

DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-3-04

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕНДЕНЦИЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ СО СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ С ПОМОЩЬЮ МНОГОСЛОЙНЫХ МОДУЛЬНЫХ РЕГРЕССИЙ**М. П. Базилевский***Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, mik2178@yandex.ru*

Аннотация: статья посвящена проблеме моделирования технических и социально-экономических систем, динамика которых трансформируется за счет структурных изменений, что приводит к модификации параметров описывающих эту динамику трендов. Сформулирована трендовая модель многослойной модульной регрессии. Задача ее идентификации с помощью метода наименьших модулей формализована в виде задачи частично-булевого линейного программирования. С помощью предложенных моделей решено 3 задачи моделирования по временным рядам, содержащим тенденцию со структурными изменениями. Первая задача решена по данным о численности населения в Иркутской области, вторая и третья — по данным о грузовых и пассажирских железнодорожных перевозках. Построенные многослойные модульные регрессии, в отличие от линейных трендов, успешно выявили абсолютно все скрытые структурные изменения. Графически проиллюстрировано, как улучшается качество аппроксимации трендовых регрессий с ростом количества их слоев. Наиболее адекватные модели для каждой задачи были представлены в виде кусочно-заданных функций, что позволило дать им содержательную интерпретацию. Достоинство трендовых многослойных модульных регрессий в том, что на этапе оценивания автоматически определяются моменты времени, в которых меняется направление трендов.

Ключевые слова: регрессионный анализ, трендовая модель, многослойная модульная регрессия, интерпретация, метод наименьших модулей, задача частично-булевого линейного программирования, численность населения, железнодорожные перевозки.

Для цитирования: Базилевский М. П. Моделирование тенденций временных рядов со структурными изменениями с помощью многослойных модульных регрессий. *Успехи кибернетики*. 2024;5(3):34–41. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-3-04.

*Поступила в редакцию: 10.07.2024.**В окончательном варианте: 09.08.2024.***MODELING TIME SERIES TRENDS WITH STRUCTURAL CHANGES USING MULTILAYER MODULAR REGRESSIONS****M. P. Bazilevskiy***Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russian Federation
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, mik2178@yandex.ru*

Abstract: this study addresses the challenge of modeling technical and socio-economic systems whose dynamics evolve due to structural changes, resulting in shifts in the parameters of the trends that describe these dynamics. A trend model based on multilayer modular regression is proposed. The identification problem is formalized as a mixed 0-1 integer linear programming problem, solved using the least absolute deviations method. The efficacy of the proposed models is demonstrated through three case studies using time series that exhibit structural changes in their trends. The first case study focuses on population data from the Irkutsk region, while the second and third analyze freight and passenger rail transportation data. Unlike linear trend models, the multilayer modular regressions successfully identified all latent structural changes. Graphical illustrations demonstrate how increasing the number of regression layers enhances the quality of trend approximation. The most appropriate models for each case are presented as piecewise functions, enabling a meaningful interpretation of the results. The primary advantage of multilayer modular trend regressions is their ability to automatically detect time points at which trend directions change during the estimation process.

Keywords: regression analysis, trend model, multilayer modular regression, interpretation, least absolute deviations method, mixed 0-1 integer linear programming problem, population, railway transportation.

Cite this article: Bazilevskiy M. P. Modeling Time Series Trends with Structural Changes using Multilayer Modular Regressions. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(3):34–41. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-3-04.

Original article submitted: 10.07.2024.

Revision submitted: 09.08.2024.

Введение

Разработка новых и совершенствование существующих инструментов регрессионного анализа [1], относящегося к области машинного обучения [2], представляет собой актуальную научную задачу. При наличии выборки статистических данных регрессионный анализ традиционно начинается с выбора структурной спецификации модели, т. е. с поиска математической формы связи между переменными. К самым известным регрессионным моделям, с помощью которых успешно решаются разнообразные задачи анализа данных, можно отнести линейную [3], полиномиальную [4], степенную (производственную функцию Кобба–Дугласа) [5, 6] регрессии. Очень часто для построения той или иной регрессионной зависимости применяется аппарат математического программирования (см., например, [7, 8]). Например, с использованием такого аппарата легко могут быть найдены оценки неизвестных параметров производственной функции Леонтьева [9, 10].

Особое место среди структурных спецификаций в регрессионном анализе занимают неэлементарные регрессионные модели [11–15]. Например, в [11] предложена неэлементарная регрессия с мультиарными операциями $\min$ и $\max$, обобщающая как линейную регрессию, так и производственную функцию Леонтьева. В [12] введена модульная регрессия, в которой, как следует из названия, входные переменные преобразуются с помощью операции модуль числа. Там же предложен алгоритм ее оценивания с помощью метода наименьших модулей (МНМ), а в [13] — с помощью метода наименьших квадратов. В [14] рассмотрены модульные регрессии с мультиарной операцией модуль, на основе которых в [15] введены многослойные модульные регрессии (ММР), сконструированные по принципу «модуль в модуле». Там же задача оценивания ММР с помощью МНМ была формализована в виде задачи частично-булевого линейного программирования (ЧБЛП).

Как отмечено в [16] со ссылкой на известный учебник по эконометрике И. И. Елисеевой, при функционировании сложных технических и социально-экономических систем за счет структурных изменений или иных факторов может меняться характер их динамики, что приводит к изменению описывающих эту динамику параметров тренда. В такой ситуации предлагается использовать, например, статистический тест Г. Чоу [17, 18], состоящий в выборе между единым уравнением тренда и кусочно-линейной функцией, либо статистический тест Д. Гуярати [19], основанный на включении в модель регрессии одной или нескольких фиктивных переменных. В обоих случаях проблема состоит в том, что заранее неизвестна точка переключения с одной зависимости на другую.

Модели ММР содержат в своей структуре модули, поэтому любую такую построенную регрессию можно представить в виде кусочно-заданной функции и дать ей интерпретацию. Получается, что при построении тренда со структурными изменениями с помощью ММР автоматически должны определяться точки переключения между уравнениями. В этой связи была сформулирована цель: доказать эффективность ММР при моделировании тенденций временных рядов со структурными изменениями.

Постановка задачи

Пусть имеется временной ряд, содержащий показания времени $t = 1, 2, \dots, n$ и соответствующие им уровни ряда y_t , $t = \overline{1, n}$, переменной y . Тогда трендовую модель p -слойной модульной регрессии, в соответствии с результатами работы [15], можно записать в виде:

$$y_t = \alpha_{0,p} + \alpha_{1,p} \cdot t + (-1)^{\Delta_p} \cdot |z_{t,p-1}| + \varepsilon_t, t = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$z_{t,k} = \alpha_{0,k} + \alpha_{1,k} \cdot t + (-1)^{\Delta_k} \cdot |z_{t,k-1}|, t = \overline{1, n}, k = \overline{1, p-1}, \quad (2)$$

$$z_{t,0} = \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0} \cdot t, t = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $z_{t,k}$ — неизвестное выходное значение в момент времени t на k -м слое; $\alpha_{0,k}$, $\alpha_{1,k}$ — неизвестные параметры на k -м слое; бинарная переменная Δ_k может принимать значение 0, если на k -м слое перед операцией модуль стоит знак «+», и 1, если знак «−»; ε_t — ошибка аппроксимации в момент времени t на p -м слое.

Для нахождения оценок неизвестных параметров трендовой модели (1) – (3) с помощью МНМ требуется решить следующую задачу ЧБЛП:

$$\sum_{t=1}^n (g_t + h_t) \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$u_{t,0} - v_{t,0} = \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0} \cdot t, t = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$u_{t,k} - v_{t,k} \leq \alpha_{0,k} + \alpha_{1,k} \cdot t + (-1)^{\varphi_{q,k}} (u_{t,k-1} + v_{t,k-1}) + M - M \cdot \sigma_q, \\ t = \overline{1, n}, k = \overline{1, p-1}, q = \overline{1, 2^p}, \quad (6)$$

$$u_{t,k} - v_{t,k} \geq \alpha_{0,k} + \alpha_{1,k} \cdot t + (-1)^{\varphi_{q,k}} (u_{t,k-1} + v_{t,k-1}) - M + M \cdot \sigma_q, \\ t = \overline{1, n}, k = \overline{1, p-1}, q = \overline{1, 2^p}, \quad (7)$$

$$y_t \leq \alpha_{0,p} + \alpha_{1,p} \cdot t + (-1)^{\varphi_{q,p}} (u_{t,p-1} + v_{t,p-1}) + g_t - h_t + M - M \cdot \sigma_q, \\ t = \overline{1, n}, q = \overline{1, 2^p}, \quad (8)$$

$$y_t \geq \alpha_{0,p} + \alpha_{1,p} \cdot t + (-1)^{\varphi_{q,p}} (u_{t,p-1} + v_{t,p-1}) + g_t - h_t - M + M \cdot \sigma_q, \\ t = \overline{1, n}, q = \overline{1, 2^p}, \quad (9)$$

$$\sigma_q \in \{0, 1\}, q = \overline{1, 2^p}, \quad (10)$$

$$\sum_{q=1}^{2^p} \sigma_q = 1, \quad (11)$$

$$u_{t,k} \leq M \cdot \delta_{t,k}, t = \overline{1, n}, k = \overline{0, p-1}, \quad (12)$$

$$v_{t,k} \leq M \cdot (1 - \delta_{t,k}), t = \overline{1, n}, k = \overline{0, p-1}, \quad (13)$$

$$\delta_{t,k} \in \{0, 1\}, t = \overline{1, n}, k = \overline{0, p-1}, \quad (14)$$

$$u_{t,k} \geq 0, v_{t,k} \geq 0, t = \overline{1, n}, k = \overline{0, p-1}, \quad (15)$$

$$g_t \geq 0, h_t \geq 0, t = \overline{1, n}, \quad (16)$$

где $u_{t,k}, v_{t,k}$ — неотрицательные числа, разница между которыми равна выходному значению переменной $z_{t,k}$ в момент времени t на k -м слое, а сумма равна $|z_{t,k}|$, причем $u_{t,k} \cdot v_{t,k} = 0$; g_t, h_t — неотрицательные числа, разница между которыми равна остатку модели в момент времени t , а сумма равна модулю остатка, причем, $g_t \cdot h_t = 0$; M — большое положительное число; $\varphi_{q,k}$ — элементы матрицы Φ размера $2^p \times p$, строки которой содержат все комбинации размещений с повторениями из элементов множества $\{0, 1\}$ по p ; σ_q — бинарная переменная, которая равна 1, если знаки перед модулями в модели соответствуют q -й строке матрицы Φ , и 0 — в противном случае; $\delta_{t,k}$ — бинарная переменная, которая равна 1, если выходное значение переменной $z_{t,k} \geq 0$, и 0 — в противном случае.

Подчеркнем, что задача ЧБЛП (4) — (16) для трендовой ММР (1) — (3) представляет собой частный случай задачи ЧБЛП для ММР с несколькими объясняющими переменными, предложенной в [15].

Моделирование численности населения, а также грузовых и пассажирских перевозок с помощью трендовых моделей и по сей день актуально (см., например, [20, 21]). Однако делается это в основном с помощью линейных и параболических трендов.

Для демонстрации эффективности ММР (1) — (3) при моделировании тенденций временных рядов со структурными изменениями было решено использовать следующие временные ряды за период с 2000 по 2021 годы:

y_1 — численность населения (тысяч человек);

y_2 — отправление грузов железнодорожным транспортом общего пользования (млн тонн);

y_3 — отправление пассажиров железнодорожным транспортом общего пользования (тысяч человек).

В качестве показаний времени выбраны моменты $t = 1, 2, \dots, 22$. Например, момент времени $t = 1$ означает 2000 год, а $t = 22$ — 2021 год.

Эти временные ряды характеризуют социально-экономическое положение Иркутской области и содержатся в базах данных Федеральной службы государственной статистики (<https://rosstat.gov.ru/>).

Была поставлена задача провести 3 эксперимента: для каждого временного ряда построить с помощью МНМ простой линейный тренд, а также трендовую однослойную и двухслойную модульную регрессию. При этом для каждого случая провести фиксацию уравнения регрессии, времени T решения задачи ЧБЛП в секундах, величины суммы модулей остатков $J = \sum_{t=1}^{22} |e_t|$, а также построить графики наблюдаемых и прогнозных по модели значений зависимых переменных, выбрать наиболее адекватную регрессию и интерпретировать ее.

Результаты экспериментов и их обсуждение

Для решения задач ЧБЛП (4) — (16) был использован оптимизационный пакет LPSolve IDE. Большое число M в этих задачах неизменно и составило 100000. Линейные тренды оценивались с помощью эконометрического пакета Gretl. Все вычисления проводились на стандартном персональном компьютере с процессором AMD Ryzen 3 4300U (2,70 ГГц) и объемом оперативной памяти 16 Гб.

Эксперимент №1. При моделировании численности населения был идентифицирован линейный тренд вида:

$$\bar{y}_1 = 2561,33 - 9,2833 \cdot t, \quad (17)$$

однослойная модульная регрессия вида:

$$\bar{y}_1 = 2571,94 - 15,77 \cdot t + |z_0|, \quad (18)$$

$$z_0 = 80,54 - 10,67 \cdot t \quad (19)$$

и двухслойная модульная регрессия вида:

$$\bar{y}_1 = 2640,298412 - 12,273412 \cdot t - |z_1|, \quad (20)$$

$$z_1 = -66,16369 - 3,886309 \cdot t + |z_0|, \quad (21)$$

$$z_0 = 86,290277 - 11,415277 \cdot t. \quad (22)$$

Для модели (17) $T = 0,001$ сек., $J = 489,0167$, для (18)–(19) $T = 0,206$ сек., $J = 92,12$, для (20)–(22) $T = 1394,408$ сек., $J = 52,0663$.

Для построения графиков удобнее представить иерархическую структуру (18)–(19) в виде:

$$\bar{y}_1 = 2571,94 - 15,77 \cdot t + |80,54 - 10,67 \cdot t|, \quad (23)$$

а (20)–(22) в виде:

$$\bar{y}_1 = 2640,298 - 12,27341 \cdot t - |-66,163 - 3,88631 \cdot t + |86,29 - 11,41528 \cdot t||. \quad (24)$$

Графики функций (17), (23) и (24) на отрезках $t \in [0, 23]$ отражены сплошными линиями на рисунках 1а, 1б и 1в соответственно. На тех же рисунках точками обозначены наблюдаемые значения переменной y_1 . По рисунку 1 видно, что временной ряд y_1 имеет тенденцию со структурными изменениями, поэтому применение линейного тренда дает плохие результаты (рис. 1а). Однослойная модульная регрессия (рис. 1б) дает неплохие результаты при $t \in [1, 20]$, но при $t = 21$ и $t = 22$, по-видимому, снова начинаются структурные изменения, и одного слоя уже не хватает для адекватного описания динамики. Двухслойная модульная регрессия (рис. 1в) все структурные изменения выявила очень точно, поэтому было решено интерпретировать именно ее.

Для этого уравнение (24) было представлено в виде кусочно-заданной функции:

$$\bar{y}_1 = \begin{cases} 2620,171 + 3,02818 \cdot t, & \text{если } t \leq 1,315, \\ 2660,425 - 27,575 \cdot t, & \text{если } 1,315 < t \leq 7,559, \\ 2487,845 - 4,74444 \cdot t, & \text{если } 7,559 < t < 20,249, \\ 2792,751 - 19,80238 \cdot t, & \text{если } t \geq 20,249. \end{cases}$$

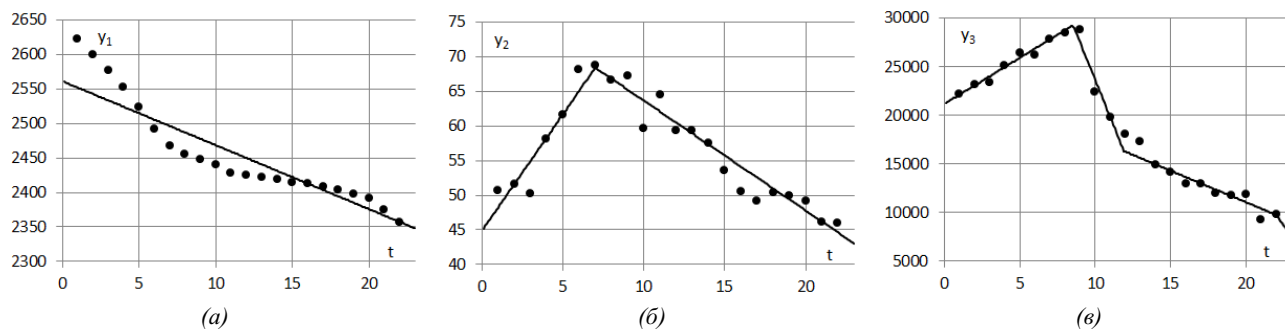


Рис. 1. Графики трендов временного ряда y_1

Тогда справедливы следующие выводы. С начала 2000 года по июнь-июль 2006 года численность населения Иркутской области убывала по закону $2660,425 - 27,575 \cdot t$, т. е. в год примерно на 27,575 тыс. чел., с июня-июля 2006 года по февраль-март 2019 года скорость убывания замедлилась и составила примерно 4,744 тыс. чел. в год, а с февраля-марта 2019 года скорость убывания снова выросла примерно по 19,802 тыс. чел. в год.

Эксперимент №2. При моделировании грузоперевозок был идентифицирован линейный тренд вида:

$$\bar{y}_2 = 67,1 - 0,9 \cdot t, \quad (25)$$

однослойная модульная регрессия вида:

$$\bar{y}_2 = 62,20833 + 0,88928 \cdot t - |17,34166 - 2,47738 \cdot t|, \quad (26)$$

двухслойная модульная регрессия вида:

$$\bar{y}_2 = 56,125 + 2,17976 \cdot t - |0,13452 - 6,35119 \cdot t + |23,95952 - 10,13809 \cdot t||. \quad (27)$$

Для модели (25) $T = 0,001$ сек., $J = 106,4$, для (26) $T = 40,509$ сек., $J = 34,2238$, для (27) $T = 1010,048$ сек., $J = 26,25238$.

Графики функций (25)–(27) и наблюдаемые значения переменной y_2 отражены на рисунках 2а, 2б и 2в соответственно. По рисунку 2 видно, что тенденция временного ряда y_2 содержит структурные изменения, поэтому применение линейного тренда дает плохие результаты (рис. 2а). Однослойная модульная регрессия (рис. 2б) безупречно выявила структурные изменения. Применение двухслойной модульной регрессии (рис. 2в), судя по всему, из-за переобучения, приводит к нестабильности прогнозов при $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$. Поэтому решено интерпретировать однослойную регрессию (26).

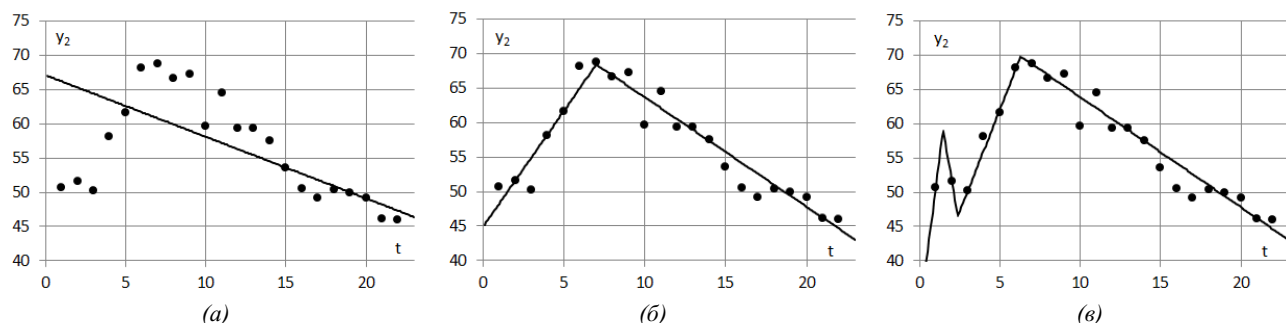


Рис. 2. Графики трендов временного ряда y_2

Уравнение (26) в виде кусочно-заданной функции имеет вид:

$$\bar{y}_2 = \begin{cases} 44,86666 + 3,36666 \cdot t, & \text{если } t \leq 7, \\ 79,55 - 1,5881 \cdot t, & \text{если } t > 7. \end{cases}$$

Из этого следует, что до 2006 года отправление грузов железнодорожным транспортом общего пользования в Иркутской области возрастало по закону $44,8666 + 3,3666 \cdot t$, т. е. примерно на 3,3666 млн тонн в год, а с 2006 года тенденция сменилась в противоположную сторону: грузовые перевозки убывают со скоростью примерно 1,5881 млн тонн в год.

Эксперимент №3. При моделировании перевозок пассажиров был идентифицирован линейный тренд вида:

$$\tilde{y}_3 = 28795,6 - 894,714 \cdot t, \quad (28)$$

однослойная модульная регрессия вида:

$$\tilde{y}_3 = 27213,25 - 55,75 \cdot t - |6155,75 - 1131,25 \cdot t|, \quad (29)$$

двухслойная модульная регрессия вида:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_3 = & 41623,3333 - 1448,469696 \cdot t - \\ & - |1415,86666 - 797,76666 \cdot t + |19021,8 - 1598,03636 \cdot t||. \end{aligned} \quad (30)$$

Для модели (28) $T = 0,001$ сек., $J = 48701$, для (29) $T = 13,587$ сек., $J = 29264$, для (30) $T = 4215,317$ сек., $J = 11558,127$.

Графики функций (28)–(30) и наблюдаемые значения переменной y_3 отражены на рисунках 3а, 3б и 3в соответственно. На рисунке 3 снова наблюдаются структурные изменения тенденции временного ряда y_3 , поэтому применение линейного тренда дает плохие результаты (рис. 3а). Те же результаты дает однослойная модульная регрессия (рис. 3б). А двухслойная модульная регрессия (рис. 3в) выявила абсолютно все структурные изменения, поэтому была подвергнута интерпретации.

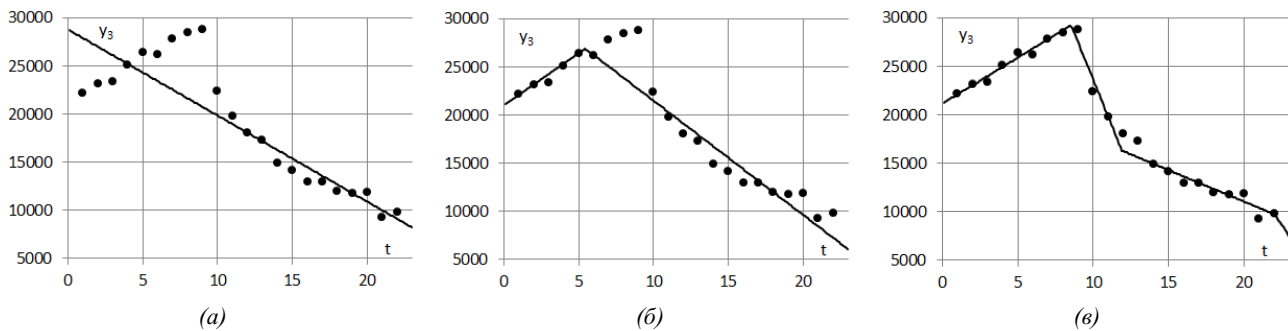


Рис. 3. Графики трендов временного ряда y_3

Уравнение (30) в виде кусочно-заданной функции можно представить как:

$$\tilde{y}_3 = \begin{cases} 21185,66666 + 947,33333 \cdot t, & \text{если } t \leq 8,531, \\ 62061 - 3844,27271 \cdot t, & \text{если } 8,531 < t \leq 11,903, \\ 24017,4 - 648,2 \cdot t, & \text{если } 11,903 < t < 22, \\ 59229,26666 - 2248,73939 \cdot t, & \text{если } t \geq 22. \end{cases}$$

Тогда справедливы следующие заключения. С начала 2000 года по июнь–июль 2007 года отправление пассажиров железнодорожным транспортом общего пользования в Иркутской области возрастало по закону $21185,666 + 947,333 \cdot t$, т. е. в год примерно на 947,333 тыс. чел., с июня–июля 2007 года по октябрь–ноябрь 2010 года возрастание сменилось на убывание со скоростью примерно 3844,273 тыс. чел. в год, а с октября–ноября 2010 года по 2021 год скорость убывания уменьшилась примерно до 648,2 тыс. чел. в год.

Заключение

В статье впервые сформулирована трендовая ММР. Задача ее оценивания с помощью МНМ формализована в виде задачи ЧБЛП. Трендовая ММР применена для моделирования тенденций временных рядов со структурными изменениями. При этом решены задачи моделирования численности

населения, отправления грузов и пассажиров железнодорожным транспортом в Иркутской области. Во всех задачах трендовые ММР успешно выявили абсолютно все структурные изменения. При этом, в отличие от статистических тестов Г. Чоу и Д. Гуйарати, при оценивании модульных регрессий автоматически идентифицируются точки переключения кусочно-заданных функций. Дана интерпретация построенных моделей. Эксперименты показали, что чем больше слоев в ММР, тем точнее модель, но время ее оценивания существенно увеличивается. Однако большое число слоев может приводить к переобучению модели. Таким образом, доказана эффективность ММР при моделировании тенденций временных рядов со структурными изменениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Montgomery D. C., Peck E. A., Vining G. G. *Introduction to Linear Regression Analysis*. John Wiley & Sons; 2021.
2. Molnar C. *Interpretable machine learning*. Lulu.com; 2020.
3. Maulud D., Abdulazeez A. M. A Review on Linear Regression Comprehensive in Machine Learning. *Journal of Applied Science and Technology Trends*. 2020;1(2):140–147. DOI: 10.38094/jastt1457.
4. Tsai C. Y., Kim J., Jin F., Jun M., Cheong M., Yammarino F. J. Polynomial Regression Analysis and Response Surface Methodology in Leadership Research. *The Leadership Quarterly*. 2022;33(1):101592. DOI: 10.1016/j.leaqua.2021.101592.
5. Sharma A., Chaudhary N. Prediction of Software Effort by Using Non-Linear Power Regression for Heterogeneous Projects Based on Use Case Points and Lines of Code. *Procedia Computer Science*. 2023;218:1601–1611. DOI: 10.1016/j.procs.2023.01.138.
6. Başeğmez H. Estimation of Cobb–Douglas Production Function for Developing Countries. *Journal of Research in Business*. 2021;6(1):54–68. DOI: 10.29228/JRB.3.
7. Chung S., Park Y. W., Cheong T. A Mathematical Programming Approach for Integrated Multiple Linear Regression Subset Selection and Validation. *Pattern Recognition*. 2020;108:107565. DOI: 10.1016/j.patcog.2020.107565.
8. Park Y. W., Klabjan D. Subset Selection for Multiple Linear Regression Via Optimization. *Journal of Global Optimization*. 2020;77(3):543–574. DOI: 10.1007/s10898-020-00876-1.
9. Клейнер Г. Б. *Производственные функции: Теория, методы, применение*. М.: Финансы и статистика; 1986. 239 с.
10. Носков С. И. *Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных*. Иркутск: Облформпечать; 1996. 321 с.
11. Базилевский М. П. Обобщение неэлементарных линейных регрессий. *Моделирование и анализ данных*. 2023;13(2):85–98. DOI: 10.17759/mda.2023130205.
12. Базилевский М. П., Ойдопова А. Б. Оценивание модульных линейных регрессионных моделей с помощью метода наименьших модулей. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления*. 2023;(45):130–146. DOI: 10.15593/2224-9397/2023.1.06.
13. Базилевский М. П. Программное обеспечение для оценивания модульных линейных регрессий. *Информационные и математические технологии в науке и управлении*. 2023;3:136–146. DOI: 10.25729/ESI.2023.31.3.013.
14. Базилевский М. П. Оценивание регрессионных моделей с мультиарной операцией модуль методом наименьших модулей. *Инженерный вестник Дона*. 2024;(5). Режим доступа: <http://www.ivdon.ru/r/magazine/archive/n5y2024/9188>.
15. Базилевский М. П. Оценивание неизвестных параметров многослойной модульной регрессии методом наименьших модулей. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2024;12(2). Режим доступа: <https://moitvivr.ru/ru/journal/pdf?id=1581>.
16. Афанасьева О. В., Колесниченко С. В., Новожилов И. М. Теоретические аспекты анализа структурных сдвигов при исследовании процессов динамики сложных технических и социально-экономических систем. *Инновации*. 2018;10:108–112.
17. Боченина М. В. Прогнозирование цен на рынке жилья в условиях изменения основной тенденции. *Теория и практика общественного развития*. 2023;8:137–142. DOI: 10.24158/tipor.2023.8.16.

18. Голованов О. А., Тырсин А. Н., Васильева Е. В. Оценка влияния пандемии COVID-19 на тренды социально-экономического развития региона России: кейс Свердловской области. *Journal of Applied Economic Research*. 2022;21(2):257–281. DOI: 10.15826/vestnik.2022.21.2.010.
19. Gujarati D. N. *Essentials of econometrics*. Sage Publications; 2021.
20. Архангельская Л. Ю., Жалнина И. Н. Комплексный структурно-динамический анализ движения численности населения Воронежской области за 2017–2021 годы. *Гуманитарные науки. Вестник Финансового университета*. 2023;13(5):104–113. DOI: 10.26794/2226-7867-2023-13-5-104-113.
21. Домнина О. Л., Шалаева Ж. Ю. Прогнозирование объемов перевозок пассажиров внутренним водным транспортом. *Научные проблемы водного транспорта*. 2022;72:102–110.