

DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-07

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ПРОФИЛЯ КРЫЛА****А. А. Рассадин<sup>1,a</sup>, А. В. Ряховский<sup>2,1,b</sup>**<sup>1</sup> Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация<sup>2</sup> Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Сургут, Российская Федерация<sup>a</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5596-0891>, ✉ [rassadin\\_aa@edu.surgu.ru](mailto:rassadin_aa@edu.surgu.ru)<sup>b</sup> [ryakhovskij\\_av@surgu.ru](mailto:ryakhovskij_av@surgu.ru)

*Аннотация:* в статье рассмотрена задача об обтекании крыла турбулентным потоком; проведено сравнение полученных данных с результатами численных и натуральных экспериментов других авторов; для моделирования турбулентности использовались уравнения, усредненные по Рейнольдсу, совместно с моделью Спаларта–Аллмараса; расчеты выполнены средствами программной платформы OpenFOAM.

*Ключевые слова:* моделирование турбулентности, несжимаемая жидкость, обтекание крыла НАСА0012, верификация платформы OpenFOAM.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН по теме № FNEF-2024-0001 «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах» (1023032100070-3-1.2.1).

*Для цитирования:* Рассадин А. А., Ряховский А. В. Моделирование турбулентного течения на примере задачи об обтекании профиля крыла. *Успехи кибернетики*. 2024;5(2):64–74. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-07.

*Поступила в редакцию:* 13.05.2024.*В окончательном варианте:* 24.05.2024.**TURBULENT FLOW SIMULATION FOR THE WING AIRFOIL ANALYSIS PROBLEM****A. A. Rassadin<sup>1,a</sup>, A. V. Ryakhovskij<sup>2,1,b</sup>**<sup>1</sup> Surgut State University, Surgut, Russian Federation<sup>2</sup> Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation<sup>a</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5596-0891>, ✉ [rassadin\\_aa@edu.surgu.ru](mailto:rassadin_aa@edu.surgu.ru)<sup>b</sup> [ryakhovskij\\_av@surgu.ru](mailto:ryakhovskij_av@surgu.ru)

*Abstract:* this paper considers the problem of turbulent flow around an airfoil. The data obtained were compared with the results of numerical and physical experiments by others. Turbulence is modeled through Reynolds-averaged Navier–Stokes equations together with the Spalart–Allmaras model. We used the OpenFOAM software for the analysis.

*Keywords:* turbulent flow simulation, incompressible flow, NACA0012 airfoil, OpenFOAM verification.

*Acknowledgements:* this study is a part of the FNEF-2024-0001 government order contracted to the Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, project No.1023032100070-3-1.2.1 Development and Implementation of Trusted Artificial Intelligence Systems Based on new Mathematical Methods and Algorithms, Fast Computing Models for Domestic Computing Systems.

*Cite this article:* Rassadin A. A., Ryakhovskij A. V. Turbulent Flow Simulation for the Wing Airfoil Analysis Problem. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(2):64–74. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-07.

*Original article submitted:* 13.05.2024.*Revision submitted:* 24.05.2024.

## Введение

Как известно, в природе и технических устройствах преобладают турбулентные течения. Например, движение воздушных масс в атмосфере Земли, следы при обтекании судов, автомобилей и летательных аппаратов. Турбулентность обеспечивает интенсивное перемешивание вещества, этим часто пользуются в химической промышленности.

В турбулентном течении происходят хаотические изменения скорости и давления. Оно крайне неустойчиво, то есть малейшие изменения начальных или граничных условий приводят к существенным различиям при дальнейшем развитии потока. Причем турбулентность не связана со свойствами вещества, а является одним из видов движения сплошной среды [1].

В настоящее время при изучении различных физических процессов часто прибегают к вычислительным экспериментам. Этот метод исследования не требует больших затрат, которые могут возникнуть при проведении натурных измерений. Также с помощью компьютера можно за сравнительно небольшое время провести целую серию симуляций при различных условиях. Но нужно заметить, что результаты, полученные в ходе вычислительного эксперимента, напрямую зависят от используемой математической модели.

Для решения задач механики сплошных сред разработано множество специальных программ, которыми пользуются как ученые-исследователи, так и обычные инженеры. При разработке численных методов обязательно учитывают влияние турбулентности. Но «прямое» численное моделирование турбулентности приводит к огромным вычислительным затратам, поэтому существуют различные способы моделирования турбулентности. В рамках каждого из них существует несколько моделей, разработанных под конкретные частные случаи течений.

В зависимости от программы реализация одной и той же математической модели может отличаться. Поэтому для выбранной программы проводят так называемую верификацию. В процессе верификации данные, полученные в выбранной программе, сравнивают с «эталонными» значениями, чаще всего это результаты натурных экспериментов. Верифицированную программу можно использовать для численного исследования процессов механики сплошных сред.

В данной работе проведена верификация программной платформы OpenFOAM [2] на примере задачи об обтекании крыла турбулентным дозвуковым потоком [3]. Сделано сравнение результатов расчетов, выполненных с использованием средств OpenFOAM, с данными численных [4] и натурных [5], [6] экспериментов других авторов.

## Математическое моделирование турбулентности

### Основные уравнения механики сплошных сред

Математические модели механики сплошных сред предполагают, что жидкость или газ непрерывно заполняют рассматриваемую область пространства. Поэтому в уравнениях фигурируют **макроскопические характеристики**:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^3, t \geq 0 \\ \rho = \rho(\mathbf{x}, t) \text{ — плотность} \\ p = p(\mathbf{x}, t) \text{ — давление} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t)) \text{ — скорость.} \end{cases} \quad (1)$$

При описании состояния сплошной среды могут быть использованы и другие макроскопические характеристики, например, температура  $T(\mathbf{x}, t)$ . Но в данной работе рассматривается вязкая, несжимаемая, изотермическая сплошная среда. При таком предположении являются постоянными плотность среды  $\rho \equiv const$  и её вязкость  $\mu \equiv const$ .

**Уравнения движения**<sup>1</sup> для трехмерного течения вязкой несжимаемой жидкости [7]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} + \nu \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x^i} + \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \right) + f_i, \quad i = 1, 2, 3$$

где  $f_i$  — удельная объемная сила, (2)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ — кинематическая вязкость } (\mu, \rho \equiv const).$$

<sup>1</sup> В работе используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Например, в выражении  $a^k b_k$  подразумевается суммирование:  $a^k b_k = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3$  (число слагаемых определяется из контекста).

Выражения (2) называют **уравнениями Навье–Стокса**. При фиксированном значении индекса  $i$  в левой части равенства (2) записано удельное изменение импульса, а в правой части — сумма сил, действующих на элемент среды. К уравнениям Навье–Стокса добавляется *ограничение*, называемое **уравнением неразрывности**. Оно отражает закон сохранения массы и для несжимаемой среды записывается в виде:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x^k} = 0. \quad (3)$$

В настоящее время считается [1], [7], [8], что уравнения Навье–Стокса пригодны для описания турбулентности. Турбулентное движение очень сложное, в частности, в нем возникают вихри различных масштабов. Поэтому расчет нужно проводить на очень мелких пространственно-временных сетках, которые учитывают масштабы самых мелких вихрей. Из-за этого прямое численное решение уравнений (2), (3) требует огромных вычислительных ресурсов. Для практических расчетов прибегают к различным способам моделирования турбулентности.

Режим течения можно определить через число Рейнольдса [7], [9]  $Re = \frac{\rho VL}{\eta} = \frac{VL}{\nu}$ , где  $\rho$  — плотность среды,  $V$  и  $L$  — характерные скорость и длина соответственно,  $\eta$  — динамическая вязкость,  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  — кинематическая вязкость. Для различных областей течения существуют критические значения числа Рейнольдса  $Re_{кр}$ . Течение считается турбулентным, если  $Re > Re_{кр}$ .

### Моделирование турбулентности методом RANS

В данной работе используется метод RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes) [7], [8]. При таком подходе расчет ведется только для *средних* значений скорости и давления. При этом используется так называемое **Рейнольдсово разложение**:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \quad p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t) + p'(\mathbf{x}, t). \quad (4)$$

Согласно формуле (4) скорость и давление состоят из двух компонент: *средней* ( $\mathbf{U}, P$ ) и *хаотически изменяющейся* ( $\mathbf{u}', p'$ ). При теоретическом обосновании RANS подхода могут использоваться различные способы вычисления средних значений скорости и давления [7], [8].

Наиболее общим считается **статистическое усреднение** [8]. С этой точки зрения величины в турбулентном потоке рассматриваются как **случайные процессы**. Например, для скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  это означает, что в фиксированной точке  $\mathbf{x}_0$  переменная  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$  будет **случайной величиной** для каждого момента времени. При описании всех возможных значений скорости трехмерного течения вводится пространство  $\mathbb{R}^3$ . Для скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  вводится **функция плотности вероятности** (ФПВ)  $f_u(\mathbf{V}; \mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющая условию нормировки:

$$\forall (\mathbf{x}_0, t_0) \in D : \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_u(\mathbf{V}; \mathbf{x}_0, t_0) dV_1 dV_2 dV_3 = 1, \quad (5)$$

где  $D$  — расчетная область.

Операция статистического усреднения обозначается горизонтальной чертой. По определению среднее значение скорости вычисляется с помощью функции плотности вероятности по следующей формуле:

$$\overline{u_i(\mathbf{x}, t)} = U_i(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V_i f_u(\mathbf{V}; \mathbf{x}, t) dV_1 dV_2 dV_3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Для определения усредненного давления  $P(\mathbf{x}, t)$  проводятся почти аналогичные выкладки с естественным учетом того, что в отличие от векторного поля скорости давление является скалярным полем.

Усредненное уравнение неразрывности (7) получается подстановкой разложения (4) в уравнение (3):

$$\frac{\partial U_k}{\partial x^k} = 0. \quad (7)$$

Равенство (7) формально не отличается от исходного уравнения (3), так как уравнение неразрывности *линейное*. Уравнения Навье–Стокса (2) содержат *нелинейные* слагаемые, поэтому их усредненная форма (8) отличается от исходной (2):

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x^k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x^i} + \nu \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x^i} + \frac{\partial U_i}{\partial x^k} \right) + \overline{f_i} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \overline{u'_i u'_k} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

В усредненных уравнениях (8) есть дополнительные неизвестные величины  $-\overline{u'_i u'_k}$ , которые образуют тензор **Рейнольдсовых напряжений** [1]. Слагаемые вида  $-\overline{u'_i u'_k}$  появляются в результате усреднения *конвективной части* изменения импульса элемента жидкости. Их можно интерпретировать как дополнительные силы, изменяющие *средний импульс* элементов жидкости. Это проявляется в том, что у жидкости «увеличивается» вязкость.

Различные модели турбулентности в рамках RANS подхода отличаются тем, как в них рассчитываются Рейнольдсовы напряжения  $-\overline{u'_i u'_k}$ . Наиболее распространены модели, которые связаны с расчетом турбулентной вязкости. Концепция турбулентной вязкости была предложена французским ученым Жозефом Буссинеском в 1877 году, когда он выдвинул следующую гипотезу: *Рейнольдсовы напряжения пропорциональны градиентам компонент средней скорости течения* [8]. Аналитически гипотеза Буссинеска выражается формулой:

$$-\overline{u'_i u'_k} = \nu_t \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x^k} + \frac{\partial U_k}{\partial x^i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ik},$$

где  $\nu_t$  – турбулентная вязкость  $[\nu_t] = \left[ \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right]$ ,

$$k = \frac{1}{2} \left( \overline{u'_k u'_k} \right) \text{ – кинетическая энергия турбулентности,}$$

$$\delta_{ik} \text{ – символ Кронекера: } \begin{cases} \delta_{ik} = 0, & i \neq k \\ \delta_{ik} = 1, & i = k \end{cases}.$$

Формула (9) является определением турбулентной вязкости  $\nu_t$ . Фактически Буссинеск предположил, что для Рейнольдсовых напряжений справедлив закон, аналогичный закону вязкости Ньютона [1]. Нужно заметить, что *турбулентная вязкость  $\nu_t$  не является физическим свойством среды. Это лишь искусственный коэффициент пропорциональности.* Сравнение размерностей в формуле (9) и уравнениях RANS подхода (8) приводит к тому, что коэффициент  $\nu_t$  должен быть пропорционален средней скорости. Следовательно,  $\nu_t$  может изменяться в различных точках области течения.

### Модель Спаларта–Аллмараса

Эта модель была представлена 1994 году в научной работе [10]. Изначально она разрабатывалась для аэродинамических расчетов. Сейчас ее часто используют и в других случаях, например, при моделировании процессов в турбинах.

Авторы модели вводят *промежуточную* величину  $\tilde{\nu}$ . Турбулентная вязкость  $\nu_t$  рассчитывается с помощью величины  $\tilde{\nu}$  по формуле:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad c_{v1}, \nu \equiv const. \quad (10)$$

На вспомогательную величину  $\tilde{\nu}$  эмпирически выведено дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x^k} = \\ = c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} - \left[ c_{\omega 1} f_{\omega} - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} \right] \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x^k} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x^k} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x^j} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Левая часть уравнения (11) – это стандартная форма «полной» производной по времени для величины  $\tilde{\nu}$ , находящейся в *несжимаемом* течении [8]. Слагаемые в правой части (11) можно разделить на 3 группы:

1. Согласно гипотезе Буссинеска (9) Рейнольдсовы напряжения, для моделирования которых используется величина  $\tilde{\nu}$ , тем больше, чем больше градиенты средних скоростей. Для этого введено слагаемое:

$$c_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\tilde{\nu}.$$

2. Эффекты турбулентности уменьшаются по мере приближения к твердым стенкам. Потому что становится существенным наличие молекулярной вязкости. Это обстоятельство учитывается слагаемым:

$$- \left[ c_{\omega 1} f_{\omega} - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} \right] \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2.$$

3. Для подавления явлений, связанных с отрывом течения от поверхностей твердых стенок, используется слагаемое:

$$\frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x^k} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x^k} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x^j} \right].$$

Важно, что функции ( $f_{t2}$ ,  $\tilde{S}$ ,  $f_{\omega}$ ,  $d$ ) — это всего лишь алгебраические соотношения (формулы для этих функций приведены в статье [10]). То есть при использовании данной модели нужно решать всего лишь одно дополнительное дифференциальное уравнение (11).

### Постановка задачи

Рассматривается задача об обтекании крыла турбулентным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Течение считается двумерным и стационарным при условиях:

$$Re = 6 \cdot 10^6, \quad M = 0,15. \quad (12)$$

В условиях (12) величина  $M = \frac{U_{\infty}}{U_s}$  — число Маха, равное отношению скорости свободного потока  $U_{\infty}$  к скорости звука при нормальных условиях  $U_s = 343,21 \left[ \frac{м}{с} \right]$ . Число Рейнольдса  $Re = \frac{U_{\infty} c}{\nu}$  рассчитано через длину хорды крыла ( $c = 1$ ) и кинематическую вязкость среды  $\nu$ . При сделанных предположениях  $\nu \equiv const$ . Крыло с профилем NACA0012 имеет симметричную форму, как показано на рис. 1. Детальное описание этой задачи приведено в [3].

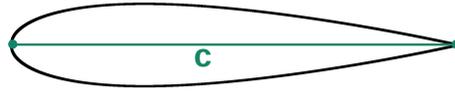


Рис. 1. Черный контур — это профиль крыла NACA0012, зеленый отрезок — это хорда крыла

### Система уравнений

Расчеты выполняются в рамках RANS-подхода совместно с моделью Спаларта–Аллмараса. Усредненные уравнения Навье–Стокса для двумерного стационарного течения:

$$U_k \frac{\partial U_i}{\partial x^k} = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x^i} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x^i} + \frac{\partial U_i}{\partial x^k} \right), \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

где  $\tilde{P} = \frac{P}{\rho} + \frac{2}{3} k \delta_{ik}$  — модифицированное давление.

Усредненное уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial U_k}{\partial x^k} = 0. \quad (14)$$

Стационарное уравнение на величину  $\tilde{\nu}$  из модели Спаларта–Аллмараса [10]:

$$U_k \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x^k} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} - \left[ c_{\omega 1} f_{\omega} - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} \right] \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x^k} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x^k} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x^j} \right]. \quad (15)$$

Турбулентная вязкость  $\nu_t$  рассчитывается по формуле:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad c_{v1}, \nu \equiv const. \quad (16)$$

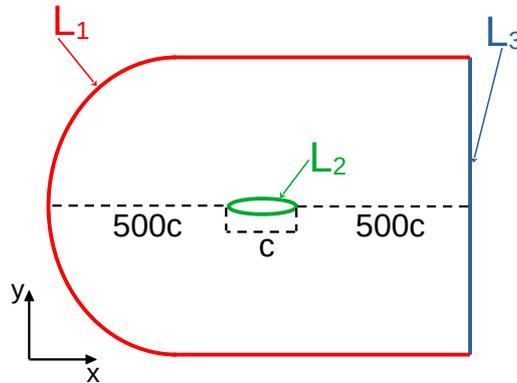


Рис. 2. Схема расчетной области, зеленый контур обозначает крыло,  $c = 1$  (длина хорды)

### Граничные условия

Расчетная область разбита на участки:  $L_1, L_2, L_3$ , как показано на рис. 2. Граничные условия задаются для усредненной скорости течения  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = (U_1(\mathbf{x}), U_2(\mathbf{x}))$  и вспомогательной величины  $\tilde{\nu}(\mathbf{x})$ , которая используется в модели Спаларта–Аллмараса.

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 : \mathbf{U} = (U_\infty \cos \alpha; U_\infty \sin \alpha), \quad U_\infty = 51,4815 \left[ \frac{\text{M}}{\text{c}} \right], \quad \alpha - \text{угол атаки} \\ \quad \tilde{\nu} = 3\nu, \quad \nu = 8,5258 \cdot 10^{-6} \\ L_2 : \mathbf{U} = (0; 0), \quad \tilde{\nu} = 0 \\ L_3 : \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{n} - \text{единичный вектор внешней нормали.} \end{array} \right. \quad (17)$$

Условия вида (17) используются в серии расчетов для углов атаки  $\alpha = 0^\circ, \alpha = 10^\circ, \alpha = 15^\circ$ . Угол атаки определяется между направлением скорости набегающего потока и хордой крыла.

### Проведение численного решения

Расчеты проведены с использованием программной платформы OpenFOAM [2], разработанной для решения задач механики сплошных сред. В OpenFOAM численное решение выполняется методом контрольных объемов [11]. Согласно методу контрольных объемов для каждой ячейки сетки дифференциальное уравнение интегрируется, результат интегрирования аппроксимируется с помощью выбранных схем дискретизации. В итоге для каждой ячейки получается линейное уравнение, а совокупность таких уравнений вместе с условиями на граничных ячейках составляет систему линейных уравнений, после решения которой получается определить значения искомой величины в центрах ячеек расчетной сетки.

В качестве расчетной сетки используется одна из представленных авторами задачи [12]. Выбранная сетка имеет разрешение  $449 \times 129$ . Сетка является структурированной и состоит из 57921 ячейки, размеры которых уменьшаются по мере приближения к поверхности крыла.

Использованные схемы дискретизации OpenFOAM [13], [14]:

- производная по времени – steadyState (исключение из уравнений);
- градиент – Gauss linear;
- лапласиан – Gauss linear corrected;
- дивергенция – bounded Gauss linearUpwind;
- производная по нормали – corrected;
- расстояние  $d$  до ближайшей стенки определялось методом exactDistance.

Уравнения гидродинамики (13) и (14) решались методом SIMPLE [11]. При решении систем линейных алгебраических уравнений для компонент скорости  $\mathbf{U}$  и вспомогательной величины  $\tilde{v}$  применен итерационный метод Гаусса–Зейделя. Система линейных алгебраических уравнений для давления  $\tilde{P}$  решалась алгебраическим многосеточным алгоритмом GAMG [14], в котором в качестве «сглаживателя» выбран метод Гаусса–Зейделя.

### Результаты вычислительных экспериментов

#### Исследуемые величины

В каждом расчете на основании полученных стационарных полей скорости и давления определялись безразмерные величины  $C_f, C_p, C_D, C_L$ :

- $C_f(\mathbf{x})$  — коэффициент поверхностного трения:

$$C_f(\mathbf{x}) = \frac{2\tau(\mathbf{x})}{\rho_\infty U_\infty}; \quad (18)$$

- $C_p(\mathbf{x})$  — коэффициент поверхностного давления:

$$C_p(\mathbf{x}) = \frac{2(p(\mathbf{x}) - p_\infty)}{\rho_\infty U_\infty}; \quad (19)$$

- $C_D(\alpha)$  — коэффициент силы сопротивления:

$$C_D(\alpha) = \frac{2D}{\rho_\infty U_\infty S}; \quad (20)$$

- $C_L(\alpha)$  — коэффициент подъемной силы:

$$C_L(\alpha) = \frac{2L}{\rho_\infty U_\infty S}. \quad (21)$$

В формулах (18), (19) величины  $\rho_\infty = 1$ ,  $U_\infty = 51,4815$ ,  $p_\infty = 0$  — значения для невозмущенного потока (вдали от крыла). Положение точки  $\mathbf{x}$  изменяется вдоль поверхности крыла. Величина  $\tau(\mathbf{x})$  — модуль касательного напряжения [15]. В качестве давления  $p(\mathbf{x})$  используется давление, рассчитанное из уравнения движения (13). В формулах (20), (21) величина  $D$  — модуль силы сопротивления, действующей на крыло со стороны обтекающего потока. Величина  $L$  — модуль подъемной силы,  $S$  — относительная площадь, для данной двумерной задачи  $S = 1$ . Более подробное описание параметров  $C_f, C_p, C_D, C_L$  приведено, например, в [15].

Коэффициенты  $C_D$  и  $C_L$  были рассчитаны с помощью функционального объекта `forceCoeffs` [13]. Расчет значений величин  $C_p$  и  $C_f$  вдоль поверхности крыла сделан с помощью утилиты `setExprBoundaryFields`, которая входит в состав OpenFOAM.

#### Визуализация результатов расчетов

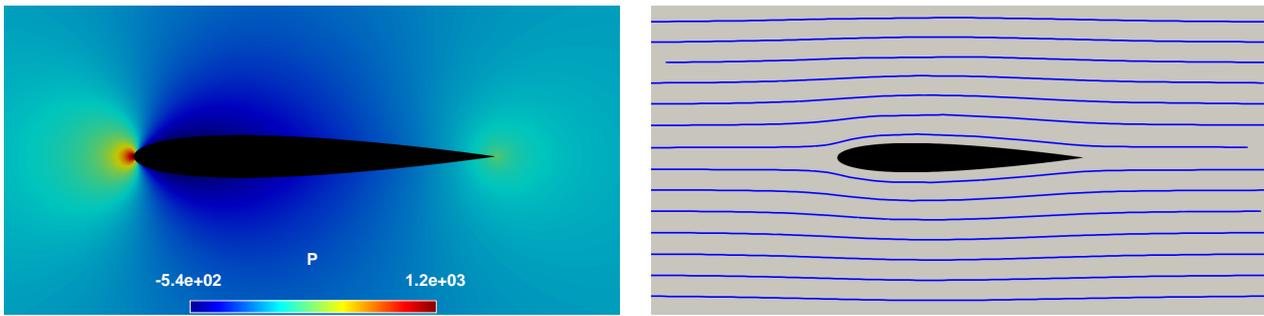
Для углов атаки  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $\alpha = 15^\circ$  распределение давления и линии тока векторного поля скорости вблизи крыла показаны на рис. 3–5 соответственно. Визуализация данных получена с помощью программы ParaView.

Профиль NACA0012 имеет симметричную форму, поэтому для угла атаки  $\alpha = 0^\circ$  получилось одинаковое распределение давления и линий тока относительно обеих сторон крыла. Для других углов атаки отчетливо видно различие значений давления в областях под и над поверхностью крыла.

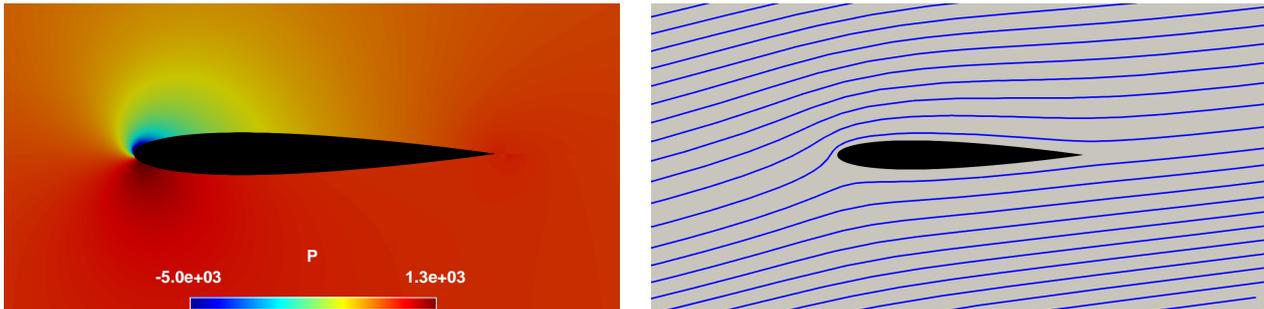
#### Результаты расчета величин $C_f$ и $C_p$

На рис. 6, 7, 8 приведены графики для величин  $C_f(x/c)$ ,  $C_p(x/c)$ , где  $x/c$  — нормализованная координата вдоль поверхности крыла ( $0 \leq x/c \leq 1$ ) при углах атаки  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $\alpha = 15^\circ$  соответственно.

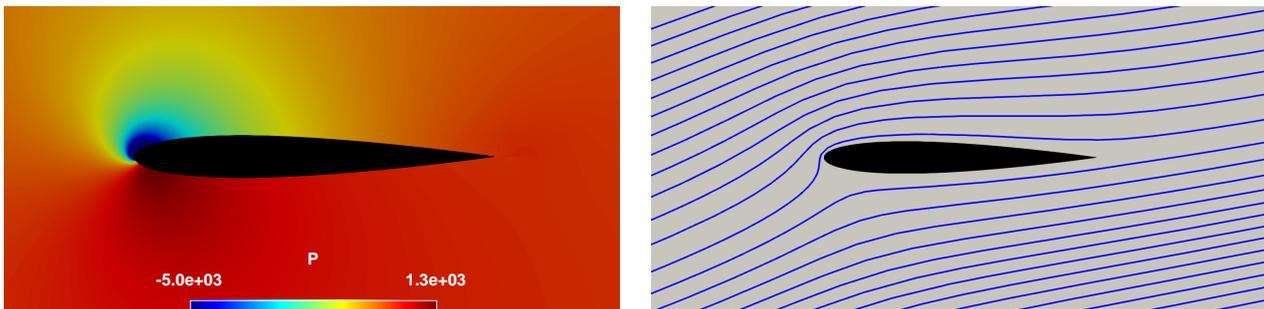
Графики  $C_f$  построены только для верхней стороны крыла. Под каждым графиком записана величина  $\Delta_{C_f}^{num}$  — максимальное абсолютное отклонение данных, полученных в этой работе с помощью платформы OpenFOAM, от результата численного эксперимента [4], выполненного в программе CFL3D.



**Рис. 3.** Слева приведено распределение давления, справа показаны линии тока векторного поля скорости для угла атаки  $\alpha = 0^\circ$



**Рис. 4.** Слева приведено распределение давления, справа показаны линии тока векторного поля скорости для угла атаки  $\alpha = 10^\circ$



**Рис. 5.** Слева приведено распределение давления, справа показаны линии тока векторного поля скорости для угла атаки  $\alpha = 15^\circ$

Графики  $C_p$  построены для обеих сторон крыла. Для каждого графика указана величина  $\Delta_{C_p}^{lim}$  – **максимальное абсолютное отклонение** при сравнении с данными численного эксперимента [4]. Для величины  $C_p$ , кроме численных расчетов, приведены данные, полученные в натурном эксперименте [5].

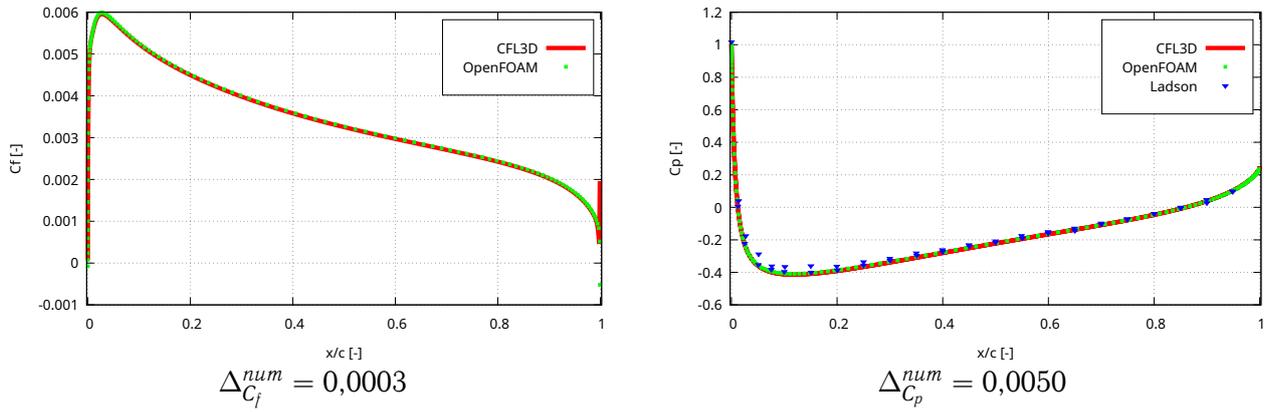
#### Результаты расчета величин $C_D$ и $C_L$

Значения коэффициентов аэродинамических сил  $C_D$  и  $C_L$  в зависимости от угла атаки показаны на рис. 9.

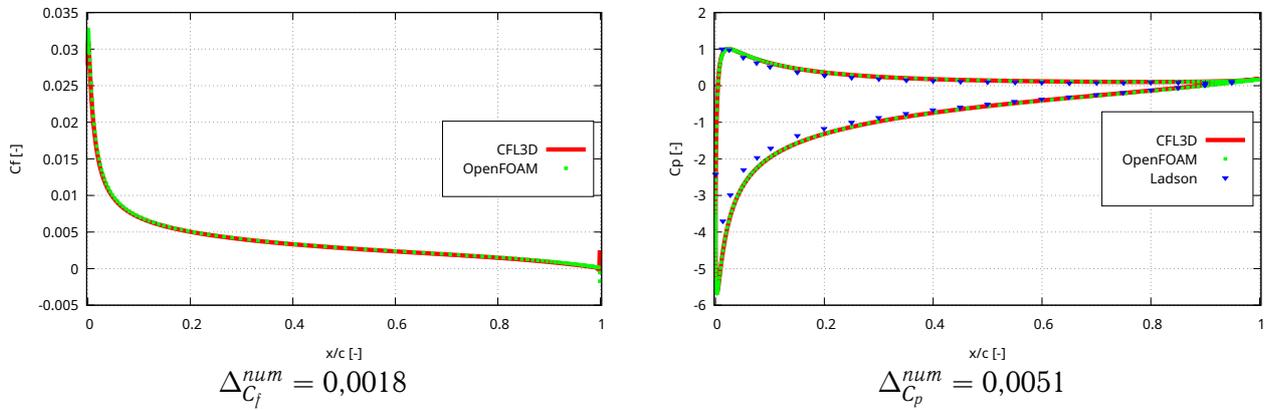
В таблице приведены относительные отклонения для значений коэффициентов  $C_D$  и  $C_L$ , полученных в этой работе с помощью OpenFOAM, и данных из численного эксперимента [4], проведенного в программе CFL3D.

#### Заключение

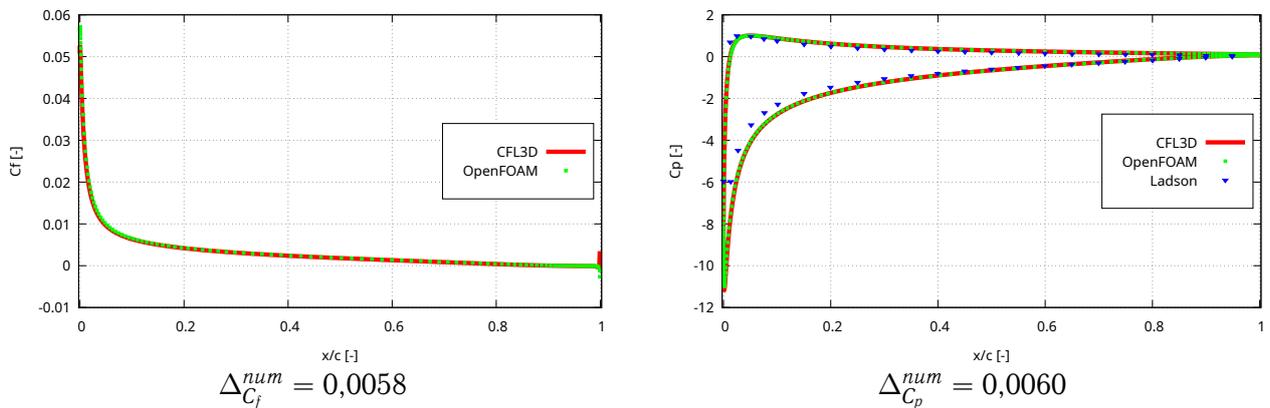
В данной работе кратко рассмотрен один из стандартных методов моделирования турбулентности, а именно решение уравнений, усредненных по Рейнольдсу (RANS подход), а также модель Спаларта–Аллмараса. Проведено численное решение задачи об обтекании крыла NACA0012 турбулентным потоком вязкой несжимаемой жидкости при различных углах атаки. Расчеты выполнены с



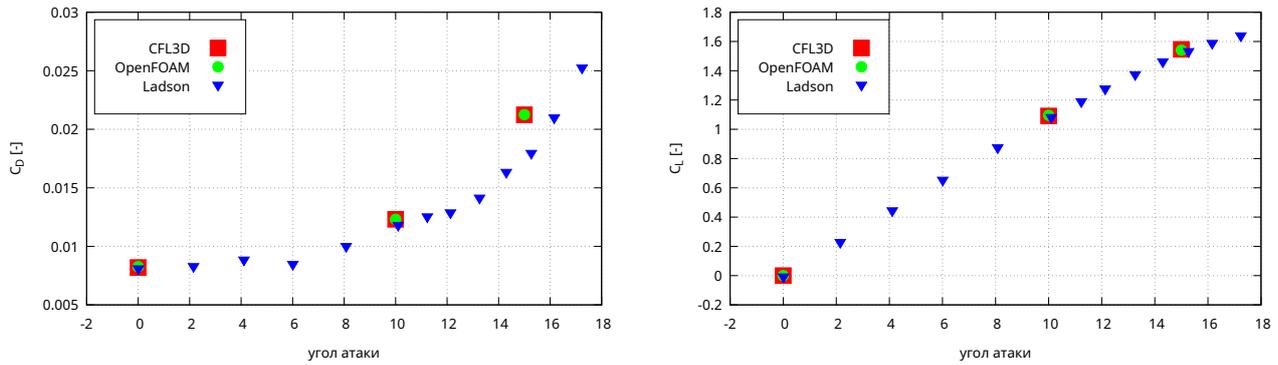
**Рис. 6.** Графики величин  $C_f$  (слева) и  $C_p$  (справа) для угла атаки  $\alpha = 0^\circ$ , зеленые точки — данные, полученные в этой работе с помощью OpenFOAM, красная кривая — результат численного эксперимента [4] в программе CFL3D, синие точки — измерения в натурном эксперименте [5]



**Рис. 7.** Графики величин  $C_f$  (слева) и  $C_p$  (справа) для угла атаки  $\alpha = 10^\circ$ , зеленые точки — данные, полученные в этой работе с помощью OpenFOAM, красная кривая — результат численного эксперимента [4] в программе CFL3D, синие точки — измерения в натурном эксперименте [5]



**Рис. 8.** Графики величин  $C_f$  (слева) и  $C_p$  (справа) для угла атаки  $\alpha = 15^\circ$ , зеленые точки — данные, полученные в этой работе с помощью OpenFOAM, красная кривая — результат численного эксперимента [4] в программе CFL3D, синие точки — измерения в натурном эксперименте [5]



**Рис. 9.** Зеленые точки — результат численного расчета в данной работе, красные точки — результат численного эксперимента [4], синие точки — измерения в натурном эксперименте [6]

Таблица

Относительные отклонения для коэффициентов  $C_D$  и  $C_L$

$\alpha$	$\delta_{C_D}$ [%]	$\delta_{C_L}$ [%]
0°	0,85	1,28
10°	0,03	0,43
15°	0,08	0,35

использованием программного комплекса OpenFOAM. Получена визуализация давления и линий тока векторного поля скорости жидкости рядом с крылом. Выполнена обработка полученных данных, в ходе которой рассчитаны аэродинамические коэффициенты  $C_f$ ,  $C_p$ ,  $C_D$ ,  $C_L$ . Для полученных значений проведено сравнение с данными численных и натурных экспериментов других авторов, которое показало качественную и количественную близость значений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. М.: Наука; 1974.
2. *OpenFOAM*. Режим доступа: <https://www.openfoam.com/>.
3. *2D NACA 0012 Airfoil Validation Case*. Режим доступа: [https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012\\_val.html](https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html).
4. *2D NACA 0012 Airfoil Validation Case Spalart-Allmaras Model Results*. Режим доступа: [https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012\\_val\\_sa.html](https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val_sa.html).
5. Ladson C. L., Hill A. S., Johnson W. G. *Pressure Distributions from High Reynolds Number Transonic Tests of an NACA 0012 Airfoil in the Langley 0.3-Meter Transonic Cryogenic Tunnel*. 1987. Режим доступа: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19880009181>.
6. Ladson C. L. *Effects of Independent Variation of Mach and Reynolds Numbers on the Low-Speed Aerodynamic Characteristics of the NACA 0012 Airfoil Section*. 1988. Режим доступа: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19880019495>.
7. Снегирёв А. Ю. *Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений*. Санкт-Петербург; 2009.
8. Pope S. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press; 2000.
9. Reynolds O. An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1883.
10. Spalart P. R., Allmaras S. R. A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. *AIAA*. 439. 10.2514/6.1992-439. Режим доступа: [https://www.researchgate.net/publication/236888804\\_A\\_One-Equation\\_Turbulence\\_Model\\_for\\_Aerodynamic\\_Flows](https://www.researchgate.net/publication/236888804_A_One-Equation_Turbulence_Model_for_Aerodynamic_Flows).

11. Патанкар С. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости*. М.: Энергоатомиздат; 1984.
12. *Grids – NASA 0012 Airfoil Case*. Режим доступа: [https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012\\_grids.html](https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_grids.html).
13. *OpenFOAM Documentation – Home*. Режим доступа: <https://doc.openfoam.com/2306/>.
14. Greenshields C., Weller H. *Notes on Computational Fluid Dynamics: General Principles*. CFD Direct Limited; 2022.
15. Anderson J. *Fundamentals of Aerodynamics*. 2017.