

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ НА ЭКСТРЕМАЛЯХ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА

В. П. Кошчев

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), филиал «Стрела», г. Жуковский, Московская обл., Российская Федерация✉ *koshcheev1@yandex.ru*

Аннотация: ранее было показано, что с помощью уравнения Якоби может быть построена цепочка замкнутых систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих эволюцию моментов. Показано, что определители Вронского для фундаментальных матриц замкнутых систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка являются интегралами движения на экстремалиях уравнения Эйлера–Лагранжа.

Ключевые слова: уравнение Эйлера–Лагранжа, уравнение Якоби, цепочка замкнутых систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, интегралы движения на экстремалиях.

Для цитирования: Кошчев В. П. Интегралы движения на экстремалиях уравнения Эйлера–Лагранжа. *Успехи кибернетики.* 2025;6(3):17–19.

Поступила в редакцию: 11.07.2025.

В окончательном варианте: 01.09.2025.

INTEGRALS OF MOTION ON THE EXTREMA OF THE EULER–LAGRANGE EQUATION

V. P. Koshcheev

Moscow Aviation Institute (National Research University), Strela Branch, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation✉ *koshcheev1@yandex.ru*

Abstract: it was previously shown that a chain of closed systems of first-order ordinary differential equations describing the evolution of moments can be constructed using the Jacobi equation. The Wronskians for the fundamental matrices of these closed systems are integrals of motion along the extremals of the Euler–Lagrange equation.

Keywords: Euler–Lagrange equation, Jacobi equation, chain of closed systems of ordinary differential equations of the first order, integrals of motion on extremals.

Cite this article: Koshcheev V. P. Integrals of Motion on the Extrema of the Euler–Lagrange Equation. *Russian Journal of Cybernetics.* 2025;6(3):17–19.

Original article submitted: 11.07.2025.

Revision submitted: 01.09.2025.

В [1] было показано, что с помощью уравнения Якоби может быть построена цепочка замкнутых систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих эволюцию моментов.

Пусть нам дано уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (1)$$

где $L = L(t, x, \dot{x})$ — функция Лагранжа; $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Следуя [2], запишем

$$L(t, x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) = L(t, x, \dot{x}) + \delta L, \quad (2)$$

$$\text{где } \delta L = \left[\frac{d}{d\alpha} L(t, x + \alpha \delta x, \dot{x} + \alpha \delta \dot{x}) \right]_{\alpha=0} = \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}.$$

Подставим (2) в (1) и получим уравнение Якоби

$$\frac{\partial \delta L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \delta L}{\partial \dot{x}} = 0,$$

которое записывают в виде [2]

$$\left(L_{xx} - \frac{dL_{x\dot{x}}}{dt} \right) \delta x - \frac{d}{dt} (L_{\dot{x}\dot{x}} \delta \dot{x}) = 0. \quad (3)$$

Если $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x, t)$, то уравнения Эйлера–Лагранжа и Якоби имеют вид соответственно

$$U_x + m\ddot{x} = 0, \quad (4)$$

$$U_{xx}\delta x + m\delta\ddot{x} = 0. \quad (5)$$

Видно, что с помощью уравнения Якоби (5) могут быть построены замкнутые системы дифференциальных уравнений первого порядка для трех новых динамических переменных

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \overline{\delta x^2} \\ \overline{\delta x \delta \dot{x}} \\ \overline{\delta \dot{x}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\frac{U_{xx}}{m} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2U_{xx}}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\delta x^2} \\ \overline{\delta x \delta \dot{x}} \\ \overline{\delta \dot{x}^2} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\overline{\delta x^2} = (\delta x)^2$; $\overline{\delta \dot{x}^2} = (\delta \dot{x})^2$; $\overline{\delta x \delta \dot{x}} = (\delta x \delta \dot{x})$.

Рекуррентная формула имеет вид

$$\frac{d}{dt} \overline{\delta x^k \delta \dot{x}^s} = -s \frac{U_{xx}}{m} \overline{\delta x^{k+1} \delta \dot{x}^{s-1}} + k \overline{\delta x^{k-1} \delta \dot{x}^{s+1}}, \quad k + s = n. \quad (7)$$

Если $m\delta\dot{x} = \delta p_x$, то система уравнений (6) с точностью до обозначений совпадает с системой уравнений для средних квадратов квантовых флуктуаций координаты и импульса [3]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \overline{\delta \hat{x}^2} = \frac{2}{m} \overline{\delta \hat{x} \delta \hat{p}_x} \\ \frac{d}{dt} \overline{\delta \hat{x} \delta \hat{p}_x} = \frac{1}{m} \overline{\delta \hat{p}_x^2} - U_{xx} \overline{\delta \hat{x}^2} \\ \frac{d}{dt} \overline{\delta \hat{p}_x^2} = -2U_{xx} \overline{\delta \hat{x} \delta \hat{p}_x}, \end{cases} \quad (8)$$

начальные условия к которой удовлетворяют соотношениям неопределенностей Гейзенберга

$$\begin{aligned} \overline{(\delta \hat{x} \delta \hat{p}_x)^2} \Big|_{t=0} &\leq \overline{(\delta \hat{x}^2)} \Big|_{t=0} \cdot \overline{(\delta \hat{p}_x^2)} \Big|_{t=0}, \\ \overline{(\delta \hat{x}^2)} \Big|_{t=0} \cdot \overline{(\delta \hat{p}_x^2)} \Big|_{t=0} &\geq \frac{\hbar^2}{4}. \end{aligned} \quad (9)$$

Системы дифференциальных уравнений (6)–(7) можно записать в виде [4]

$$\frac{dW}{dt} = AW, \quad (10)$$

где W — фундаментальная матрица решений, а A — матрица коэффициентов при неизвестных.

С помощью тождества Якоби [4] можно установить зависимость между определителем Вронского в начальный и конечный моменты времени

$$|W(t)| = |W(t_0)| \exp \left(\int_{t_0}^t Sp A dt \right), \quad (11)$$

где $Sp A = 0$ — сумма диагональных элементов фундаментальных матриц дифференциальных уравнений (6)–(8) при $n = 2, 3, \dots$ равна нулю.

Таким образом, определители Вронского для фундаментальных матриц дифференциальных уравнений (6)–(8) являются интегралами движения на экстремальных уравнения Эйлера–Лагранжа (4).

Построим уравнение Лиувилля для уравнения Якоби (5)

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \delta \dot{x} \frac{\partial P}{\partial \delta x} - \frac{U_{xx}}{m} \delta x \frac{\partial P}{\partial \delta \dot{x}} = 0. \quad (12)$$

Решением этого уравнения является функция распределения флуктуаций координаты и скорости

$$P(\delta x, \delta \dot{x}, t) = \frac{1}{2\pi \cdot \Delta} \cdot \exp \left[-\frac{(\delta \dot{x})^2 \overline{\delta x^2} + (\delta x)^2 \overline{\delta \dot{x}^2} - 2(\delta x \delta \dot{x}) \overline{\delta x \delta \dot{x}}}{2\Delta^2} \right], \quad (13)$$

где $\Delta^2 = \overline{\delta x^2 \delta \dot{x}^2} - \overline{\delta x \delta \dot{x}}^2$, если вторые моменты $\overline{\delta x^2}$; $\overline{\delta \dot{x}^2}$; $\overline{\delta x \delta \dot{x}}$ удовлетворяют системе уравнений (6).

С помощью системы уравнений (6) можно показать, что

$$\frac{d\Delta^2}{dt} = 0. \quad (14)$$

Система уравнений (9) с точностью до обозначений совпадает с системой уравнений для средних квадратов квантовых флуктуаций координаты и импульса [3, 4]. Так как из формулы (10) следует $\Delta^2(t) = const$, то для волновых функций, минимизирующих соотношение неопределенностей Гейзенберга, получим

$$\left(\overline{\delta \hat{x}^2}\right) \left(\overline{\delta \hat{p}_x^2}\right) - \left(\overline{\delta \hat{x} \delta \hat{p}_x}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (15)$$

Таким образом, функция распределения (13) локализована в окрестности классической траектории, размер которой — в фазовом пространстве порядка постоянной Планка. Уравнение (15) определяет предельно малое значение эмиттанса пучка заряженных частиц $\sim \hbar$, что имеет важное значение в ускорительной технике [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошечев В. П. Классические и квантовомеханические поправки к решению уравнения Эйлера–Лагранжа. *Успехи кибернетики*. 2025;6(2):44–46.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. *Вариационное исчисление*. Москва: Физматгиз; 1961.
3. Багров В. Г., Белов В. В., Кондратьева М. Ф. Квазиклассическое приближение в квантовой механике. Новый подход. *Теоретическая и математическая физика*. 1994;98(1):48–55.
4. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. Москва: Наука; 1966.
5. Левичев Е. Б. Накопители электронов с малым эмиттансом. *Успехи физических наук*. 2018;188(1): 31–54.