ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СТРУКТУРЫ ФИБОНАЧЧИ

Г. Е. Деев[1,а], **С. В. Ермаков**[1,б], **S. Starkloff**[2,в]
[1] *Обнинский институт атомной энергетики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Обнинск, Российская Федерация*
[2] *Базельский университет, г. Базель, Швейцария*
[а] ✍ *georgdeo@mail.ru*, [б] *ermakov@iate.obninsk.ru* [в] *s.starkloff@stud.unibas.ch*,

Аннотация: показано, что решение линейного разностного уравнения любого порядка может быть записано с помощью структуры Фибоначчи, определение которой дается по ходу изложения. Структура Фибоначчи представляет интерес сама по себе. Она состоит из последовательностей чисел, родственных хорошо известным числам Фибоначчи. С каждой такой последовательностью связано число Фидия. В статье приведены некоторые результаты относительно свойств структуры Фибоначчи и чисел Фидия.

Ключевые слова: разностные уравнения, числа Фибоначчи, числа Фидия.
Для цитирования: Деев Г. Е., Ермаков С. В., Starkloff S. Линейные разностные уравнения и структуры Фибоначчи. *Успехи кибернетики*. 2025;6(2):60–66.
Поступила в редакцию: 16.05.2025. *В окончательном варианте: 02.06.2025.*

LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS AND FIBONACCI STRUCTURES

G. E. Deev[1,a], **S. V. Ermakov**[1,b], **S. Starkloff**[2,c]
[1] *Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering, National Research Nuclear University MEPhI, Obninsk, Russian Federation*
[2] *University of Basel, Basel, Switzerland*
[a] ✍ *georgdeo@mail.ru*, [b] *ermakov@iate.obninsk.ru* [c] *s.starkloff@stud.unibas.ch*

Abstract: we studied the solution of linear difference equations of arbitrary order and demonstrated that they can be expressed using the Fibonacci structure, which we defined in the course of our presentation. This structure, which consists of number sequences related to the classical Fibonacci numbers, is of independent interest. Each sequence in the structure has an associated Phidias number. In this paper, we present several results on the properties of the Fibonacci structure and Phidias numbers.

Keywords: difference equations, Fibonacci numbers, Phidias numbers.
Cite this article: Deev G. E., Ermakov S. V., Starkloff S. Linear Difference Equations and Fibonacci Structures. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(2):60–66.
Original article submitted: 16.05.2025. *Revision submitted: 02.06.2025.*

Постановка задачи

Сеточная функция $y_i = y(x_i)$, $i \in Z = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, определенная на сетке $\omega = \{x | x = x_i,\ x_i = x_0 + i,\ i \in Z\}$, удовлетворяет уравнению

$$y_{n+k} = a_{k-1}y_{n+k-1} + ... + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n + f_n, \quad n \in Z \tag{1}$$

и начальным условиям

$$y_0 = \bar{y}_0, \quad y_1 = \bar{y}_1, ..., y_{k-1} = \bar{y}_{k-1}, \tag{2}$$

где $\bar{y}_0, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_{k-1}$ — известные числа; f_n — известная функция аргумента n.

Задача состоит в нахождении y_n для всех n [1–4].

Решение задачи

Используя известный прием [4, 6], запишем задачу в векторно-матричном виде:

$$\begin{cases} \vec{y}_{n+1} = A\vec{y}_n + \vec{f}_n, \quad (n \in Z) & (1) \\ \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} \bar{y}_{k-1} \\ \vdots \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_0 \end{pmatrix}, & (2) \end{cases}$$

где

$$\vec{y}_n = \begin{pmatrix} y_{n+k-1} \\ \dots \\ y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix}_{k\times 1}, \quad \vec{f}_n = \begin{pmatrix} f_n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}_{k\times 1}, \quad A = A(k) = \begin{pmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k\times k}. \tag{3}$$

Из равенства (1) вытекает

$$\vec{y}_n = A^n \cdot \vec{y}_0 + \sum_{i=0}^{i=n-1} A^{n-1-i} \cdot \vec{f}_i, \tag{4}$$

откуда видно, что для нахождения решения надо знать степени матрицы A.

Параметр k определяет порядок разностного уравнения. Как устроены степени матрицы A для различных значений k, мы понимаем после разбора случаев $k = 2$ и $k = 3$. Поэтому опишем устройство матрицы $\overset{n}{A}(k)$ для произвольных k и запишем решение задачи (1)–(3).

Степени матрицы $A(k)$

То, как устроены степени матрицы $A^n(k)$ $(n = 0,1,2,\dots)$ [5], становится понятно после разбора простых случаев, например, $k = 2$ и $k = 3$. Наблюдается интересная особенность, состоящая в том, что для описания степеней матрицы в полном объеме (т.е. чтобы знать все ее элементы) достаточно знать только верхние угловые элементы b_{11} как самой матрицы $A^n(k)$, так и некоторых ее предыдущих степеней. Причем все эти элементы устроены по принципу подобия и, следовательно, достаточно иметь представление хотя бы об одном из них, чтобы написать все остальные. Но мы имеем представление об элементе $\overset{n}{b}_{11}(k)$, имеем точную формулу, его описывающую. Для случаев $k = 2$ и $k = 3$ эти формулы таковы.

Случай $k = 2$:

$$\overset{n}{b}_{11} = \overset{n}{b}_{11}(2) = \sum_{\substack{\nu_1 \ge 0, \nu_2 \ge 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 = n}} \frac{(\nu_1 + \nu_2)!}{\nu_1! \cdot \nu_2!} \cdot a_1^{\nu_1} \cdot a_0^{\nu_2}. \tag{1}$$

Случай $k = 3$:

$$\overset{n}{b}_{11} = \overset{n}{b}_{11}(3) = \sum_{\substack{\nu_1 \ge 0, \nu_2 \ge 0, \nu_3 \ge 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 = n}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \nu_3!} \cdot a_2^{\nu_1} \cdot a_1^{\nu_2} \cdot a_0^{\nu_3}. \tag{2}$$

На случай произвольного k эти формулы обобщаются:

$$\overset{n}{\underset{11}{b}} = \overset{n}{\underset{11}{b}}(k) = \sum_{\substack{\nu_1 \ge 0, \dots, \nu_k \ge 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + k\nu_k = n}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \dots \cdot \nu_k!} \cdot a_{k-1}^{\nu_1} \cdot a_{k-2}^{\nu_2} \cdot \dots \cdot a_1^{\nu_{k-1}} \cdot a_0^{\nu_k}. \tag{3}$$

В этой формуле n принимает все целые значения, начиная с нуля: $n = 0,1,2,\dots$, а $k = 2,3,\dots$. В дальнейшем эти значения будут дополнены. Доказательство формулы (4) проводится по индукции. Далее выясняется, что по элементам типа b_{11} могут быть расписаны все элементы первой строки матрицы $A^n(k)$ по приведенной далее схеме (5).

Используя эту схему, пишем первую строку матрицы (для лучшего зрительного восприятия элементы строки заключены в скобки):

$$\left\{\overset{n}{b}_{11} = \overset{n-1}{b_{11}} \cdot a_{k-1} + \overset{n-2}{b_{11}} \cdot a_{k-2} + \dots + \overset{n-(k-1)}{b_{11}} \cdot a_1 + \overset{n-k}{b_{11}} \cdot a_0\right\} \dots \left\{\overset{n}{b}_{1,k-1} = \overset{n-1}{b_{11}} \cdot a_1 + \overset{n-2}{b_{11}} \cdot a_0\right\} \left\{\overset{n}{b}_{1,k} = \overset{n-1}{b_{11}} \cdot a_0\right\}. \tag{4}$$

Фигурирующие в (4) элементы типа b_{11} вычисляются по формулам (3). Таким образом, первая строка матрицы $A^n(k)$ становится известной полностью. В принципе, ее достаточно, чтобы написать решение исходной задачи (1)–(3). Но мы можем выписать всю матрицу, используя закономерности, присущие степеням матрицы $A^n(k)$, относящиеся к связям между строками матриц различных степеней. Однако в этом нет необходимости, если сосредоточиться на поиске решения задачи. Первая строка матричного равенства (4) из раздела «Решение задачи» дает искомое решение. Предварительно распишем элементы первой строки (5) в явном виде наподобие (4). Вычислительные подробности опускаем. Поскольку каждый элемент занимает всю ширину страницы, элементы строки будем записывать столбцом.

$$\overset{n}{b}_{11} = \overset{n}{b}_{11}(k) = \sum_{\substack{\nu_1 \geq 0,\dots,\nu_k \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + k\nu_k = n}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \dots \cdot \nu_k!} \cdot \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_k}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_k} \cdot a_{k-1}^{\nu_1} \cdot a_{k-2}^{\nu_2} \cdot \dots \cdot a_1^{\nu_{k-1}} \cdot a_0^{\nu_k} \quad (5)$$

$$\overset{n}{b}_{12} = \overset{n}{b}_{12}(k) = \sum_{\substack{\nu_1 \geq 0,\dots,\nu_k \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + k\nu_k = n+1}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \dots \cdot \nu_k!} \cdot \frac{\nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_k}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_k} \cdot a_{k-1}^{\nu_1} \cdot a_{k-2}^{\nu_2} \cdot \dots \cdot a_1^{\nu_{k-1}} \cdot a_0^{\nu_k} \quad (6)$$

$$\overset{n}{b}_{13} = \overset{n}{b}_{13}(k) = \sum_{\substack{\nu_1 \geq 0,\dots,\nu_k \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + k\nu_k = n+2}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \dots \cdot \nu_k!} \cdot \frac{\nu_3 + \dots + \nu_k}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_k} \cdot a_{k-1}^{\nu_1} \cdot a_{k-2}^{\nu_2} \cdot \dots \cdot a_1^{\nu_{k-1}} \cdot a_0^{\nu_k} \quad (7)$$

$$\overset{n}{b}_{1k} = \overset{n}{b}_{1k}(k) = \sum_{\substack{\nu_1 \geq 0,\dots,\nu_k \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + k\nu_k = n+k-1}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \dots \cdot \nu_k!} \cdot \frac{\nu_k}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_k} \cdot a_{k-1}^{\nu_1} \cdot a_{k-2}^{\nu_2} \cdot \dots \cdot a_1^{\nu_{k-1}} \cdot a_0^{\nu_k}, \quad (8)$$

$$(k = 2,3,\dots.)$$

После освобождения от векторной записи решение задачи (1)–(2) (раздел «Решение задачи») может быть записано в скалярном виде:

$$y_{n+k} = \overset{n+1}{b}_{11} \cdot \bar{y}_{k-1} + \overset{n+1}{b}_{12} \cdot \bar{y}_{k-2} + \dots + \overset{n+1}{b}_{1k} \cdot \bar{y}_0 + \sum_{i=0}^{i=n} \overset{n-i}{b}_{11} \cdot f_i. \quad (9)$$

С помощью формул (5)–(8) его можно записать явно с использованием только входных данных, т.е. коэффициентов уравнения $a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$, правой части $f_n, \quad (n = 0,1,2,\dots)$ и начальных условий $y_0 = \bar{y}_0, y_1 = \bar{y}_1, \dots, y_{k-1} = \bar{y}_{k-1}$. Поскольку решение – это итоговый результат, выпишем его здесь:

$$\begin{aligned} y_{n+k} = &\left(\sum_{\substack{\nu_1 \geq 0,\dots,\nu_k \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + k\nu_k = n+1}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \dots \cdot \nu_k!} \cdot \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_k}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_k} \cdot a_{k-1}^{\nu_1} \cdot a_{k-2}^{\nu_2} \cdot \dots \cdot a_1^{\nu_{k-1}} \cdot a_0^{\nu_k} \right) \cdot \bar{y}_{k-1} + \\ + &\left(\sum_{\substack{\nu_1 \geq 0,\dots,\nu_k \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + k\nu_k = n+2}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \dots \cdot \nu_k!} \cdot \frac{\nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_k}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_k} \cdot a_{k-1}^{\nu_1} \cdot a_{k-2}^{\nu_2} \cdot \dots \cdot a_1^{\nu_{k-1}} \cdot a_0^{\nu_k} \right) \cdot \bar{y}_{k-2} + \\ &\dots \\ + &\left(\sum_{\substack{\nu_1 \geq 0,\dots,\nu_k \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + k\nu_k = n+k}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \dots \cdot \nu_k!} \cdot \frac{\nu_k}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_k} \cdot a_{k-1}^{\nu_1} \cdot a_{k-2}^{\nu_2} \cdot \dots \cdot a_1^{\nu_{k-1}} \cdot a_0^{\nu_k} \right) \cdot \bar{y}_0 + \\ + &\sum_{i=0}^{i=n} \left(\sum_{\substack{\nu_1 \geq 0,\dots,\nu_k \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + k\nu_k = n-i}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \dots \cdot \nu_k!} \cdot a_{k-1}^{\nu_1} \cdot a_{k-2}^{\nu_2} \cdot \dots \cdot a_1^{\nu_{k-1}} \cdot a_0^{\nu_k} \right) \cdot f_i \quad (10) \end{aligned}$$

Подтвердим правильность формул (10), сравнив следствие из (10) с частным случаем для ($k = 2$), $a_1 = 3$, $a_0 = -2$.

Для этих параметров следствие имеет вид:

$$y_{n+2} = \left(\sum_{\substack{\nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 = n+1}} \frac{(\nu_1 + \nu_2)!}{\nu_1! \cdot \nu_2!} \cdot \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \cdot a_1^{\nu_1} \cdot a_0^{\nu_2} \right) \cdot \bar{y}_1 + \\ + \left(\sum_{\substack{\nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 = n+2}} \frac{(\nu_1 + \nu_2)!}{\nu_1! \cdot \nu_2!} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \cdot a_1^{\nu_1} \cdot a_0^{\nu_2} \right) \cdot \bar{y}_0$$

При $n = 3$ находим интересующее нас значение, например, y_5:

$$y_5 = \left(\sum_{\substack{\nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 = 4}} \frac{(\nu_1 + \nu_2)!}{\nu_1! \cdot \nu_2!} \cdot 3^{\nu_1} \cdot (-2)^{\nu_2} \right) \cdot \bar{y}_1 + \left(\sum_{\substack{\nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 = 5}} \frac{(\nu_1 + \nu_2)!}{\nu_1! \cdot \nu_2!} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \cdot 3^{\nu_1} \cdot (-2)^{\nu_2} \right) \cdot \\ \cdot \bar{y}_0 = 31\bar{y}_1 + (-30)\bar{y}_0.$$

Результат подтверждает правильность формулы (10).

Формула (10) *дает явный вид решения любого линейного разностного уравнения с любой неоднородностью и любыми начальными данными.*

На вид формула (10) громоздка. Но в действительности она легко применима на практике. При небольших n и k вычисления легко проводятся вручную, для больших n и k, ввиду ее очевидной алгоритмичности, она легко программируется. Она применима при любых n и k без каких-либо принципиальных осложнений. В этом отношении она заметно выигрывает при сравнении ее с обычной процедурой нахождения решения разностного уравнения, связанной с решением характеристического уравнения. При больших порядках характеристического уравнения ($k \geq 5$) оно принципиально неразрешимо и приходится прибегать к приближенным методам его решения, что, как известно, довольно тягостно. Формула (10) избавляет нас от необходимости решать характеристическое уравнение. Дело сводится к подстановке данных задачи, выполнению сложения, умножения и сокращения (что проще деления) и последующего остаточного деления в минимальном объеме.

Структура Фибоначчи

Ценность формулы (10) из раздела «Степени матрицы» состоит не только в ее привлекательных вычислительных особенностях, но и в том, что по ходу ее получения обнаружилась важная роль чисел Фибоначчи [7, 8] при решении разностных уравнений. Выяснилось, что верхние угловые элементы

$$\overset{n}{b}_{11} = \overset{n}{b}_{11}(k) = \sum_{\substack{\nu_1 \geq 0, \ldots, \nu_k \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \ldots + k\nu_k = n}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \ldots \cdot \nu_k!} \cdot a_{k-1}^{\nu_1} \cdot a_{k-2}^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot a_1^{\nu_{k-1}} \cdot a_0^{\nu_k} \tag{1}$$

степеней $A^n(k)$ матрицы $A(k)$ имеют самое прямое отношение к числам Фибоначчи. А именно: при $k = 2$ и $a_1 = a_0 = 1$ элемент

$$\overset{n}{b}_{11} = \overset{n}{b}_{11}(2) = \sum_{\substack{\nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 = n}} \frac{(\nu_1 + \nu_2)!}{\nu_1! \cdot \nu_2!} \tag{2}$$

в точности дает нам знакомые числа Фибоначчи. Действительно,

$$\overset{0}{b}_{11}(2) = 1, \quad \overset{1}{b}_{11}(2) = 1, \quad \overset{2}{b}_{11}(2) = 2, \quad \overset{3}{b}_{11}(2) = 3, \quad \overset{4}{b}_{11}(2) = 5, \ldots \tag{3}$$

Но самое замечательное состоит в том, что в формуле (1) содержатся не только известные числа Фибоначчи, но и целое семейство последовательностей чисел, родственных числам Фибоначчи. Это родство непосредственно ясно из того факта, что все они содержатся в формуле (1). В еще более явной форме оно проявляется тогда, когда мы словесно сформулируем их характерное свойство. Характерное свойство чисел Фибоначчи (4) известно как *правило* порождения чисел этой последовательности. Это правило формулируется так: *каждое последующее число последовательности равно сумме* ***двух*** *предыдущих*. Это правило назовем *Правилом-2*. Появившаяся здесь двойка связана с тем, что последовательность (4) соответствует значению $k = 2$. И саму последовательность чисел Фибоначчи (4) будем называть последовательностью Фибоначчи-2 или, кратко, последовательностью Ф-2. Другим значениям k соответствуют последовательности чисел, которые будем обозначать символом Ф-k. Последовательность чисел Ф-k, как и последовательность чисел Ф-2, получается из материнской формулы (1) путем взятия чисел «a» равными единице: $a_{k-1} = a_{k-2} = \ldots = a_1 = a_0 = 1$. Тогда получается последовательность чисел, описываемая формулой

$$\overset{n}{b}_{11}(k) = \sum_{\substack{\nu_1 \ge 0,\ldots,\nu_k \ge 0 \\ \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \ldots + k\nu_k = n}} \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k)!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \ldots \cdot \nu_k!} \tag{4}$$

и состоящая при каждом k из чисел

$$\overset{0}{b}_{11}(k), \quad \overset{1}{b}_{11}(k), \quad \overset{2}{b}_{11}(k), \quad \overset{3}{b}_{11}(k), \quad \ldots \tag{5}$$

Это есть последовательность Ф-k.

Возьмем в (5) конкретные значения k.

Пусть $k = 3$. Тогда

$$\overset{0}{b}_{11}(3) = 1, \quad \overset{1}{b}_{11}(3) = 1, \quad \overset{2}{b}_{11}(3) = 2, \quad \overset{3}{b}_{11}(3) = 4, \quad \overset{4}{b}_{11}(3) = 7, \quad \overset{5}{b}_{11}(3) = 13, \quad \ldots$$

Для этой последовательности работает порождающее *Правило-3: каждое последующее число равно сумме* ***трех*** *предыдущих чисел.*

Пусть $k = 4$. Тогда

$$\overset{0}{b}_{11}(4) = 1, \quad \overset{1}{b}_{11}(4) = 1, \quad \overset{2}{b}_{11}(4) = 2, \quad \overset{3}{b}_{11}(4) = 4, \quad \overset{4}{b}_{11}(4) = 8, \quad \overset{5}{b}_{11}(4) = 15, \quad \ldots$$

Для этой последовательности работает порождающее *Правило-4: каждое последующее число равно сумме* ***четырех*** *предыдущих чисел.*

И так далее. Эти вычисления можно продолжать сколь угодно долго. В результате для последовательности (5) будет сформулировано общее порождающее *Правило-k: каждое последующее число равно сумме* ***k*** *предыдущих чисел.*

Надо отметить, что формула (4) работает и при $k = 1$. В этом случае последовательность (5) принимает вид:

$$\overset{0}{b}_{11}(1) = 1, \quad \overset{1}{b}_{11}(1) = 1, \quad \overset{2}{b}_{11}(1) = 1, \quad \overset{3}{b}_{11}(1) = 1, \quad \overset{4}{b}_{11}(1) = 1, \quad \overset{5}{b}_{11}(1) = 1, \quad \ldots$$

Если в общее порождающее правило подставить $k = 1$, то, хотя понятие суммы для одного слагаемого не определено, можно с натяжкой придать этому правилу смысл и при $k = 1$.

Таким образом, семейство последовательностей Ф-k, ($k = 1,2,3,\ldots.$) образует структуру, которую можно представить таблицей.

Любое число в этой таблице может быть вычислено по формуле (4) за счет выбора k и n.

Для согласования обозначений в таблице и в формуле (4) надо еще отметить, что

$$\overset{n}{b}_{11}(k) = y_n(k).$$

Числа Фидия

Рассмотрим вопрос о фигурирующих в таблице числах Фидия. Одно из них, число 1,618…, хорошо известно, с ним связано множество интересных фактов, и его даже называют «числом Бога». Все остальные числа, стоящие в столбце «число Фидия», оказываются в этом отношении обделенными, хотя с математической точки зрения все числа этого столбца равноправны.

Таблица

Структура Фибоначчи

Номер числа *n*	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…	Число Фидия
Посл-ть Ф-1: $y_n(1)$		**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**…**	**1**
Посл-ть Ф-2: $y_n(2)$	0	**1**	**1**	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	**…**	**1,618…**
Посл-ть Ф-3: $y_n(3)$	0	**1**	**1**	**2**	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927	**…**	**1,839…**
Посл-ть Ф-4: $y_n(4)$	0	**1**	**1**	**2**	**4**	8	15	29	56	108	208	401	773	1490	**…**	**1.927…**
Посл-ть Ф-5: $y_n(5)$	0	**1**	**1**	**2**	**4**	**8**	16	31	61	120	236	464	912	1793	**…**	**1.966…**
Посл-ть Ф-6: $y_n(6)$	0	**1**	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**	32	63	125	248	492	976	1936	**…**	**1,983…**

Число Фидия для последовательности Фибоначчи-k определяется равенством

$$\Phi id{-}k = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}(k)}{y_n(k)}, \qquad (k = 1,2,3,\dots), \tag{1}$$

где $y_n(k)$ — число Фибоначчи с номером n в последовательности Фибоначчи-k.

Судя по экспериментальному материалу, содержащемуся в таблице, числа Фидия растут с ростом k, но не превосходят числа 2, медленно приближаясь к 2-ке. И это не случайно, т.к. справедлива **теорема:**

$$\underset{k\geq 1}{\forall k}\ [\Phi id{-}k \leq 2]. \tag{2}$$

Доказательство вытекает из выкладок:

$$\frac{y_{n+1}(k)}{y_n(k)} = \frac{y_n + [y_{n-1} + \ldots + y_{n-k+1}]}{[y_{n-1} + \ldots + y_{n-k+1}] + y_{n-k}} = \frac{\frac{y_n}{[\ldots]} + 1}{1 + \frac{y_{n-k}}{[\ldots]}} = \frac{\frac{[\ldots]+y_{n-k}}{[\ldots]} + 1}{1 + \frac{y_{n-k}}{[\ldots]}} =$$

$$= \frac{2 + \frac{y_{n-k}}{[\ldots]}}{1 + \frac{y_{n-k}}{[\ldots]}} = \frac{2+\eta}{1+\eta} = (2+\eta)\cdot(1 - \eta + \eta^2 - \eta^3 + \ldots) = 2 - \eta + \eta^2 - \ldots =$$

$$= 2 - \eta\cdot(1 - \eta + \eta^2 - \ldots) = 2 - \frac{\eta}{1+\eta} < 2, \qquad \eta = \frac{y_{n-k}}{[\ldots]}.$$

Возбуждение, связанное с числом Фидия-2, равным $1{,}618\ldots$ («золотое сечение»), которое царит вот уже почти два тысячелетия, затеняет остальные числа Фидия-k ($k = 1,3,4,\ldots$), которые ничем не хуже. Однако обнаруживается, что над всеми ними возвышается двойка, роль которой, как выясняется, становится не менее загадочной, чем роль самих чисел Фидия.

Числа Фибоначчи-∞. Число Фидия-∞ для чисел Фибоначчи-∞

Снова обратимся к таблице. Каждая последовательность чисел Фибоначчи-k(в таблице изображены последовательности Фибоначчи для $k = 1,2,3,4,5,6$) начинается с заштрихованного участка. Так, последовательность Фибоначчи-5 начинается с участка, состоящего из чисел 1,1,2,4,8. Все последующие числа последовательности Фибоначчи-5 порождаются этой пятеркой чисел по правилу: каждое последующее число равно сумме ***пяти*** предыдущих. При любом kпоследовательность Фибоначчи-k начинается с k начальных чисел. Интересен закон образования этих k начальных чисел. Закон образования k начальных чисел таков: *k начальных чисел последовательности Фибоначчи-k являются первыми k числами предыдущей последовательности Фибоначчи-*$(k-1)$. Этот закон не произволен. Он индуцируется матрицей Фибоначчи $A(k)$,

$$A = A(k) = \begin{pmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k\times k},$$

порождаемой исходным разностным уравнением k-го порядка. В таблице по мере роста k выделенная жирным шрифтом область, имеющая вид треугольника, постепенно расширяется за счет увеличивающегося основания. Примечательно, что по вертикалям числа треугольника не меняются, имеет место стабилизация, начинающаяся с самого начала. Так, если восьмерка (число 8) попадает в выделенную жирным шрифтом область, то она остается в своем столбце до самого конца, пока не провалится в бесконечность. В бесконечности основание выделенного жирным шрифтом треугольника по длине тоже становится бесконечным, и числа, в нем оказавшиеся, тоже образуют последовательность, которую мы обозначим $\Phi-\infty$ и которую будем называть последовательностью «Фибоначчи-∞». Она состоит из чисел:

$$\Phi-\infty : 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots, \tag{1}$$

правило образования которых является предельным выражением всех предыдущих правил образования чисел Фибоначчи. Назовем его Правилом-∞. *Правило-∞ таково: каждое последующее число равно сумме **всех** предыдущих чисел*. Для формирования этой последовательности достаточно иметь только одно начальное число — единицу (можно любое количество чисел вида (1) в качестве начального множества, но достаточно только одной единицы). Разностное уравнение, определяющее эти числа, имеет вид:

$$\underset{n\in N_0}{\forall} [y_{n+1} = y_n + y_{n-1} + \ldots + y_1 + y_0], \tag{2}$$

где $N_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ — множество натуральных чисел, начинающееся с 0.

Разностное уравнение, очевидно, соответствует Правилу-∞.

Это уравнение особого типа. Оно не имеет конечного порядка. В таком случае будем говорить, что оно имеет порядок, равный ∞. Понятно, что в общем виде такого сорта уравнения записываются так:

$$\underset{n\in N_0}{\forall n} \quad [y_{n+1} = a_n y_n + a_{n-1} y_{n-1} + \ldots + a_1 y_1 + a_0 y_0], \tag{3}$$

где $N_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ — множество натуральных чисел, начинающееся с 0.

Как решаются такие уравнения, пока неясно. В отличие от этого, уравнение (2) имеет очевидное **решение:**

$$y_n = 2^{n-1}, \qquad (n = 1,2,3,\ldots); \qquad y_0 = 1. \tag{4}$$

Число Фидия для этой последовательности, как и полагается, равно 2:

$$\Phi id-\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}(\infty)}{y_n(\infty)} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2. \tag{5}$$

Это решение лишний раз показывает родство чисел Фибоначчи с биномом Ньютона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей*. М.: Наука; 1967.
2. Gelfond A. O. *Differenzenrechnung*. Berlin: Deutsch. Verl. Wiss.; 1958.
3. Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем*. М.: Наука; 1971.
4. Кострикин А. И. *Введение в алгебру*. М.: Наука; 1994.
5. Воеводин В. В. *Численные методы алгебры*. М.: Наука; 1976.
6. Успенский В. А. *Треугольник Паскаля*. М.: Наука; 1979.
7. Воробьев Н. Н. *Числа Фибоначчи*. М.: Наука; 1978.
8. Hackbusch W. *Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus*. Berlin: Springer; 2012. DOI: 10.1007/978-3-642-28027-6.