К ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА С ПОМОЩЬЮ ЛЕММЫ ПУАНКАРЕ

В. П. Кощеев
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), филиал «Стрела», г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760, koshcheev1@yandex.ru

Аннотация: показано, что уравнение Эйлера–Лагранжа для динамической системы с одной степенью свободы может быть построено с помощью леммы Пуанкаре. В приложении к статье доказана теорема существования и единственности свойства кососимметричности простейших (базовых) дифференциальных форм.

Ключевые слова: уравнение Эйлера–Лагранжа, динамическая система с одной степенью свободы, лемма Пуанкаре, простейшие (базовые) дифференциальные формы.

Для цитирования: Кощеев В. П. К задаче построения уравнения Эйлера–Лагранжа с помощью леммы Пуанкаре. *Успехи кибернетики*. 2025;6(2):40–43.

Поступила в редакцию: 06.12.2024. *В окончательном варианте: 14.01.2025.*

CONSTRUCTING THE EULER–LAGRANGE EQUATION USING THE POINCARÉ LEMMA

V. P. Koshcheev
Moscow Aviation Institute (National Research University), Strela branch, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760, koshcheev1@yandex.ru

Abstract: we demonstrate that the Euler–Lagrange equation for a dynamical system with one degree of freedom can be derived using the Poincaré lemma. In the appendix, we prove the theorem on the existence and uniqueness of the skew-symmetry property of the simplest (basic) differential forms.

Keywords: Euler–Lagrange equation, 1-DOF dynamic system Poincaré lemma, simplest (basic) differential forms.

Cite this article: Koshcheev V. P. Constructing the Euler–Lagrange Equation Using the Poincaré Lemma. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(2):40–43.

Original article submitted: 06.12.2024. *Revision submitted: 14.01.2025.*

В [1] с помощью леммы Пуанкаре построена первая пара уравнений Максвелла, которая не содержит плотности заряда и тока. Построение уравнения Эйлера–Лагранжа для динамической системы с одной степенью свободы с помощью леммы Пуанкаре составляет цель настоящей работы.

Классическое действие для динамической системы с одной степенью свободы запишем в виде определенного интеграла с переменным верхним пределом

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} L\left(t',q(t'),\frac{dq(t')}{dt'}\right)dt'. \tag{1}$$

Тогда

$$dS = L\left(t',q(t'),\frac{dq(t')}{dt'}\right)dt'\Bigg|_{t'=t} = L(t,q,\dot{q})dt, \tag{2}$$

где $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$.

Построим дифференциал второго порядка

$$ddS = \left(\frac{\partial L}{\partial t}dt + \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q}\right) \wedge dt. \tag{3}$$

Так как (см. приложение) $dt \wedge dt = 0$ и $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}dq\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)dq + \frac{\partial L}{\partial \dot q}d\dot q$, то

$$d\left(dS - \frac{\partial L}{\partial \dot q}dq\right) = \left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} + \frac{\partial L}{\partial q}\right)dq \wedge dt. \tag{4}$$

Покажем, что

$$dS - \frac{\partial L}{\partial \dot q}dq = -Hdt \tag{5}$$

является 1 — формой, так как выполняется лемма Пуанкаре

$$d\left(dS - \frac{\partial L}{\partial \dot q}dq\right) = d\left(-Hdt\right) = -\frac{dH}{dt}dt \wedge dt = 0. \tag{6}$$

Тогда из уравнения (4) получим уравнение Эйлера–Лагранжа

$$0 = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} + \frac{\partial L}{\partial q}, \tag{7}$$

так как $dq \wedge dt \neq 0$.

Приложение

Как физики [1], так и математики [2] вынуждены постулировать свойство кососимметричности простейших дифференциальных форм, чтобы не излагать достаточно громоздкую стандартную процедуру их введения [3]. Новый подход к задаче построения определителя Якоби был предложен в [4]. Было показано, что произведение дифференциалов как в одной, так и в другой системах координат являются кососимметричными, если они связаны между собой с помощью определителя Якоби. В рамках нового подхода [4] докажем теорему существования и единственности свойства кососимметричности простейших (базовых) дифференциальных форм.

Известно, что инвариантность формы первого дифференциала функции многих (нескольких) переменных в разных системах координат достигается с помощью дополнительного условия, согласно которому дифференциалы независимых переменных преобразуются как компоненты контравариантного вектора, а частные производные преобразуются как компоненты ковариантного вектора. Сперва рассмотрим функцию двух независимых переменных в старой системе координат

$$f = f(u,v), \tag{П1}$$

которые зависят от независимых переменных в новой системе координат

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} du = u_x\,dx + u_y\,dy, \\ dv = v_x\,dx + v_y\,dy, \end{cases} \tag{П2}$$

где

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Запишем систему уравнений (П2) в виде

$$A\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = AJA^{-1}A\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \tag{П3}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \quad \text{— матрица Якоби,}$$

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ — диагональная матрица; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}$ — обратная матрица; $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; α и β — произвольные числа.

Видно, что

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{П4}$$

В результате получим

$$\left[\begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} - AJA^{-1} \begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0. \tag{П5}$$

Известно, что тривиальное решение системы однородных линейных алгебраических уравнений существует, и оно единственно. Рассмотрим обратную задачу (П5), когда элементы матрицы столбца не равны нулю, то есть $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, а элементы квадратной матрицы являются неизвестными величинами. Очевидно, что тривиальное решение уравнения (П5) существует, и оно единственное

$$\begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} = AJA^{-1} \begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}. \tag{П6}$$

Так как определитель произведения матриц одинаковых порядков в (П6) равен произведению определителей этих матриц, то

$$\det \begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}, \tag{П7}$$

где $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$.

В результате получим

$$du \wedge dv = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} dx \wedge dy, \tag{П8}$$

где $\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ — определитель Якоби.

Произведение дифференциалов независимых переменных будем обозначать символом $\wedge$, который в алгебре определяет операцию внешнего умножения кососимметричных форм [3]. Покажем, что простейшие дифференциальные формы являются кососимметричными, то есть $du \wedge du = dv \wedge dv = 0$ и $du \wedge dv = -dv \wedge du$. Так как

$$\begin{cases} dv = v_x\, dx + v_y\, dy, \\ du = u_x\, dx + u_y\, dy, \end{cases}$$

то

$$\det \begin{pmatrix} dv & 0 \\ 0 & du \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}.$$

Тогда с помощью (П7) и (П8) получим

$$dv \wedge du = \det \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix} dx \wedge dy = -\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} dx \wedge dy = -du \wedge dv.$$

Если

$$\begin{cases} du = u_x\, dx + u_y\, dy, \\ du = u_x\, dx + u_y\, dy, \end{cases}$$

то

$$\det \begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & du \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда

$$du \wedge du = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix} dx \wedge dy = 0 \cdot dx \wedge dy = 0.$$

Если определитель Якоби не равен нулю, то легко получить

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0 \quad \text{и} \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx.$$

Таким образом, произведение дифференциалов как в одной, так и в другой системах координат являются кососимметричными, если они связаны между собой с помощью определителя Якоби.

ЛИТЕРАТУРА

1. Райдер Л. *Квантовая теория поля*. ПЛАТОН; 1998.
2. Яковлев Г. Н. *Лекции по математическому анализу. Ч. 2*. М.: Физматлит; 2004.
3. Зорич В. А. *Математический анализ: в 2-х частях. Часть 2*. М.: Наука; 1984.
4. Кощеев В. П. К задаче построения определителя Якоби. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):87–89. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-10.