О НАРУШЕНИИ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА

В. П. Кощеев
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), филиал «Стрела», г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760, ✍ koshcheev1@yandex.ru

Аннотация: показано, что если при переходе к новой системе координат определитель Якоби равен нулю, то имеет место нарушение инвариантности уравнения Эйлера–Лагранжа.

Ключевые слова: уравнение Эйлера–Лагранжа, уравнение Гамильтона–Якоби, уравнение Гамильтона, дифференциальные формы, нарушение инвариантности.

Для цитирования: Кощеев В. П. О нарушении инвариантности уравнения Эйлера–Лагранжа. *Успехи кибернетики*. 2025;6(3):70–71.

Поступила в редакцию: 16.08.2025. *В окончательном варианте: 17.09.2025.*

VIOLATION OF THE INVARIANCE OF THE EULER–LAGRANGE EQUATION

V. P. Koshcheev
Moscow Aviation Institute (National Research University), Strela branch, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760, ✍ koshcheev1@yandex.ru

Abstract: we showed that if, during the transition to a new coordinate system, the Jacobi determinant equals zero, so the invariance of the Euler–Lagrange equation is violated.

Keywords: Euler–Lagrange equation, Hamilton–Jacobi equation, Hamilton equation, differential forms, violation of invariance.

Cite this article: Koshcheev V. P. Violation of the Invariance of the Euler–Lagrange Equation. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(3):70–71.

Original article submitted: 16.08.2025. *Revision submitted: 17.09.2025.*

Инвариантность уравнения Эйлера была доказана в [1] с помощью вариационной производной и сформулирована как свойство кривой быть (или не быть) экстремалью независимо от выбора системы координат. С помощью [2] покажем, что если при переходе к новой системе координат определитель Якоби равен нулю, то имеет место нарушение инвариантности уравнения Эйлера–Лагранжа.

Классическое действие для динамической системы с одной степенью свободы запишем в виде определенного интеграла с переменным верхним пределом

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} L(t',q(t'),\frac{dq(t')}{dt'})dt'. \tag{1}$$

Тогда

$$dS = L\left(t',q(t'),\frac{dq(t')}{dt'}\right)dt'\bigg|_{t'=t} = L(t,q,\dot{q})dt, \tag{2}$$

где $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$.

Построим дифференциал второго порядка

$$ddS = \left(\frac{\partial L}{\partial t}dt + \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q}\right) \wedge dt. \tag{3}$$

Так как $dt \wedge dt = 0$ и $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dq\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q}$, то

$$d\left(dS - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dq\right) = \left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q}\right)dq \wedge dt. \tag{4}$$

Видно, что

$$d\left(dS - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dq\right) = 0. \tag{5}$$

Дифференциальная 1-форма удовлетворяет лемме Пуанкаре, когда правая часть равенства (4) равна нулю:

$$\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\frac{\partial L}{\partial q}\right) dq \wedge dt = 0. \tag{6}$$

Тогда из формулы (6) получим уравнение Эйлера–Лагранжа

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\frac{\partial L}{\partial q} = 0, \tag{7}$$

так как $dq \wedge dt \neq 0$.

При переходе к новой системе координат

$$\begin{cases} q = q(u,v) \\ t = t(u,v) \end{cases} \tag{8}$$

Формула (6) преобразуется к виду

$$\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\frac{\partial L}{\partial q}\right)\Bigg|_{\begin{cases} t = t(u,v) \\ q = q(u,v) \end{cases}} \det\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} \end{pmatrix} du \wedge dv = 0, \tag{9}$$

так как

$$dq \wedge dt = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} \end{pmatrix} du \wedge dv, \tag{10}$$

где $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} \end{pmatrix}$ — определитель Якоби.

Видно, что уравнение Эйлера–Лагранжа не является инвариантным при переходе к новой системе координат, когда определитель Якоби равен нулю. Рассмотрим, например, отображение Арнольда [3]

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 - x_2^2 + a x_1 \\ y_2 &= 2x_1x_2 - a x_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где a — параметр.

В [3] было показано, что на плоскости (x_1,x_2) определитель Якоби равен нулю на окружности

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{a^2}{4}. \tag{12}$$

Отображение этой окружности на плоскости (y_1,y_2) приводит к гипоциклоиде с тремя остриями [3], в окрестности которых производная испытывает скачок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В. *Вариационное исчисление*. М.: Физматгиз; 1961. 228 с.
2. Кощеев В. П. К задаче построения уравнения Эйлера–Лагранжа с помощью леммы Пуанкаре. *Успехи кибернетики*. 2025;6(2):40–43.
3. Арнольд В. И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры? *Успехи физических наук*. 1999;169(12):1311–1323.