DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-06

ЭФФЕКТИВНОЕ СОЧЕТАНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ И АЛГОРИТМА ШВАРЦА ПРИ ОЦЕНКЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛОСТНОГО ТЕЛА

В. Б. Пеньков[а], **Л. В. Левина**[б], **В. Н. Уланов**[в], **А. А. Копцева**[г]
Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация
[а] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6059-1856, vbpenkov@mail.ru*
[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7441-835X, ✍ satalkina_lyubov@mail.ru*
[в] *ulanov-vityusha@yandex.ru*, [г] *koptseva-a14@mail.ru*

Аннотация: выполнена оценка эффективности использования алгоритма Шварца в комбинации с энергетическим методом граничных состояний (МГС) на каждом шаге итерационного процесса в сравнении с «прямым» использованием МГС для двухполостного упругого тела. Оценена экономия временных затрат на проведение расчетов и обнаружен высокий уровень сходимости в трехмерном случае. Комбинированный метод использован для решения задачи об оценке пределов возможной локализации сферической полости в биконусном теле при фиксированном варианте нагружения по поверхности. Сделаны выводы.

Ключевые слова: алгоритм Шварца, метод граничных состояний, МГС, оценка прочности.

Для цитирования: Пеньков В. Б., Левина Л. В., Уланов В. Н., Копцева А. А. Эффективное сочетание метода граничных состояний и алгоритма Шварца при оценке напряженно-деформированного состояния полостного тела. *Успехи кибернетики*. 2024;5(4):45–50. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-06.

Поступила в редакцию: 01.10.2024. *В окончательном варианте: 05.11.2024.*

AN EFFECTIVE COMBINATION OF THE METHOD OF BOUNDARY STATES AND THE SCHWARTZ METHOD FOR EVALUATING THE STRESS-STRAIN BEHAVIOR OF A CAVITY BODY

V. B. Penkov[a], **L. V. Levina**[b], **V. N. Ulanov**[c], **A. A. Koptseva**[d]
Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation
[a] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6059-1856, vbpenkov@mail.ru*
[b] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7441-835X, ✍ satalkina_lyubov@mail.ru*
[c] *ulanov-vityusha@yandex.ru*, [d] *koptseva-a14@mail.ru*

Abstract: we estimated the efficiency of the Schwartz method combined with the energy-based method of boundary states (MBS) at each step of the iterative process and compared it with the direct application of MBS to a two-cavity elastic body analysis. We found better computational performance and a high level of convergence in the 3D case. The combined approach was used to estimate the limits of possible localization of a spherical cavity in a biconical body in a given surface load case.

Keywords: Schwartz method, method of boundary states, MBS, structural analysis.

Cite this article: Penkov V. B., Levina L. V., Ulanov V. N., Koptseva A. A. An Effective Combination of the Method of Boundary States and the Schwartz Method for Evaluating the Stress-Strain Behavior of a Cavity Body. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(4):45–50. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-06.

Original article submitted: 01.10.2024. *Revision submitted: 05.11.2024.*

Непосредственное применение метода граничных состояний

В МГС под внутренним состоянием ξ объекта понимается избыточный набор характеристик, согласованных определяющими соотношениями среды. Граничным состоянием γ является след внутреннего состояния на границе тела. Множества внутренних и граничных состояний в эластостатике образуют изоморфные гильбертовы пространства $\Xi \leftrightarrow \Gamma$ со скалярными произведениями, равными для любых изоморфных пар элементов:

$$\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}\right)_{\Xi} = \left(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}\right)_{\Gamma}, \qquad \xi^{(k)} \leftrightarrow \gamma^{(k)}.$$

Обозначим счетные базисы пространств Ξ, Γ через $\overline{\Xi}$, $\overline{\Gamma}$. При практическом применении используем конечные отрезки $\overrightarrow{\Xi}$, $\overrightarrow{\Gamma}$ этих базисов — векторы размерности $|\overrightarrow{\Xi}| = |\overrightarrow{\Gamma}| = N$.

В случае однополостного ограниченного объекта удобно 3D-область, занятую телом, определять как пересечение $V = V^+ \cap V^-$, где V^+ — односвязная ограниченная область, V^- — внешность односвязной ограниченной полости. Удобство объясняется тем, что базис пространства внутренних состояний можно формировать как объединение базисов двух подпространств $\overline{\Xi} = \overline{\Xi}^+ \cup \overline{\Xi}^-$. Наборы состояний $\xi^\pm \in \Xi^\pm$ формируются на основе общих решений Аржаных–Слободянского [1] разрешающей системы уравнений Ламе [2], в которых используются базисы функций, гармонических в соответствующих подобластях [3].

Обозначим через $N^\pm$ мощности соответствующих множеств: $N^\pm = |\overrightarrow{\Xi}^\pm|$. Тогда $N = N^+ + N^-$ в силу линейной независимости элементов базиса Ξ, входящих в $\overrightarrow{\Xi}^\pm$. Далее понимаем под состояниями ξ, γ наборы полевых характеристик:

$$(\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}, x \in V), \qquad (\gamma = \{u_i, p_i\}, x \in \partial V, p_i = \varepsilon_{ij}\big|_{\partial V} n_i),$$

где ∂V означает границу области V, $\{n_i\}$ — единичный вектор внешней нормали к границе, $\{u_i\}$ — вектор перемещения в точке $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, ε_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров деформаций и напряжений.

Скалярные произведения изоморфных гильбертовых пространств в задачах эластостатики определяются тройной формулой (тензорно-индексная форма записи):

$$\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}\right)_\Xi \equiv \int\limits_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \int\limits_{\partial V} p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS \equiv \left(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}\right)_\Gamma. \tag{1}$$

При практическом решении задач следует выполнить ортогонализацию изоморфных отрезков базисов $\overrightarrow{\Xi} \leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma}$. В случае тела, содержащего полости, более рационально с вычислительной точки зрения пользоваться скалярным произведением в пространстве граничных состояний (на границе ∂V элементы базиса $\overline{\Gamma}$ сингулярностей не содержат; сингулярности определены внутри области V).

Процедура ортогонализации — энергоемкая. Это обусловлено двумя причинами: 1) количество действий по вычислению кратных интегралов в скалярных произведениях существенно возрастает при увеличении N (квадратичная зависимость); 2) для достижения достаточной точности при увеличении N требуется повышать и длину мантиссы в десятичном представлении чисел.

Искомые состояния (внутренние $\xi \in \Xi$, граничные $\gamma \in \Gamma$) ищутся в виде рядов Фурье по элементам ортонормированных базисов:

$$\xi = \sum_k c_k \xi^{(k)}, \qquad \gamma = \sum_k c_k \gamma^{(k)}, \tag{2}$$

для чего используется информация, содержащаяся в граничных условиях. Например, если на границе тела заданы поверхностные усилия p_i^0, то из (1) и (2) следует, что $c_k = \left(p_i^0, u_i^{(k)}\right)_\Gamma$.

О точности решения можно судить по двум факторам: 1) неравенство Бесселя $\sum_k c_k^2 \le (\gamma, \gamma)_\Gamma$ позволяет эффективно подобрать значение натурального N; 2) квадратичная интегральная невязка построенного приближенного решения с заданными граничными условиями напрямую свидетельствует о точности результата.

В случае смешанных ГУ использование рядов Фурье (2) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (при усечении базиса до размерности N — к системе уравнений этой же размерности) [3]. Основная трудоемкость определяется процессом ортогонализации.

Эффективный алгоритм Шварца

«Алгорифм» Шварца заявлен для задач математической физики в конце 19 века [4]. Сжимаемость отображения итерационного процесса Шварца не доказана. В задачах для 2D-тел он показал достаточно медленную сходимость. Его сочетание с МГС выполнено успешно [5]: сходимость в 3D-пространствах для задач статической упругости оказалась весьма быстрой.

В случае двусвязных областей (например, $V = V^+ \cap V^-$) схема алгоритма достаточно простая.

Шаг 0. Решается краевая задача для тела, занимающего область V^-. ГУ соответствуют заданным требованиям. Отслеживаются состояния $\xi^-_{\langle 0 \rangle} \leftrightarrow \gamma^-_{\langle 0 \rangle}$. Форма границы ∂V^+ позволяет оценить след

$\overline{\gamma}^+$ состояния $\xi^-_{\langle 0\rangle}$ и внести поправку в ГУ на ∂V^+. После этого решается краевая задача для ∂V^+ со скорректированными ГУ и строятся состояния $\xi^+_{\langle k\rangle} \leftrightarrow \gamma^+_{\langle k\rangle}$.

Шаг k. Оценивается поправка $\overline{\gamma}^+$ для ГУ на ∂V^- и выполняется коррекция ГУ в задаче для V^-. Решается краевая задача для V^-, вычисляется след $\overline{\gamma}^+$ от $\xi^-_{\langle k\rangle}$ на ∂V^+, вносится поправка в ГУ задачи для области V^+. Строится $\xi^+_{\langle k\rangle} \leftrightarrow \gamma^+_{\langle k\rangle}$. Оценивается уровень поправок, выполненных на шаге k. Если он достаточно высок, то осуществляется переход к шагу $k+1$. В противном случае итерационный процесс можно считать оконченным.

Эффективность алгоритма Шварца подтверждается рядом факторов:

1) процесс ортогонализации методом Грама–Шмидта [6] состоит в преобразовании матрицы Грама, состоящей из скалярных произведений всех элементов удерживаемого отрезка базиса состояний. В «прямом» подходе требуется вычислять $\nu = \left(N^+ + N^-\right)\left(N^+ + N^- + 1\right)/2$ кратных интегралов. При подходе Шварца объект вычислений существенно ниже: $\nu = \left(\nu^+ + \nu^-\right)$, $\nu^\pm = N^\pm\left(N^\pm + 1\right)/2$;

2) для выписывания ортонормированного базиса в «прямом» подходе строится матрица Шмидта S, умножением слева на которую исходные базисы преобразуются в ортонормированные:

$$\vec{\Xi}_0 = S\vec{\Xi}, \qquad \vec{\Gamma}_0 = S\vec{\Gamma}.$$

В «прямом» подходе размерность матрицы S равна ν. При проведении ортогонализации требуется объем вычислений, приближенно оцениваемый квадратом числа ν, т.е. $\nu^2 = \left(\nu^+ + \nu^-\right)^2$. В подходе Шварца для матриц $S^\pm$ имеем соответствующие оценки трудоемкости $(\nu^+)^2$, $(\nu^-)^2$. Этот объем вычислений меньше практически вдвое;

3) для обеспечения вычислительной точности надо в представлении чисел удерживать длину мантиссы, обеспечивающую требуемое значение значащих цифр в результатах счета. Опыт показал значительный рост потребной длины мантиссы в зависимости от ν и, как следствие, нелинейно возрастающие временные затраты на проведение операций. Этот фактор существенно подчеркивает эффективность подхода Шварца;

4) процедура ортогонализации базисов как в «прямом» подходе, так и в алгоритме Шварца выполняется единственный раз, поскольку корректировка ГУ влияет только на формирование вектора правых частей разрешающей системы линейных алгебраических уравнений. В основных задачах теории упругости этот вектор уже является набором искомых коэффициентов Фурье. В методе Шварца в комбинации с МГС преобразование смешанных ГУ в разрешающую систему уравнений достаточно выполнить только на первом шаге приближения. На всех последующих шагах удобно пользоваться аппаратом решения любой основной задачи средствами МГС;

5) практически установлена весьма быстрая сходимость алгоритма Шварца (2÷4 итерации) для многополостных ограниченных 3D-тел [5].

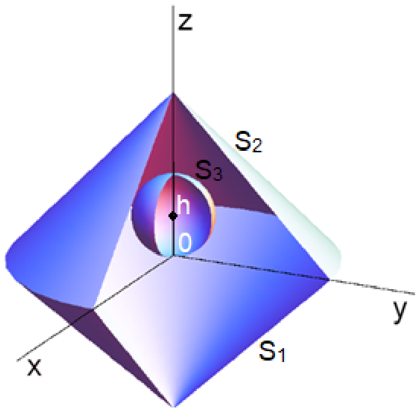

Рис. 1. *Полостной биконус*

Напряженно-деформированное состояние полостного биконуса

Рассматривается однородное изотропное упругое тело в форме биконуса, содержащего сферическую полость (рис. 1). Положение полости варьируется вдоль оси биконуса параметром h. Требуется оценить влияние положения полости на НДС тела и установить предельное значение положения цен-

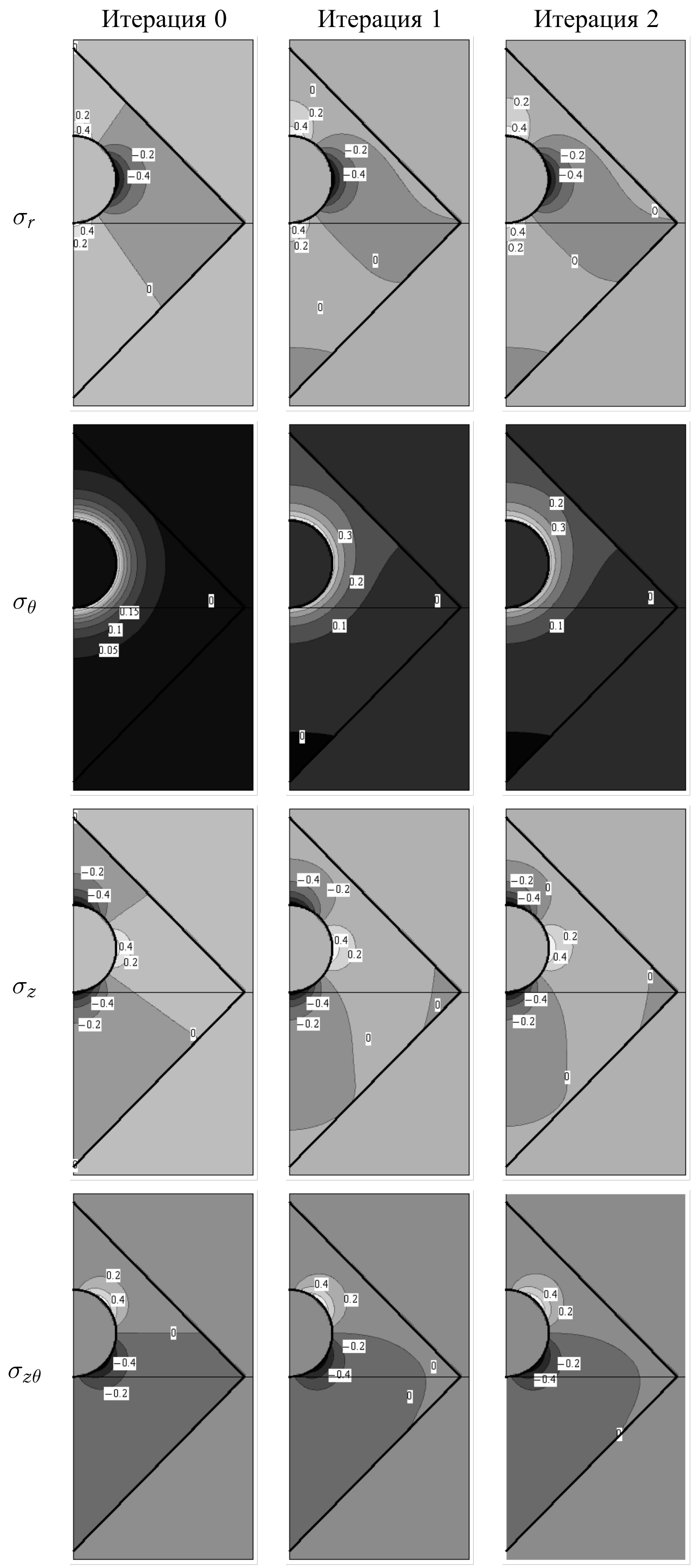

Рис. 2. *Купюры полей напряжений: σ_r — радиальное, σ_θ — окружное, σ_z — осевое, $\sigma_{z\theta}$ — сдвиговое напряжения*

тра полости, допускающее упругое состояние предразрушения. Граничные условия: боковые поверхности — свободны от нагрузки, полость нагружена постоянным внутренним давлением p_0.

Расчеты выполнялись для определяющих соотношений, представленных в обезразмеренной форме. Параметры обезразмеривания: μ — модуль сдвига, R — радиальный размер оснований конусов. Величина p_0 является масштабом на графиках, отображающих все напряжения, кроме интенсивности напряжений σ_i.

Расчеты выполнялись для трех вариантов безразмерного параметра $h \in \{0, 0.125, 0.25\}$. На рис. 2 приведен вариант для $h = 0.25$ и безразмерного радиуса сферической полости 0.25. Приведены иллюстрации для радиального σ_r, окружного σ_θ, осевого σ_z, сдвигового $\sigma_{z\theta}$ напряжений. Линии уровня помечены долями от p_0. Нулевой уровень напряжений соответствует фону сечения биконуса (внутренность полости, внешность биконуса).

Сравнение результатов итерационного процесса свидетельствует о весьма быстрой сходимости процесса Шварца (результаты второй итерации слабо отличаются от первой).

Оценка возможности появления критического состояния, вызывающего разрушение тела либо нарушения его функциональной способности из-за перехода в пластическое состояние, выполнена на основе расчета значения интенсивности напряжений (рис. 3, 4).

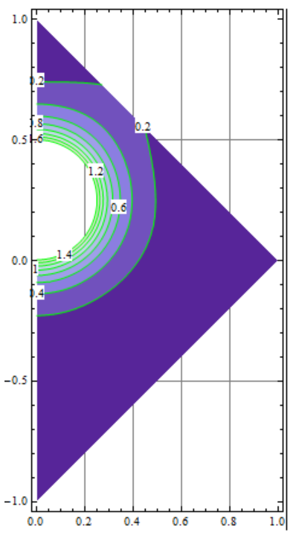

Рис. 3. *Изолинии* σ_i

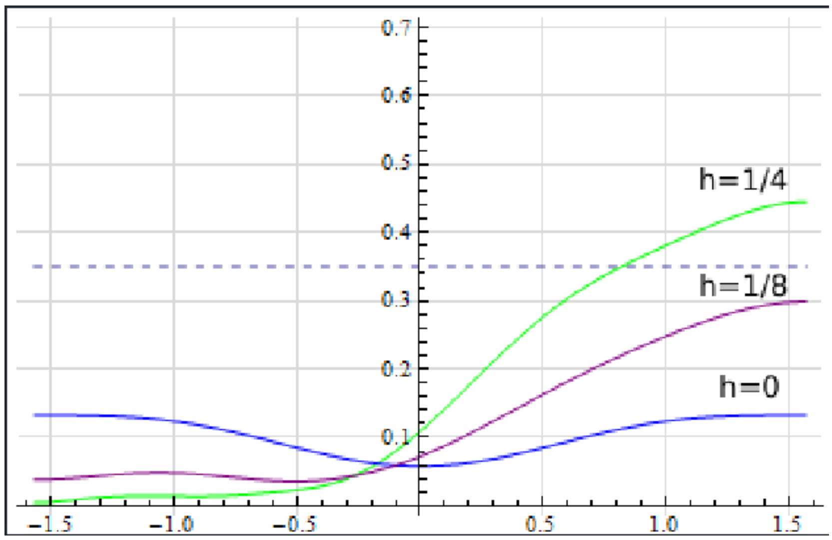

Рис. 4. *Значения* σ_i *на контуре полости*

Заданный характер нагружения свидетельствует о том, что наибольшие значения σ_i достигаются на границе полости. Характер их распределения в зависимости от угла $\alpha \in [-^{\pi}/_{2}, ^{\pi}/_{2}]$ широтной координаты полости для трех значений h приведен на рис. 4. Горизонтальная пунктирная линия условно обозначает предельное значение σ_i, превышение которого недопустимо. Серия графиков зависимости интенсивности напряжений от широты позволяет судить о функциональной допустимости локализации центра полости на высоте h.

Эффективным средством проведения вычислений зарекомендовала себя система Mathematica [7], поддерживающая «компьютерную алгебру».

Выводы: 1) использование «прямого» подхода требует существенных энергетических затрат: значительный рост величины мантиссы в представлении чисел при вычислениях и квадратично возрастающее время счета с ростом размерности удерживаемого отрезка базиса пространства внутренних состояний, в первую очередь, при проведении ортогонализации; 2) подход Шварца существенно снижает временные затраты и, несмотря на итерационность и отсутствие доказательства сжимаемости отображений при итерациях, приводит к цели гораздо эффективнее; 3) анализ зависимости НДС от параметров нагружения позволяет установить предельно допустимые значения варьируемых параметров при обеспечении прочности; 4) наличие сингулярностей формы тела (криволинейные ребра, конические тачки) требует разработки методов построения специальных решений для учета их влияния на НДС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. *Теория упругости.* М.: Наука; 1970. 940 с.
2. Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела.* М.: Наука; 1979. 744 с.
3. Penkov V. B., Satalkina L. V., Shulmin A. S. The Use of the Method of Boundary States to Analyse an Elastic Medium with Cavities and Inclusions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2014;78(4):384–394.
4. Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben. *Ges. Math. Abh.* 1869;11:65–83.
5. Пеньков В. Б., Рыбакова М. Р., Левина Л. В. Применение алгорифма Шварца к пространственным задачам теории упругости. *Известия ТулГУ. Естественные науки.* 2015;3:165–176.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: ФИЗМАТЛИТ; 2004. 517 с.
7. Курбатов В. Г., Чернов В. Е. *Пакет «Математика» в прикладных научных исследованиях: учебное пособие.* Воронеж: Издательский дом ВГУ; 2016. 241 с.