знак, и возникают линии стагнации. Установлены максимальные значения краевых углов, при которых имеются точки стагнации в капле при различных соотношениях теплопроводностей. Определены критические значения коэффициентов теплопроводностей жидкости и подложки, при которых возбуждаются разнонаправленные течения. Проведены сравнения температурных полей с экспериментальными данными. Проведен анализ динамики изменения краевого угла и испарения массы капли.

*Ключевые слова:* испарение капли, сила Марангони, точки стагнации.

*Для цитирования:* Дунин С. З., Нагорнов О. В., Трифоненков В. П. Моделирование температурного поля испаряющихся капель на твердой подложке. *Успехи кибернетики*. 2025;6(4):9–16.

*Поступила в редакцию:* 20.10.2025.

*В окончательном варианте:* 19.11.2025.

## SIMULATION OF THE TEMPERATURE FIELD OF EVAPORATING DROPS ON A SOLID SUBSTRATE

S. Z. Dunin<sup>a</sup>, O. V. Nagornov<sup>b</sup>, V. P. Trifonenkov<sup>c</sup>

National Research Nuclear University MEPHI, Moscow, Russian Federation

<sup>a</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0005-3588-6889>, [szdunin@gmail.com](mailto:szdunin@gmail.com)

<sup>b</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1355-788X>, [ovnagornov@mephi.ru](mailto:ovnagornov@mephi.ru)

<sup>c</sup> ORCID: <http://orcid.org/0009-0002-8979-964X>, [vp trifonenkov@mephi.ru](mailto:vp trifonenkov@mephi.ru)

*Abstract:* we studied the free evaporation of a non-isothermal sessile liquid drop on a horizontal solid substrate. We derived exact expressions for the temperature and vapor-concentration fields as functions of the dimensionless thermodynamic parameters of the drop, the vapor, and the substrate. The non-uniform temperature distribution along the drop surface generates thermocapillary (Marangoni) stresses whose direction changes in the vicinity of stagnation points. We determined the directions of these stresses and the locations of the stagnation points as functions of the contact angle and the thermodynamic parameters of the model. We established the conditions under which stagnation points appear and derived the maximum contact angle at which they can exist. We compared the calculated temperature field with experimental measurements. We also computed the time evolution of the contact angle and the evaporative mass loss of the drop.

*Keywords:* drop evaporation, Marangoni force, stagnation points.

*Cite this article:* Dunin S. Z., Nagornov O. V., Trifonenkov V. P. Simulation of the Temperature Field of Evaporating Drops on a Solid Substrate. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(4):9–16.

*Original article submitted:* 20.10.2025.

*Revision submitted:* 19.11.2025.

### Введение

Анализ испарения капли, находящейся на твердой подложке, представляет интерес для ряда прикладных задач, в которых требуется распределить твердые частицы, растворенные в капле, в заданной геометрии (производство новых электронных и оптических материалов, биохимическое тестирование, DNA/RNA исследования).

Одновременный учет температурных и скоростных полей, сложность математического описания из-за возникающих сингулярностей в плотности потока на краях капли, проблемы численного счета заставляют авторов упрощать модели, учитывая те или иные факторы как определяющие процесс испарения [1–19]. Концентрация насыщенных паров на поверхности капли непостоянна, что приводит к температурной неоднородности вдоль поверхности. Эта неоднородность определяет силы Марангони, влияющие на скоростные потоки в капле, которые, как было показано в [4–8], при наличии растворенного в капле вещества могут выносить его на периферию и в другие части высыхающей капли (наличие стагнационных точек, определяемых силами Марангони). В работах [5–8] экспериментально подтвержден этот вывод и дан количественный критерий направленности конвективных потоков. В ряде работ используется метод конечных элементов для исследования поведения испаряющейся капли.

В данном исследовании получены аналитические выражения для локальных температурных полей и полей концентрации, вычислены интегральные характеристики теплового и массового потока, а также локальные тепловые и массовые потоки с поверхности капли.

### Постановка задачи

Рассмотрим каплю, находящуюся на плоской твердой поверхности. Во время испарения капли краевой угол уменьшается, при этом значительное время область прилипания капли остается неизменной. Начальные параметры капли следующие:  $R$  — радиус контактной линии капли, краевой угол смачивания  $\theta_c$  меньше  $90^\circ$ ,  $h_0$  — высота капли. Для капель небольшого размера из-за малости числа Бонда  $B_0 = \rho g R h_0 / \sigma \sim 0.03\text{--}0.4$  каплю можно считать сферическим сегментом,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения.

Последнюю фазу жизни капли перед ее быстрым исчезновением мы исключим из нашего рассмотрения.

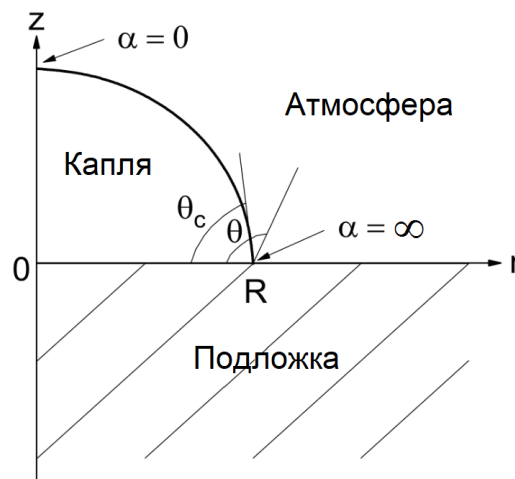


Рис. 1. Сферическая капля на твердой подложке

В силу медленного изменения параметров капли по сравнению с характерным временем распространения тепла в пределах размеров капли ( $t \gg R^2 k_{L,S}^{-1} = t_{L,S}$  — время диффузионного выравнивания поля концентрации и температуры на размере капли радиуса  $R$ ) можно пренебречь временным слагаемым в уравнении теплопроводности и конвективным — из-за малости числа Пекле  $Pe \ll 1$ . Тогда температурное поле в капле  $T_L$  и подложке  $T_S$  можно определить из решения уравнений Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta T_L = 0 \\ \Delta T_S = 0 \end{cases} .$$

В газовой фазе массовая концентрация  $c(\alpha, \theta)$  удовлетворяет стационарному уравнению Лапласа  $\Delta c(\alpha, \theta) = 0$  (считаем газовую фазу неподвижной и пренебрегаем конвективным слагаемым в силу малости числа Пекле  $Pe \ll 1$ ).

Влияние тепловых характеристик подложки и жидкости на массовые и тепловые потоки при спонтанном естественном испарении посаженной капли учитывается через граничные условия (равенство температур и тепловых потоков на границе жидкость — подложка). Предполагается, что основной

тепловой поток, стимулирующий процесс испарения, исходит из подложки (пренебрегаем коэффициентом теплопроводности газа) и поступает к поверхности капли, где благодаря фазовому превращению трансформируется в массовый паровой поток, диффундирующий от поверхности капли (тепловым потоком из газовой фазы пренебрегаем). При выбранной конфигурации капли удобно решать систему уравнений Лапласа для полей концентрации и температур в тороидальной системе координат  $\alpha, \theta$  (рис. 1, границы капли совпадают с  $\theta_c$  — краевым углом капли и  $\theta = 0$ ). Полагаем равенство нулю нормальных производных концентраций в газовой фазе и температур в подложке на их общей границе и равенство температур и тепловых потоков на жидкой границе капли.

Решения для температур и концентрации с указанными граничными условиями на подложках, толщина которых значительно превышает радиус основания капли, можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 T_L(\alpha, \theta) &= T_\infty + \{2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta)\}^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\times \left[ \int_0^\infty d\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} A_s(\tau) \times \frac{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta}{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c} \right], \quad 0 < \theta < \theta_c \\
 c_V(\alpha, \theta) &= c_\infty + \{2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta)\}^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\times \left[ \int_0^\infty d\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} B_D(\tau) \times \frac{\operatorname{ch} \tau(\pi - \theta)}{\operatorname{ch} \tau(\pi - \theta_c)} \right], \quad \theta_c < \theta < \pi, \\
 T_s(\alpha, \theta) &= T_\infty + \{2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta)\}^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\times \left[ \int_0^\infty d\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} A_s(\tau) \times \frac{\operatorname{ch} \tau(\pi - \theta)}{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c} \right], \quad \pi < \theta < 2\pi,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $c_V$  — концентрация пара,  $k_R = k_s/k_L$ ,  $T_\infty$  и  $c_\infty$  — окружающая температура и концентрация пара, соответственно,  $\theta_c$  — краевой угол,  $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$  — функции Лежандра [20], которые можно выразить через гипергеометрические функции Римана и гамма-функцию:

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{(i\tau)}{\sqrt{\pi}(0.5 + i\tau)} (2 \operatorname{ch} \alpha)^{-0.5+i\tau} F\left(\frac{3}{4} - i\tau/4, \frac{1}{4} - i\tau/4, 1 + i\tau; \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha}\right) + KC.$$

Это позволяет нам провести вычисления интегралов в комплексной плоскости  $\tau$ . Распространив интегрирование на всю действительную ось и замыкая контур через бесконечную полуокружность в верхней полуплоскости  $\tau$ , получим ряд по степеням  $(1 - r^2/R^2)^{-m}$ . Наибольший вклад в окрестности края капли вносят полюса, ближайšie к действительной оси (в работах [1, 2] приведен именно этот вклад полюсов  $B_D(\tau)$ ). Полюс гамма-функции, лежащий на действительной оси, определяет температуру и концентрацию пара на краях капли. Ядра  $B_D, A_s$  в интегральных выражениях, определяющие поведение температурных и концентрационных полей в пространстве, определяются из граничных условий на границе капли. Так, считая, что приток тепла к поверхности капли от газовой фазы отсутствует, определяем значения:

$$\begin{aligned}
 L_{jL}(\alpha, \theta_c) \approx q_L(\alpha, \theta_c) L_{jC}(\alpha, \theta_c) &= -L \frac{D}{R} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_c) \frac{d}{d\theta_c} c(\alpha, \theta_c) = \\
 &= -\frac{k_L}{R} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_c) \frac{d}{d\theta_c} T_L(\alpha, \theta_c), \tag{2}
 \end{aligned}$$

где  $L$  — удельная теплота испарения,  $j_L$  — поток массы,  $q_L$  — тепловой поток. Считая, что на всей поверхности капли граничные условия такие же, как в окрестности края капли, получим связь между ядрами интегральных представлений:

$$-LDB_D(\tau) \tan \tau(\pi - \theta_c) = k_L A_s(\tau) (\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c). \tag{3}$$

В квазистационарном режиме испарения на поверхности капли выполнено условие Клапейрона–Клаузиуса, связывающее концентрацию насыщенных паров и температуру в любой точке газовой фазы. Ограничиваясь линейной зависимостью концентрации пара от температуры:

$$A_V(\alpha, \theta_c) - A_{s\infty} = c'_{sT} (T_L(\alpha, \theta_c) - T_\infty), \tag{4}$$

определим ядро  $B_D(\tau)$ , зависящее от параметров жидкости, подложки и газовой фазы:

$$B_D(\tau) = B_D(\tau, \theta_c, k_R, \Gamma) = \hat{B}_D(\tau)(c_{S\infty} - c_\infty),$$

$$\hat{B}_D(\tau) = \left\{ 1 + \Gamma \tan \tau (\pi - \theta_c) \times \frac{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c} \right\}^{-1}, \quad (5)$$

$$\Gamma = c'_{ST} \frac{DL p_{atm}}{k_L p}.$$

Здесь  $c_{S\infty}$  — концентрация насыщенного пара в окружающей среде,  $D$  — коэффициент диффузии,  $p$  — давление. Важно отметить, что в неизотермическом случае ядро зависит как от краевого угла, теплопроводящих свойств жидкости и подложки  $k_L, k_S$ , так и от термодинамических параметров жидкости и газа ( $c'_{ST} = \frac{dc_s}{dT}$ ,  $D$ ,  $L$ ).

Полный поток массы с поверхности капли и изменение краевого угла находим из выражений:

$$-\dot{M}(t) = \frac{Q_L}{L} = J_D(\theta_c) = 4\pi R D (c_{n\infty} - c_\infty) \dot{f}_D(\theta_c)$$

$$\dot{\theta}_c = -\frac{\pi}{\rho R^2} (1 + \cos^2 \theta_c) \dot{f}_D(\theta_c); \quad \dot{f}_D(\theta_c) = \int_0^\infty d\tau \hat{B}_D(\tau) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi}. \quad (6)$$

При  $\Gamma = 0$  значение  $\dot{f}_D(\theta_c)$  с высокой точностью совпадает с широко используемым в литературе выражением для скорости массового потока, приведенным в статье И. О. Попова [14]. Зависимость  $J_D(\theta_c)$  от коэффициента диффузии  $D$  в нашем исследовании нелинейная, что было отмечено в экспериментах [10, 15, 16] с разными газами/подложками и переменным давлением  $p$ . Как видно из формулы (6), массовый поток определяется как характеристиками жидкой и газовой фаз, так и теплопроводящими свойствами подложки.

Из (1)–(5) можно вычислить представляющую интерес среднюю температуру по поверхности капли, то есть параметр, определяющий меру охлаждения капли:

$$\langle T_L(\alpha, \theta_A) \rangle_{S(\theta_A)} = T_\infty - \frac{c_{n\infty}}{c'_{nT}} (1 - H) \left[ 4 \operatorname{ctg} \frac{\theta_c}{2} \int_0^\infty d\tau \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c \operatorname{sh} \tau \theta_A}{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \pi} \operatorname{ch}[\tau(\pi - \theta_A)] \hat{B}_D(\tau) - 1 \right], \quad (7)$$

и температурный профиль вдоль поверхности капли:

$$T_L(\alpha, \theta_A) - T_\infty =$$

$$= \frac{c_{n\infty}}{c'_{nT}} (1 - H) \left[ -1 + \{2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_A)\}^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty d\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} \operatorname{ch}[\tau(\pi - \theta_A)] \hat{B}_D(\tau) \right]. \quad (8)$$

Тогда находим уравнение для температуры на краю капли:

$$\Delta T = \frac{T_L(\infty, \theta_c) - T_\infty}{\frac{c_{S\infty}}{c'_{ST}} (1 - H)} = \Gamma_{atm} \frac{p_{atm}}{p} \times \frac{(1 - \frac{\theta_c}{\pi})}{k_R + \frac{\theta_c}{\pi} + \Gamma_{atm} \frac{p_{atm}}{p} (1 - \frac{\theta_c}{\pi})}, \quad \left( \frac{c_{S\infty}}{c'_{ST}} \right)^{-1} = \frac{\mu L}{RT_\infty^2}. \quad (9)$$

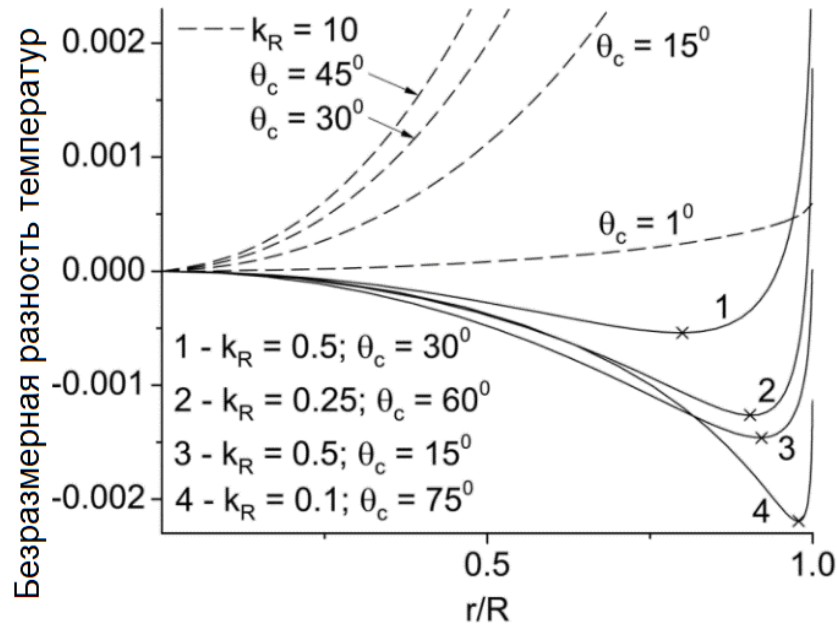
Силу Марангони в любой точке поверхности капли можно вычислить через градиент температуры вдоль поверхности капли:

$$F_M(\alpha, \theta_c) = \nabla_\tau \sigma(\alpha, \theta_c) = \sigma'_T \nabla_\tau T_L(\alpha, \theta_A) = \frac{\sigma'_T}{R} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_A) \frac{d}{d\alpha} T_L(\alpha, \theta_A), \quad \sigma'_T = \frac{d\sigma}{dT}. \quad (10)$$

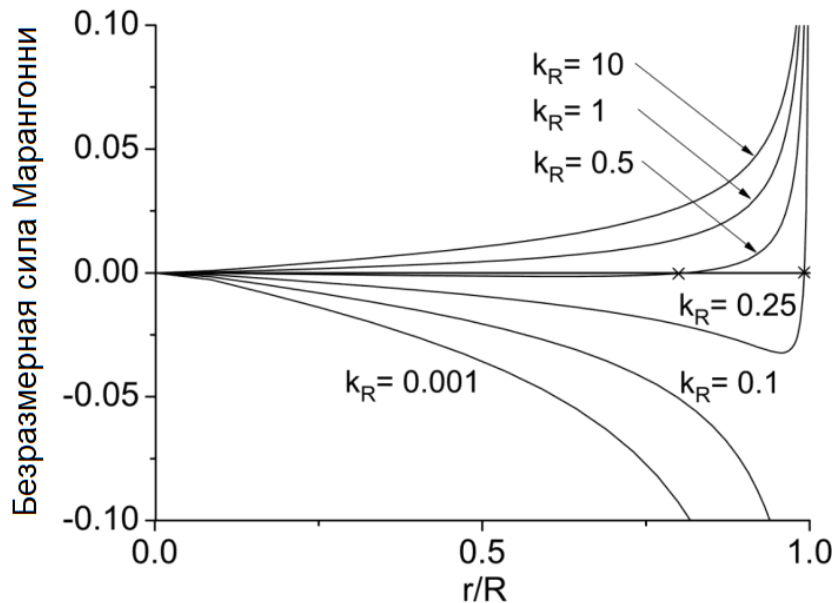
### Результаты и анализ

На основании полученных соотношений проанализируем особенности температурного поля капли, а также силы Марангони, точки стагнации и динамику массы испаряющейся капли. Аналитические решения для испаряющихся капель на подложке рассматривались ранее в [11–13, 21]. Температура на краю капли не зависит от радиуса капли и при больших  $k_R$  стремится к 0 по закону обратной пропорциональности. Для подложек с высокой теплопроводностью (из алюминия, золота, меди, кремния) температура края капли близка к температуре окружающей каплю атмосферы (базовая модель в терминологии [17]). Экспериментальные данные измерений разности температуры на краю капли

на подложках из материалов ПТФЕ, Масог и золота и окружающего газа при атмосферном давлении ( $T_{ambient} - T_S \approx 1.3^\circ C$ ) [17] согласуются с нашими результатами для воды в атмосфере ненасыщенного воздуха  $\Gamma_{ref} \approx 0.11$ ,  $c_{s\infty} c'_{sT}^{-1} = 17.3^\circ C$  при  $H=0.55$  на ПТФЕ, при  $\theta_c = 30^\circ$ :  $\Delta T_{PTFE} \approx 1.3 C^0$ ,  $\Delta T_{Al} \approx 0$ . Наши результаты показывают не только правильный тренд, но и хорошее численное совпадение с экспериментальными данными. Расчеты показывают, что для спонтанно испаряющейся капли по мере уменьшения краевого угла температура в вершине капли при определенных условиях может быть выше, чем на краях капли. На рис. 2 показана зависимость безразмерной разности температур произвольной точки поверхности капли и в ее вершине для различных подложек и контактных углов.



**Рис. 2.** Безразмерная разность температур вдоль поверхности капли для различных подложек и краевых углов



**Рис. 3.** Безразмерная сила Марангони вдоль поверхности капли для различных подложек и краевых углов

По мере уменьшения контактного угла температура меняется монотонно (увеличивается к краю капли) при  $k_R \geq k_c = 0.57$  и становится немонотонной при  $k_R \leq 0.57$ . В точках стагнации (отмечены крестом), в которых температура достигает минимума, сила Марангони меняет направление (безраз-

мерная сила Марангони приведена на рис. 3). Экспериментально эффекты охлаждения каплей исследовались в [22]. Изменение направления силы Марангони зависит от краевого угла. Это ранее было отмечено в работах [2, 6].

Точки стагнации, где температура достигает минимума, сдвигаются к краю капли при уменьшении краевого угла. Около этих точек направление сил Марангони изменяется, и можно ожидать существование течений в противоположных направлениях. Направления сил и положение точек стагнации являются функциями краевого угла и термодинамических параметров модели.

Сравнение результатов с экспериментальными данными для испарения водной капли демонстрирует хорошее согласие (рис. 4;  $\theta_c = 67^\circ\text{C}$  и  $\Gamma = 0.37$ ; кривые 1–3 соответствуют разным температурам, кривая 4 получена для базовой модели [17], квадраты — экспериментальные данные [17]). При низких давлениях наша модель работает хуже.

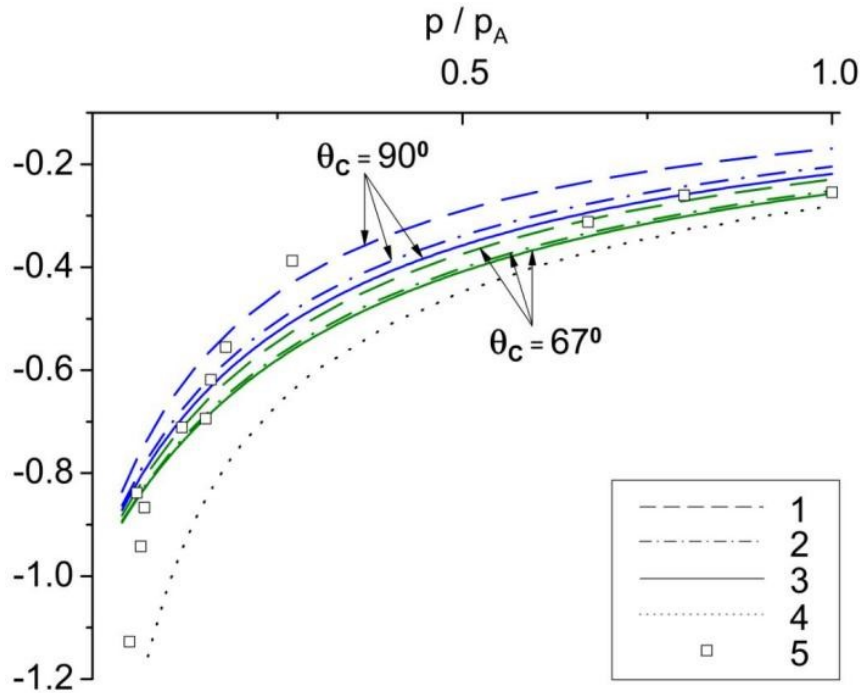


Рис. 4. Разница температур капли и окружающей среды при различных давлениях пара

Разграничение областей монотонного и немонотонного поведения температуры показано на рис. 5 (при нормальных условиях).

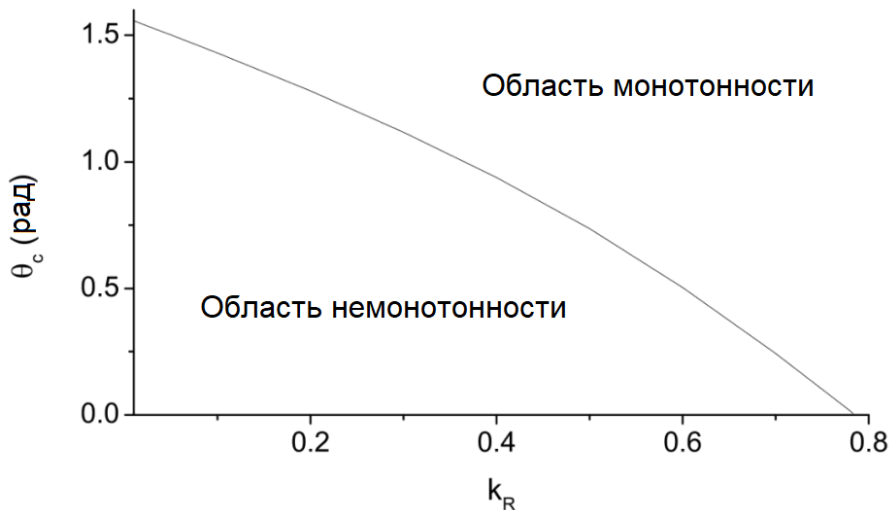


Рис. 5. Разделение областей монотонности и немонотонности температурного профиля

Влияние теплопроводности подложки на геометрию капли и динамика массы капли показаны на рис. 6. Увеличение времени жизни капли на подложках с более низкой проводимостью также отмечалось в [13, 23].

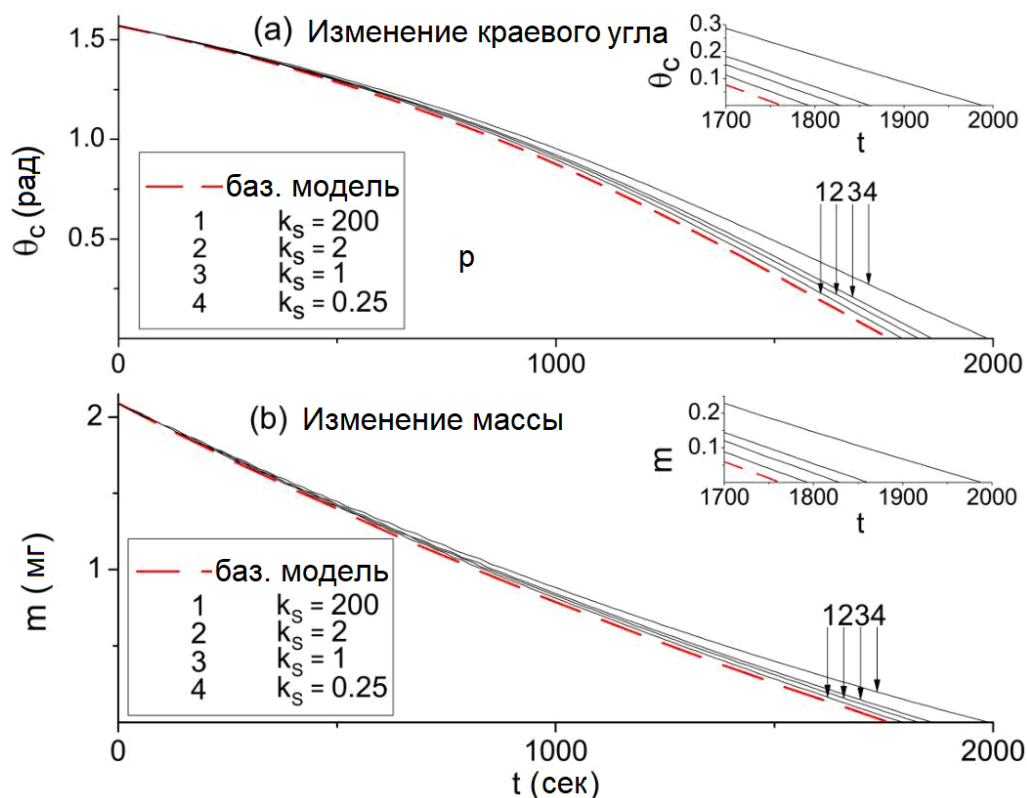


Рис. 6. Динамика критических краевых углов и динамика массы капли ( $\Gamma=0.11$ ,  $R=1$  мм)

### Заключение

Получены аналитические выражения для температуры и концентрации пара для испарения покоящейся капли с закрепленной линией контакта, учитывающие теплопроводящие свойства подложки и жидкости и термодинамические параметры газовой фазы. Исследовано влияние краевого угла и термодинамических параметров на положение точек стагнации, изучена зависимость изменения направления силы Марангони от краевого угла и значений теплопроводностей капли и подложки. Определено критическое значение параметра  $k_c$ , при котором поведение системы меняется. Для  $k_R \geq k_c = 0.57$  температура на поверхности капли монотонная и температура вершины ниже, чем температура рядом с линией контакта. В этом случае возможно формирование течения, направленного к центру около подложки и к краю капли около поверхности капли. Температура на поверхности капли немонотонна при  $k_R \leq k_c$ , что приводит к возникновению точек стагнации, в которых сила Марангони меняет свое направление. Из-за этого формируются противоположно направленные течения. Положение точек стагнации зависит от свойств материалов жидкости и подложки и от краевого угла. При уменьшении краевого угла линии стагнации перемещаются к краям капли. Изменение направления силы Марангони в зависимости от краевого угла ранее отмечалось в работах [2, 6].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Deegan R. D., Bakajin O. T., Dupont F., Huber G., Nagel S. R., Witten T. A. Capillary Flow as the Cause of Ring Stains From Dried Liquid Drops. *Nature*. 1997;389:827–829.
2. Deegan R. D., Bakajin O., Dupont T. F., Huber G., Nagel S. R., Witten T. A. Contact Line Deposits in an Evaporating Drop. *Phys. Rev. E*. 2000;62:756–765.
3. Deegan R. D. Pattern Formation in Drying Drops. *Phys. Rev. E*. 1998;61:475–485.
4. Ristenpart W. D., Kim P. G., Domingues C., Wan J., Stone H. A. Influence of Substrate Conductivity on Circulation Reversal in Evaporating Drops. *Phys. Rev. Lett.* 2007;99:234502.

5. Hu H., Larson R. G. Analysis of the Effects of Marangoni Stresses on the Microflow in an Evaporating Sessile Droplet. *Langmuir*. 2005;21:3972–3980.
6. Hu H., Larson R. G. Evaporation of a Sessile Droplet on a Substrate. *J. Phys. Chem. B*. 2002;106:1334–1344.
7. Hu H., Larson R. G. Analysis of the Micro Fluid Flow in an Evaporating Sessile Droplet. *Langmuir*. 2005;21:3963–3971.
8. Hu H., Larson R. G. Marangoni Effect Reverses Coffee-Ring Depositions. *J. Phys. Chem. B*. 2006;110(14):7090–7094.
9. Watanabe T. Simulation of Surface Flows on a Droplet in an Oscillating Pressure Field. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2011;8(5):1398–1405.
10. Torfi S., Nejad S. Droplet Simulation, a Case Study: Evaporation. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*. 2011;3(6):192–197.
11. Nagornov O. V., Starostin N. V. Influence of Substrate Properties on Evaporation of the Sessile Drop. *Advances in Engineering Mechanics and Materials*. 2014;98–100.
12. Nagornov O. V., Starostin N. V. Influence of Properties of Liquid and Substrate on Evaporation of the Sessile Drop. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*. 2014;9(1):221–225.
13. Dunin S. Z., Nagornov O. V., Starostin N. V., Trifonenkov V. P. Analytical Solution for Evaporating Sessile Drops on Solid Substrates. *Recent Advances in Applied Mathematics, Modelling and Simulation*. 2014;252–255.
14. Popov Y. O. Evaporative Deposition Patterns: Spatial Dimensions of the Deposit. *Phys. Rev. E*. 2005;71:036313.
15. Dunn G. J., Wilson S. K., Duffy B. R., David S., Sefiane K. The Strong Influence of Substrate Conductivity on Droplet Evaporation. *J. Fluid Mech*. 2009;623:329–351.
16. Sefiane K., Wilson S. K., David S., Dunn G. J., Duffy B. R. On the Effect of the Atmosphere on the Evaporation of Sessile Droplet of Water. *Phys. Fluids*. 2009;21:062101.
17. David S., Sefiane K., Tadrist L. Experimental Investigation of the Effect of Thermal Properties of the Substrate in the Wetting and Evaporation of Sessile Drops. *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*. 2007;298:108–114.
18. Semenov S., Starov V. M., Rubio R. G., Agogo H., Velarde M. G. Evaporation of Sessile Water Droplets: Universal Behaviour in Presence of Contact Angle Hysteresis. *Colloids Surf. Aspects*. 2011;391:135–144.
19. Saada M. A., Chikh S., Tadrist L. Evaporation of a Sessile Drop With Pinned or Receding Contact Line on a Substrate With Different Thermophysical Properties. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2013;58:197–208.
20. Lebedev N. N. *Special Functions and Their Applications*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ. 1965:227–230.
21. Gossali G. E., Tonini S. Analytical Solutions for Modelling the Evaporation of Sessile Drops. *Applied Mathematical Modelling*. 2023;114:61–77.
22. Emelyanenko K. A., Emelyanenko A. M., Boinovich L. B. Supercooling of Evaporating Water Droplets on Superhydrophobic Surface at Low Temperatures. *Colloid Journal*. 2025;87(4):481–491.
23. Schofield F., Pritchard D., Wilson S. K., Sefiane K. The Lifetimes of Evaporating Sessile Droplets of Water Can Be Strongly Influenced by Thermal Effects. *Fluids*. 2021;6(4):141.