КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПОПРАВКИ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА

В. П. Кощеев
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), филиал «Стрела», г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760, koshcheev1@yandex.ru

Аннотация: с помощью уравнения Якоби построена цепочка замкнутых систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих эволюцию моментов, начальные условия к которым могут содержать постоянную Планка. Показано, что эволюция моментов разных порядков происходит независимо друг от друга. Показано, что источником динамического хаоса являются, в частности, ненулевые начальные условия к системе уравнений для вторых моментов, так как средние квадраты флуктуаций координаты и импульса, которые являются мерой «разбегания» траекторий, возрастают экспоненциально быстро в области отрицательной гауссовой кривизны потенциала. Так как решения уравнения Якоби должны являться малыми поправками к решению уравнения Эйлера–Лагранжа, то обратное влияние этих поправок на решение уравнения Эйлера–Лагранжа может быть учтено с помощью розыгрыша (метод Монте-Карло) динамических переменных, что, в свою очередь, приведет к появлению ненулевых начальных условий для моментов высших порядков.

Ключевые слова: уравнение Эйлера–Лагранжа, уравнение Якоби, цепочка замкнутых систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, средних значений корреляторов оператора координаты и импульса, динамический хаос.

Для цитирования: Кощеев В. П. Классические и квантовомеханические поправки к решению уравнения Эйлера–Лагранжа. *Успехи кибернетики*. 2025;6(2):44–46.

Поступила в редакцию: 27.12.2024. *В окончательном варианте: 01.02.2025.*

CLASSICAL AND QUANTUM-MECHANICAL CORRECTIONS TO THE SOLUTION OF THE EULER–LAGRANGE EQUATION

V. P. Koshcheev
Moscow Aviation Institute (National Research University), Strela branch, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760, koshcheev1@yandex.ru

Abstract: using the Jacobi equation, we constructed a chain of closed systems of first-order ordinary differential equations that describe the evolution of moments, where the initial conditions can include Planck's constant. We showed that the evolution of moments of different orders occurs independently of each other. We demonstrated that the source of dynamic chaos is, in particular, nonzero initial conditions for the system of equations governing second moments. This is because the mean square fluctuations of position and momentum, which measure the "divergence" of trajectories, grow exponentially fast in the region of negative Gaussian curvature of the potential. Since the solutions of the Jacobi equation must be small corrections to the solution of the Euler–Lagrange equation, the reverse influence of these corrections on the Euler–Lagrange equation can be accounted for using the Monte Carlo method for dynamic variables. This, in turn, leads to the emergence of nonzero initial conditions for higher-order moments.

Keywords: Euler–Lagrange equation, Jacobi equation, chain of closed systems of first-order ordinary differential equations, average values of position and momentum operator correlators, dynamic chaos.

Cite this article: Koshcheev V. P. Classical and Quantum-Mechanical Corrections to the Solution of the Euler–Lagrange Equation. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(2):44–46.

Original article submitted: 27.12.2024. *Revision submitted: 01.02.2025.*

В рамках нового подхода к построению квазиклассического приближения в квантовой механике в [1] была построена замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для средних значений корреляторов оператора координаты и импульса, которая не содержит явно постоянной Планка, а начальные условия к этой системе уравнений удовлетворяют системе обобщенных соотношений неопределенностей Гейзенберга. В [1] была поставлена задача построения точной механической аналогии этой системы уравнений. В настоящей работе представлена попытка решения этой задачи.

Пусть нам дано уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, \tag{1}$$

где $L = L(t,x,\dot{x})$ — функция Лагранжа; $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Пусть $x = \bar{x} + \delta x$и $\dot{x} = \dot{\bar{x}} + \delta\dot{x}$. Тогда

$$L(t,\bar{x} + \delta x,\dot{\bar{x}} + \delta\dot{x}) = L(t,\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \delta L + \cdots, \tag{2}$$

где $\delta L = \frac{\partial L(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}}\delta x + \frac{\partial L(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}}\delta\dot{x}$.

Подставим (1) в (2) и получим уравнение Якоби

$$\frac{\partial\delta L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\delta L}{\partial\dot{x}} = 0,$$

которое записывают в виде [2]

$$\left(L_{xx} - \frac{dL_{x\dot{x}}}{dt}\right)\delta x - \frac{d}{dt}\left(L_{\dot{x}\dot{x}}\delta\dot{x}\right) = 0, \tag{3}$$

где обозначим $x \equiv \bar{x}$ для удобства.

Если $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x,t)$, как в [1], то уравнения Эйлера–Лагранжа и Якоби имеют вид, соответственно:

$$U_x + m\ddot{x} = 0; \tag{4}$$

$$U_{xx}\delta x + m\delta\ddot{x} = 0. \tag{5}$$

Видно, что с помощью уравнения Якоби (5) могут быть построены замкнутые системы дифференциальных уравнений первого порядка для трех новых динамических переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{d(\delta x^2)}{dt} = 2(\delta x\delta\dot{x}) \\ \dfrac{d(\delta x\delta\dot{x})}{dt} = (\delta\dot{x}^2) - \dfrac{U_{xx}}{m}(\delta x^2) \\ \dfrac{d(\delta\dot{x}^2)}{dt} = -\dfrac{2U_{xx}}{m}(\delta x\delta\dot{x}), \end{cases} \tag{6}$$

четырех новых динамических переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{d(\delta x^3)}{dt} = 3(\delta x^2\delta\dot{x}) \\ \dfrac{d(\delta x^2\delta\dot{x})}{dt} = 2(\delta x\delta\dot{x}^2) - \dfrac{U_{xx}}{m}(\delta x^3) \\ \dfrac{d(\delta x\delta\dot{x}^2)}{dt} = (\delta\dot{x}^3) - \dfrac{2U_{xx}}{m}(\delta x^2\delta\dot{x}) \\ \dfrac{d(\delta\dot{x}^3)}{dt} = -\dfrac{3U_{xx}}{m}(\delta\dot{x}^2\delta x) \end{cases} \tag{7}$$

и так далее.

Видно, что замкнутые системы уравнений (6), (7) зависят от решения уравнения (4) и эволюционируют независимо друг от друга. Так как решения уравнения Якоби должны являться малыми поправками к решению уравнения Эйлера–Лагранжа, то обратное влияние этих поправок на решение уравнения Эйлера–Лагранжа может быть учтено с помощью розыгрыша (метод Монте-Карло) динамических переменных, что, в свою очередь, приведет к появлению ненулевых начальных условий для моментов высших порядков. Если $m\delta\dot{x} = \delta p$, то система уравнений (6) с точностью до обозначений совпадает с системой уравнений [1], которую запишем в виде [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\overline{\delta\hat{x}^2} = \dfrac{2}{m}\overline{\delta\hat{x}\delta\hat{p}_x} \\ \dfrac{d}{dt}\overline{\delta\hat{x}\delta\hat{p}_x} = \dfrac{1}{m}\overline{\delta\hat{p}_x^2} - U_{xx}(x)\,\overline{\delta\hat{x}^2} \\ \dfrac{d}{dt}\overline{\delta\hat{p}_x^2} = -2U_{xx}(x)\,\overline{\delta\hat{x}\delta\hat{p}_x}. \end{cases} \tag{8}$$

С помощью волновых функций, минимизирующих соотношение неопределенностей Гейзенберга, вычислены начальные условия к системе дифференциальных уравнений (8):

$$\overline{\delta\hat{x}\delta\hat{p}_x}\Big|_{t=0} = 0, \qquad \overline{\delta\hat{x}^2}\Big|_{t=0} \cdot \overline{\delta\hat{p}_x^2}\Big|_{t=0} = \frac{\hbar^2}{4}. \tag{9}$$

Исследуем на устойчивость решения системы дифференциальных уравнений (8) на небольших временных интервалах $x(t+\Delta t) \approx x(t)$. Решения системы уравнений (8) будем искать в виде:

$$\begin{cases} \overline{\delta\hat{x}^2} = Ae^{\lambda t} \\ \overline{\delta\hat{x}\delta\hat{p}_x} = Be^{\lambda t} \\ \overline{\delta\hat{p}_x^2} = Ce^{\lambda t}, \end{cases} \tag{10}$$

где A, B, C — постоянные интегрирования, а λ — показатель Ляпунова.

Подставим (10) в (8) и получим:

$$\begin{cases} \lambda A = \dfrac{2}{m}B \\ \lambda B = \dfrac{1}{m}C - U_{xx}(x)A \\ \lambda C = -2U_{xx}(x)B. \end{cases} \tag{11}$$

Найдем три корня характеристического уравнения:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2\sqrt{\dfrac{-U_{xx}(x)}{m}} \\ \lambda_3 = -2\sqrt{\dfrac{-U_{xx}(x)}{m}}. \end{cases} \tag{12}$$

Видно, что источником динамического хаоса являются, в частности, ненулевые начальные условия к системе уравнений (8), так как средние квадраты флуктуаций координаты и импульса (10), которые являются мерой «разбегания» траекторий, возрастают экспоненциально быстро $\lambda_2 > 0$ в области отрицательной гауссовой кривизны потенциала $U_{xx}(x) < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bagrov V. G., Belov V. V., Kondrat'eva M. F. The Semiclassical Approximation in Quantum Mechanics. A New Approach. *Theoretical and Mathematical Physics.* 1994;98(1):34–38.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. *Вариационное исчисление*. М.: Физматгиз; 1961. 228 с.
3. Koshcheev V. P., Morgun D. A., Panina T. A., Shtanov Y. N. Influence of Quantum Fluctuations on the Stochastic Dynamics of the Channeling Effect of Relativistic Electrons and Positrons. *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2012;6(1):168–171.