О ДИНАМИКЕ ПРИМЕСИ В ПОЛЕ ТЕЧЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Галкин
[1] *Сургутский филиал федерального государственного автономного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Сургут, Российская Федерация*
[2] *Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация*
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9721-4026, ✍ *val-gal@yandex.ru*

Посвящается светлой памяти
Сергея Григорьевича Вольпина

Аннотация: исследуется структура решения уравнения переноса примеси под действием вихревого решения уравнения Навье–Стокса в случае течения несжимаемой жидкости в плоскостях, ортогональных выделенной оси — «скважине». Приведено описание структуры таких решений в окрестности скважины, порожденных поворотами в инвариантных плоскостях течения. Установлено, что динамика примеси в таких течениях может порождать пространственную структуру, аналогичную явлению кавитации для быстро движущихся объектов вдоль выделенной оси, порождающих узкую зону разрежения примеси. Приведены примеры образования таких структур, обладающих осевой симметрией.

Ключевые слова: уравнения несжимаемой жидкости, точные решения системы Навье–Стокса, уравнение переноса.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ (Выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме № 0580-2021-0007 «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления». Автор выражает благодарность за обсуждение работы сотрудникам Сургутского филиала НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ А. О. Дубовику, Т. В. Гавриленко, Д. А. Моргуну.

Для цитирования: Галкин В. А. О динамике примеси в поле течения стратифицированной вязкой несжимаемой жидкости. *Успехи кибернетики*. 2025;6(2):22–26.

Поступила в редакцию: 01.06.2025. *В окончательном варианте: 16.06.2025.*

DYNAMIC BEHAVIOR OF IMPURITIES IN THE FLOW FIELD OF A STRATIFIED VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

V. A. Galkin
[1] *Surgut Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”, Surgut, Russian Federation*
[2] *Surgut State University, Surgut, Russian Federation*
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9721-4026, ✍ *val-gal@yandex.ru*

Abstract: we studied the structure of the solution to the impurity transport equation under the influence of a vortex-type solution of the Navier–Stokes equations for incompressible fluid flow in planes orthogonal to a distinguished axis, referred to as the ”well”. We described the structure of these solutions in the vicinity of the well, which arises due to rotational motion in the invariant flow planes. Our analysis shows that the dynamics of impurities in such flows can generate a spatial structure resembling cavitation, observed in high-speed motion along the selected axis. This phenomenon results in the formation of a narrow region of impurity dilution. We also provided examples demonstrating the formation of such axially symmetric structures.

Keywords: incompressible fluid equations, exact solutions of the Navier-Stokes system, transport equation.

Acknowledgements: this study is a part of the government contract 47 GP with the Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre ”Kurchatov Institute”, project No. 0580-2021-0007 Advancing Distribution System Simulation and Computation Methods. The author expresses his gratitude for the discussion of the work to A.O. Dubovik, T.V. Gavrilenko, and D.A. Morgun

of the Surgut Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre ”Kurchatov Institute”.

Cite this article: Galkin V. A. Dynamic Behavior of Impurities in the Flow Field of a Stratified Viscous Incompressible Fluid. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(2):22–26.

Original article submitted: 01.06.2025. *Revision submitted: 16.06.2025.*

Введение

В [1–5] приведены содержательные результаты, относящиеся к теме настоящей работы.

В координатном пространстве $\mathbb{R}_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3)\}$ рассматривается динамика во времени $t \in \mathbb{R}$ гладкого поля скоростей $\mathrm{V} : \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_3$ ($\mathrm{V} \in C^2$), удовлетворяющего системе Навье–Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + (\mathrm{V} \cdot \nabla)\,\mathrm{V} + \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla P(x,t) = \varepsilon^2 \Delta \mathrm{V}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathrm{V} = 0, \tag{2}$$

где $P : \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — давление жидкости, $\bar{\rho}$ и ε^2 — постоянные, характеризующие плотность и вязкость жидкости. В настоящей работе рассматривается класс решений $\{V, P\}$, обладающих свойством плоской стратификации относительно некоторой оси $\mathcal{L}$, которую без потери общности направим вдоль вектора $\bar{e}_3 = (0,0,1)$ ($\{\bar{e}_i\}_{i=1}^3$ — ортонормированный базис в R_3). Проекцию вектора x на ось $\mathcal{L}$ обозначим в дальнейшем $x_3 = (x, \bar{e}_3)$, положим $x_i \stackrel{def}{=} (x, \bar{e}_i)$. Свойство стратификации означает, что выполнено соотношение ортогональности

$$(\mathrm{V}, \mathcal{L}) = 0. \tag{3}$$

Обозначим величину $r(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. В дальнейшем наряду с декартовыми координатами будем также использовать цилиндрическую систему координат (r, φ, z).

Ниже решения уравнений (1), (2) рассматриваются в пространственной области $M = \{x \in \mathbb{R}_3 \backslash \mathcal{L} : \; a < x_3 < b$ при значениях времени $t > 0$. Отметим, что на оси $\mathcal{L}$, вообще говоря, могут быть сосредоточены особенности рассматриваемых течений, приводящие к обобщенным функциям Дирака. Поэтому, чтобы в рамках настоящей работы не выходить из пространства гладких классических функций, ось («скважина» $\mathcal{L}$) исключается из рассмотрения. Отметим, что расширенное исследование, включающее ось $\mathcal{L}$, требует привлечения теории функциональных решений [6].

Предположим, что в слое M распределена невесомая безынерционная примесь, увлекаемая полем гидродинамического течения V, которая описывается концентрацией $n(x,t)$, подчиняющейся линейному уравнению переноса

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} + (\mathrm{V}, \nabla n) = 0, \qquad x \in M, \qquad t > 0. \tag{4}$$

Подчеркнем, что явление диффузии в уравнение (4) не включено, чтобы выявить наиболее существенные детали рассматриваемых ниже явлений.

Настоящая работа является продолжением исследований автора [1–5].

Вихревое стратифицированное гидродинамическое поле

Обозначим $T_{x_3} : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$, однопараметрическое семейство поворотов вокруг оси $\mathcal{L}$, заданное формулами

$$T_{x_3}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_3) & \sin(x_3) & 0 \\ -\sin(x_3) & \cos(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Теорема. *Пусть векторное поле U на множестве $x \in M$ задано соотношением*

$$U(x) = r^{-2}(x) T_{x_3}(x). \tag{6}$$

Тогда поле

$$\mathrm{V}(x,t) = U(x)\exp(-\varepsilon^2 t) \tag{7}$$

удовлетворяет на M при $t > 0$ системе уравнений Навье–Стокса (1), (2) *с условием стратификации* (3), *при этом значения давления $P(x,t)$ заданы формулой*

$$P(x,t) = -\frac{\bar{\rho}}{2}(\mathrm{V}(x,t),\mathrm{V}(x,t)) + \beta(t), \tag{8}$$

где $\beta(t)$ — произвольная функция, зависящая от времени $t \in \mathbb{R}$.

Утверждение теоремы проверяется непосредственной подстановкой формул (6)–(8) в соотношения (1)–(3).

Поскольку преобразование $T_{x_3} : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$ является периодическим по аргументу x_3, то таким же свойством обладает гидродинамическое поле $\mathrm{V}(x,t)$, и это поле является касательным к каждому слою $x_3 = const$.

Решения системы (1)–(4)

Так как решения уравнения переноса (4) сохраняют постоянное значение вдоль характеристик, то значения концентрации $n(x,t)$ получаются переносом начального распределения примеси $n(x,0)$ в области $M = \mathbb{R}_3 \backslash \mathcal{L}$ вдоль траекторий системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = U(x), \qquad \tau(t) = \varepsilon^{-2}(1 - \exp(-\varepsilon^2 t)). \tag{9}$$

Переходя в системе (9) к цилиндрическим координатам, получаем тождества

$$\begin{aligned} &r^2(\tau) = r^2(0) + 2\tau\cos(x_3); \\ &\varphi(\tau) = \varphi(0) - \frac{1}{2} tg(x_3) \ln\left(\frac{r^2(\tau)}{r^2(0)}\right), \quad x_3 \neq \pm\frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi, \quad \mathrm{k} \in \mathrm{Z}; \\ &x_3(\tau) = x_3(0). \end{aligned} \tag{10}$$

При значениях $x_3(0) = \pm\frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi$, $\mathrm{k} \in \mathrm{Z}$ траектории характеристик, задаваемых системой (9), в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} &r^2(\tau) = r^2(0); \\ &\varphi(\tau) = \varphi(0) \mp \tau r^{-2}(0), \quad x_3 = \pm\frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi, \quad \mathrm{k} \in \mathrm{Z}; \\ &x_3(\tau) = x_3(0). \end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что формулы (10) определяют спиральную форму траекторий в фазовой плоскости (r,φ), $x_3 = x_3(0)$, которые «раскручиваются» от оси $\mathcal{L}$ при положительных значениях $\cos(x_3)$ и, напротив, «накручиваются» на нее при отрицательных величинах $\cos(x_3)$. (В частном случае, когда $x_3 = \mathrm{k}\pi$, $\mathrm{k} \in \mathrm{Z}$, семейство спиралей превращается в пучок прямых исходящих из $\mathcal{L}$ либо сходящихся к $\mathcal{L}$.) Когда же $\cos(x_3) = 0$, то траектории лежат на концентрических окружностях с центром в начале координат фазовой плоскости. Это определяет специальные ограничения на начальные данные задачи Коши (4), ибо необходимы условия согласования для корректности задачи, поскольку должно выполняться требование постоянства начальной функции на упомянутых окружностях в этих плоскостях.

Таким образом, при достаточно малых положительных начальных значениях величины $r(0)$, когда $\cos(x_3) < 0$, траектория характеристики попадает за конечное время на ось $\mathcal{L}$. Тем самым в таких точках на оси $\mathcal{L}$ концентрация примеси переходит в обобщенную функцию Дирака в плоскости (x_1, x_2), $x_3 = x_3(0)$, пропорциональную количеству вещества примеси, попавшему в указанную точку из рассматриваемой фазовой плоскости.

Для «раскручивающихся» траекторий в плоскостях, где $\cos(x_3) > 0$, из начального условия $n(x,0)|_{\mathrm{x} \in \mathcal{L}} = 0$ получаем, что $n(x,t) = 0$ в круге $r \leq \sqrt{2\tau\cos(x_3)}$. Таким образом, вдоль вертикальной оси $\mathcal{L}$ в плоскостях с условием $\cos(x_3) > 0$ формируются периодически расположенные «каверны», в которых отсутствует примесь. Указанное явление качественно весьма напоминает образование кавитационных пузырей в жидкости вдоль траектории быстро движущихся тел. См., например, рис. 1, 2, иллюстрирующие высокоэнергичные процессы переноса.

Рис. 1. *Стрельба под водой (из открытых источников сети Интернет)*

Рис. 2. *Высокоэнергетический взрывной процесс в атмосфере (из открытых источников сети Интернет)*

Заключение

Приведено описание структуры решений уравнения переноса в вихревом потоке стратифицированной вязкой несжимаемой жидкости в окрестности скважины, порожденных осевыми вращениями в плоскостях, ортогональных скважине. Установлено, что динамика примеси в таких течениях может порождать пространственную структуру, аналогичную явлению кавитации для быстро движущихся объектов вдоль выделенной оси, порождающих узкую зону разрежения примеси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. А. Об одном классе точных решений системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в шаре и сферическом слое. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*. 2023;63(6):1000–1005.
2. Галкин В. А., Дубовик А. О. Об одном классе точных решений системы уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости. *Матем. моделирование*. 2023;35(8):3–13.
3. Галкин В. А. О структуре винтовых осесимметричных решений системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*. 2024;64(5):780–790.
4. Галкин В. А., Смородинов А. Д., Моргун Д. А. Решение уравнения Навье–Стокса для сталкивающихся потоков. *Успехи кибернетики*. 2023;4(2):8–15.
5. Галкин В. А., Дубовик А. О. О моделировании слоистого течения вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени. *Матем. моделирование*. 2020;32(4):31–42.
6. Галкин В. А. *Анализ математических моделей. Системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского*. М.: БИНОМ; 2009. 428 с.