

DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-1-01

**ИНТУИТИВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕХНОЛОГИЯХ
ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА****Т. В. Гавриленко^{1,2,a}, В. А. Галкин^{1,2,b}**¹ Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,
г. Сургут, Российская Федерация² Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация^a ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3243-2751>, ✉ taras.gavrilenko@gmail.com^b ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9721-4026>, val-gal@yandex.ru

Аннотация: рассмотрены задачи построения интуитивных языковых образов, связанных с идеями построения искусственных нейронных сетей (ИНС), широко и без надлежащего строгого математического обоснования применяемых в технологиях искусственного интеллекта (ИИ). Работа нацелена на выявление семантики, необходимой для создания строгого математического основания будущей теории ИНС и ИИ. Принципиальным моментом указанных технологий является понятийный аналитический аппарат, создаваемый интеллектом Человека-пользователя в рамках его информационной среды, в которой ИНС и ИИ выступают как вспомогательные быстродействующие средства. Они способствуют решению задач, сформулированных в рамках общечеловеческой интуитивной языковой среды. В контексте развиваемого подхода определены метрики в пространствах решений, в частности, в задачах визуального корреляционного анализа, применяемого для эффективного выявления связей экспериментальных наблюдений. Представлены понятия теории и семантической значимости, определяемой Человеком. Показаны возможные ограничения в технологиях ИИ, основанные на особенностях человеческого мышления и языковых систем.

Ключевые слова: интуитивные логические системы, визуальный корреляционный анализ, искусственные нейронные сети, искусственный интеллект, алгоритм, теории, семантическая значимость.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН по теме № FNEF-2024-0001 «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах» (1023032100070-3-1.2.1).

Для цитирования: Гавриленко Т. В., Галкин В. А. Интуитивные логические системы и их приложения в технологиях искусственного интеллекта. *Успехи кибернетики*. 2024;5(1):8–16. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-1-01.

Поступила в редакцию: 22.01.2024.

В окончательном варианте: 01.03.2024.

**INTUITIVE LOGICAL SYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS IN ARTIFICIAL
INTELLIGENCE TECHNOLOGIES****T. V. Gavrilenko^{1,2,a}, V. A. Galkin^{1,2,b}**¹ Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation² Surgut State University, Surgut, Russian Federation^a ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3243-2751>, ✉ taras.gavrilenko@gmail.com^b ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9721-4026>, val-gal@yandex.ru

Abstract: the paper considers the construction of intuitive language images related to the concept of artificial neural networks (ANN) which are extensively used and without proper, rigorous mathematical justification applied to artificial intelligence (AI) technologies. This work aims to identify the semantics for creating a rigorous mathematical foundation for the future theory of ANNs and AI. A fundamental aspect of these technologies is the conceptual analytical apparatus created by the intelligence of the Human in their information environment, in which ANN and AI act as auxiliary, fast-acting tools. They contribute to the solution of tasks formulated within the framework of the universal intuitive language environment. In the

context of the developed approach, metrics in solution spaces are defined, in particular, in the tasks of visual correlation analysis applied to efficiently reveal the relationships of experimental observations. The concepts of theory and semantic relevance as defined by Man are presented. Possible limitations in AI technologies based on the peculiarities of human thinking and language systems are shown.

Keywords: intuitive logical systems, visual correlation analysis, artificial neural networks, artificial intelligence, algorithm, theories, semantic relevance.

Acknowledgements: this study is a part of the FNEF-2024-0001 government order contracted to the Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, project No. 1023032100070-3-1.2.1 Development and Implementation of Trusted Artificial Intelligence Systems Based on new Mathematical Methods and Algorithms, Fast Computing Models for Domestic Computing Systems.

Cite this article: Gavrilenko T. V., Galkin V. A. Intuitive Logical Systems and Their Applications in Artificial Intelligence Technologies. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(1):8–16. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-1-01.

Original article submitted: 22.01.2024.

Revision submitted: 01.03.2024.

Перспективным направлением построения и обоснования сходимости алгоритмов, используемых в технологиях построения ИИ, на основе динамически изменяющихся (последовательно уточняющихся) правил f_n для преобразования входной информации [1]:

$$x_{n+1} = f_n(x_n) \quad (1)$$

в иерархии ИНС, которые составляют структуру ИИ, является применение теорем о неподвижных точках на локально выпуклых и упорядоченных пространствах, связанных с работами А. Н. Тихонова, Ю. Шаудера и А. Тарского [2]. Эти теоремы позволяют во многих практических задачах для ИНС, основанных на сохраняющих порядок непрерывных отображениях, построить конструктивные сходящиеся алгоритмы к наименьшей (наибольшей) неподвижной точке. В частности, это утверждение имеет глубокие приложения в формальной семантике языков программирования (в абстрактной интерпретации — теории аппроксимации семантики компьютерных языков, связанной с именами П. и Р. Кузо [3]). Формализация процесса решения напрямую связана с интуитивным понятием алгоритма, называемым гипотезой, или «тезисом Черча» [4].

Следует подчеркнуть, что не существует четких математических определений ИНС и ИИ, которые составляют вспомогательную часть языковой среды, используемой носителем Интеллекта — Человеком (НИЧ). В конечном счете вспомогательная роль ИНС и ИИ определяет их вторичность по отношению к каждому конкретному НИЧ, который, используя ИНС и ИИ в своей практической деятельности, интерпретирует предлагаемые варианты выводов, полученных в этих системах на основе персональной семантики и своего синтаксиса. В основе языка всегда лежат интуитивно принимаемые предложения (семантические образы), употребление которых основано на соглашениях (синтаксических правилах), порождающих возможность построения так называемых логических выводов в виде конструкции «если, ...» — «то, ...».

Понятие «доказательство» в обыденном его употреблении (в смысле получения аргументированной последовательности «убедительных выводов») представляется способом общения носителей интеллекта (людей) с целью психологического (интеллектуального) убеждения друг друга в рамках выбранной этим сообществом некоторой языковой среды. «Со времен древних греков говорить “математика” — значит говорить “доказательство”» [5, с. 23].

Любой язык представляет собой предмет договора между людьми. Не существует способа передачи математических образов без использования естественного языка, который и формирует математические понятия и отношения. В неявном виде существует договор об использовании первичных понятий, и различные группы людей, в том числе и математиков, могут иметь различное толкование первичных понятий, что порождает различные математические школы, направления и теории. Человеческий разум может породить практически любую аксиоматику. Соответственно, одна и та же задача может иметь множество решений в различных понятийных пространствах.

В связи с вышесказанным необходимо отметить, что во многочисленных вычислительных экспериментах по распознаванию образов, обработке акустической, видео- и текстовой информации были найдены подходы к созданию программного обеспечения для практического решения ряда трудно

формализуемых задач. Эти успехи породили огромный поток работ и интерес к созданию полуэмпирических методов, носящих название «ИНС». Они составляют основу информационных технологий, которые принимаются за основу работы систем, называемых «ИИ». Общий подход, лежащий в основе построения ИНС, состоит в принятии гипотезы возможности создания устройства, которое можно обучить на серии примеров принятия решений [6].

Эта размытая формулировка предполагает наличие некоторой связи между выбранными парами объектов $(x, y) \in X \times Y$, определяющей некоторое отношение $R \subset X \times Y$ (гипотетический закон) [1]. Обычно предполагается, что R является функцией (т. е. каждому значению $x \in X$ соответствует ровно одно значение $y \in Y$). Набор обучающих примеров составляет заданное подмножество $\bar{R} \subset R$, где отношение R априори неизвестно. Целью создания ИНС является в некотором смысле «оптимальная реконструкция» неизвестного отношения R на основе заданного «обучающего» набора $\bar{R}$. По своей природе такая постановка задачи является некорректной. В конечном счете это задачи оптимальной интерполяции в заданных функциональных пространствах, снабженных соответствующими метриками или топологиями. Здесь важен выбор оптимизационного правила НИЧ, восходящий к идеям и принципам наименьшего действия в работах Лагранжа, Гамильтона, Эйлера и построению многочленов П. Л. Чебышёва, наименее уклоняющихся от нуля [6].

Вопросы практического применения ИНС и технологий ИИ с точки зрения логики их использования для «решения задач» (без четкой семантики употребления терминов «задача» и «решение») имеют аналоги в истории математики, например, в связи с великим открытием XVII в. — созданием основ анализа бесконечно малых (основ дифференциального и интегрального исчисления в работах Лейбница и Ньютона). С этой точки зрения, технологии современных ИНС и ИИ представляют собой широкий спектр интуитивных логических систем, в частности, в рамках математической логики допускающих бесконечный спектр интерпретаций, в соответствии с теоремой Сколема–Левенгейма [7].

Более того, классические теоремы Геделя [7] гарантируют существование невыводимых предложений, а само понятие алгоритма в своей основе имеет гипотезу о совпадении интуитивного алгоритма [7] и построения выводов, получающихся в результате применения рекурсивных вычислений, которые используют алгоритм машины Тьюринга [7, 8].

Таким образом, рассуждения о том, что системы, основанные на технологиях ИИ, могут превзойти НИЧ, являются отголосками многочисленных легенд из истории человечества, в частности, легенды о Големе [9].

Принципиальным является другой вопрос: об общественном характере применения результатов, получаемых конкретным НИЧ на основе используемых технологий ИНС и ИИ, и его персональной ответственности, что не является предметом настоящей работы.

В связи с многочисленными инженерными конструкциями, называемыми ИНС, важным элементом научных исследований является так называемая «научная визуализация». Она широко применяется при исследовании многопараметрических потоков данных большого объема (Big Data), которые нацелены на ускорение процесса выявления возможных закономерностей, связывающих их с проводимыми наблюдениями. В этом отношении заметное место занимает построение ИНС на основе сочетания геометрического вложения упорядоченных параметризованных потоков Big Data в многообразия $M \subset \mathbb{R}_n$, позволяющих исследователю визуально выделять и оценить математическими средствами возможные зависимости (корреляции). Такой подход аналогичен построению фигур Лиссажу [10] в $\mathbb{R}_2$ и позволяет существенно ускорить процедуру поиска возможного «решения» задачи о наличии структуры (отношений) малой размерности, на которые может стратифицироваться множество исходных данных, имеющее значительную мощность $\text{cardBigData} \sim \aleph_0$. Поиск решений новых и сложных задач требует от Человека способности исследовать задачу на основе различных подходов к понятийной среде, определять возможные варианты решения. Использование таких подходов, как поиск аналогий, подобия, похожести и сопоставление, дает возможность разуму человека находить нестандартные и неочевидные решения (например, решение изобретательских задач).

Особенно ярко это проявляется в задачах, которые не имеют решения в рамках заданной системы непротиворечивых определений и существование которых выводится на строгой основе математической логики. Типичной иллюстрацией тому является «классическая» задача для системы линейных алгебраических уравнений, когда ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы системы (переопределенная задача, не имеющая классического решения в силу теоремы Кронекера–Капелли [11]).

Однако практические задачи, которые связаны с необходимостью обработки многочисленных измерений (Big Data), приводящие естественным образом к переопределенным (некорректным) задачам, заставили изменить понятие решения, заменив классическое определение на «обобщенное решение», дающее минимум невязки системы уравнений в заданной метрике пространства данных (А. М. Лежандр [12], К. Ф. Гаусс [13]).

Эти идеи были положены в основу общего подхода в теории обобщения понятия решения дифференциальных уравнений (С. Л. Соболев [14], К. О. Фридрихс [15], Л. Шварц [16], А. Ф. Филиппов [17], В. А. Галкин и В. Б. Бетелин [18, с. 21]).

В основе понятия обобщенного решения лежит идея расширения исходного пространства решений и топологического продолжения операторов, входящих в исходную задачу так, чтобы продолженная задача в расширенных пространствах имела «обобщенное решение», которое совпадает с классическим при его наличии.

Построение модели ИНС может рассматриваться как задача об отыскании неподвижной точки $\bar{X}$ ($\bar{x} = f(\bar{x})$) для некоторого отображения $f : M \rightarrow M$ на множестве данных $M \supset X \cup Y$. Выбор отображения f назовем слоем ИНС. По существу, построение слоя ИНС является этапом построения многослойной ИНС, состоящей из последовательно применяемых преобразований — слоев $f_n : M \rightarrow M$, которые последовательно модифицируются пользователем для достижения некоторого «оптимального, идеального для пользователя» результата. Искомый результат представляет собой неподвижные точки некоторого предельного преобразования $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ [1].

Математические задачи построения ИНС на основе многочленов многих переменных естественным образом связаны с приближением достаточно гладких отображений частичными суммами соответствующего ряда Тейлора, что требует вычисления оценок производных неизвестной функции на обучающем множестве. Это приводит к необходимости решения интегральных уравнений Вольтерра (Фредгольма) 1-го рода типа свертки с приближенно заданной правой частью. Собственно говоря, этот подход положен в основу популярного названия «сверточные ИНС». Отметим, что уравнение Фредгольма 1-го рода на пространстве суммируемых функций является типичной некорректной задачей, обладающей выраженной вычислительной неустойчивостью, которая преодолевается на основе методов регуляризации А. Н. Тихонова [19].

Следует подчеркнуть, что в некотором смысле наиболее адаптированной к технологии ИНС, разработанной и универсальной является теория вычислительных методов для линейных задач. Поэтому с этой точки зрения важными являются процедуры «погружения» нелинейных задач в общие классы линейных за счет изменения исходной размерности описания и расширения функциональных пространств [20].

Отмеченное выше погружение нелинейных систем в линейную динамику может быть универсальным образом реализовано в рамках концепции функциональных решений для квазилинейных систем на основе вложения Янга соболевских обобщенных решений в пространство линейных функционалов, снабженное тихоновской топологией [21, 22].

Построение цепочки слоев ИНС должно подчиняться модификациям, гарантирующим сходимость итераций.

Человек обладает уникальной способностью исследовать, анализировать и интерпретировать окружающую действительность, а также искать решения не только известных, но и новых задач, проблем. Анализ и исследование окружающего мира, в первую очередь, осуществляются через органы чувств. Около 90 % воспринимаемой информации — это зрительная информация. Человек способен строить гипотезы, искать решения, в том числе неразрешимых задач, создавать новые теории. Существует множество различных подходов к формализации алгоритма и процедуры принятия решения, но инвариантный подход к определению так и не найден. В широком смысле понятие алгоритма эквивалентно математическим методам. Реализация алгоритма и решения задачи ограничены только границами человеческого познания.

Существует множество определений понятия «задача», которые связаны с различными аспектами человеческой деятельности. В общем смысле обычно под задачей понимают некоторую проблемную ситуацию, которую необходимо разрешить для достижения некоторой цели. В [23] определяется три составных элемента задачи:

- элементы ситуации;

- правила преобразований ситуации;
- требуемое решение или цель задачи.

Ключевым элементом является наличие проблемной ситуации, которую определяет человек. Только человек может определить и сформулировать новую проблемную ситуацию. Если задача решена в том или ином виде, тогда может быть автоматизирована процедура формирования задач, отличающихся только параметризацией.

В математическом смысле любая задача как проблемная ситуация содержит в себе множество исходных объектов (параметров, свойств, данных и т. д.), множество целевых объектов — неизвестных и множество допустимых отношений. Целью является либо поиск неизвестных объектов и последовательности отношений, определяющей неизвестные объекты, либо отыскание последовательности отношений между исходными и целевыми объектами. Введем следующие обозначения:

• $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_w\}$, $w \in N$ — множество объектов пространства, на котором определена задача (проблемная ситуация);

- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k \in N$, $A \subset Q$ — множество исходных объектов;
- $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, $m \in N$, $B \subset Q$ — множество целевых объектов;
- $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $n \in N$ — множество отношений;
- $F = \{f_1, f_2, \dots, f_h\}$, $h \in N$ — множество допустимых правил применения отношений.

В наиболее общем виде логическая система представляет собой отношения вида *если* (A), *то* (B), или $A \rightarrow B$. При этом истинность, ложность или допустимость преобразования определяется аксиоматикой и пониманием используемых понятий человеком. Правила применения отношений F определяются следующим образом:

$$f_k = \{e_\alpha, q_\beta, q_\gamma\}, \quad e_\alpha \in E, \quad q_\beta \in Q, \quad q_\gamma \in Q, \quad k = [1, h]. \quad (2)$$

Множество отношений E и правил применения отношений F (логическая система) позволяют сформировать последовательности, цепочки применения отношений. В результате решение задачи определяется последовательностью допустимых отношений $D = d_1 d_2 \dots d_l$, $d_i \in F$, $l \in N$. Отношения могут выстраиваться в иерархии, следовательно, любая последовательность D может рассматриваться как отношение более высокого порядка.

В зависимости от аксиоматики и понимания отношений, первичных понятий, решения задачи могут отличаться. Различия в понимании исходных первичных понятий и отношений приводят к формированию новых отношений, и, как следствие, формируется множество отношений $E' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_u\}$, $u \in N$. $E \cap E' = \emptyset$, если аксиоматика, понимание исходных первичных понятий и отношений эквивалентны, и $E \cap E' \neq \emptyset$, если существуют различия. Во втором случае решения задач могут отличаться как в целевых объектах, так и в последовательностях применения отношений.

Если задача не имеет решения, тогда $D = \emptyset$. Если решение в заданном допустимом пространстве отношений существует, тогда существует такое D , что $D \neq \emptyset$. Если задача имеет множество решений, D_j — j -е решение задачи ($j = \overline{1, r}$, r — количество решений задачи), тогда множество всех возможных решений $S = \bigcup_{j=1}^r D_j$. При этом S может содержать как эквивалентные решения $a_x D_j b_y$, $a_x D_i b_y$ ($x = [1, k]$, $y = [1, m]$), так и не эквивалентные $a_x D_j b_y$, $a_x D_i b_y^*$, где b_y^* — это некоторое приближение к b_y . В результате может быть сформулировано формальное определение алгоритма.

Алгоритм — это любая последовательность отношений D , каждый элемент которой определен на F .

Одна из сложнейших задач — сопоставление результатов решения задачи, могут возникать парадоксы, неразрешимые противоречия и недостижимость цели — решения задачи. Разрешение парадоксов, противоречий — это фактически процедура согласования, формирования новых договоренностей и в общем случае языка. Создание новой системы отношений, образов и, в конечном счете, языка — это принципиальная способность человеческого разума, недостижимая для машинного интеллекта.

Выбор эффективного решения из множества решений S , то есть выделение такого $D_j \in S$, которое удовлетворяло бы поставленным целям, можно сравнить с известной задачей «О разборчивой невесте», сформулированной Мартином Гарднером в 1960 году. Решение данной оптимизационной задачи позволяет определить стратегию поведения и ответить на вопрос, с какой вероятностью может быть определен наилучший вариант решения задачи для условной невесты. Поиск наиболее эффективного решения из множества вариантов связан с перебором вариантов и сопоставлением по некоторому критерию эффективности. Отыскание точного, эффективного или оптимального решения — одна

из центральных проблем математического моделирования и математики в целом. Например, при использовании асимптотических рядов в задачах небесной механики еще А. Пуанкаре обнаружил, что большое количество членов ряда приводит к неустойчивости решения и задача исследователя становится сопоставимой с задачей «О разборчивой невесте», в части выбора члена ряда (то есть выбор оптимального D_j из S), на котором следует остановиться и получить наиболее эффективное решение.

Множество отношений E не является инвариантным и изменяется при появлении новых знаний и понятий. Например, одно из величайших достижений Декарта — переход от числового, формального представления функций к графическому образу, который дает человеку эффективное зрительное восприятие математических объектов. Переход к графическим образам дал совершенно иное понимание закономерностей в окружающем мире и существенно изменил подходы к формированию решений и последовательности применения отношений.

В [1] рассмотрены алгоритмы, обладающие такими свойствами. Особую роль играет не столько формат описания объекта, исходных данных и их количества, сколько форма представления. Одним из самых эффективных методов оптимизации решений и поиска отношений для эффективного построения ИНС на интуитивных логических принципах является визуальный корреляционный анализ. Визуальный корреляционный анализ — это метод обнаружения и выявления скрытых структур и закономерностей, получения ограничений и свойств исследуемых объектов, выявления взаимосвязей в случайных величинах, решения задач аппроксимации на основе графических форм представления информации. По своей сути технологии построения ИНС, основанные на визуальном корреляционном анализе, конкретизируют работу [1] для итерационных динамически изменяющихся ИНС. Общий подход к технологиям построения ИНС визуального корреляционного анализа и детализация обоснования сходимости соответствующих им алгоритмов (1) основывается на следующей теореме.

Теорема (Сходимость интуитивных алгоритмов визуального корреляционного анализа).

Пусть для исходного объекта a образа существует пространство решений B , aGb , $b \in B$, $\Gamma > 0$, тогда визуальный корреляционный анализ допускает оптимальное решение задачи и сходится к решению из пространства решений.

Доказательство. Пусть a — исходный объект, b — искомый объект (решение задачи). Множество всех возможных отношений — $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $n \in N$. По аналогии с нумерацией Геделя [24] множество отношений можно рассматривать как алфавит для формирования числового отображения процедуры решения задачи. Дополнительно можно ввести требование, что значения в нумерации присваиваются в зависимости от сложности реализации отношения или времени выполнения отношения. Решение задачи представимо в виде aGb , где G — рассуждение (последовательность отношений):

$$G = g_1 g_2 \dots g_l; \quad g_k \in E; \quad k = \overline{1, l}; \quad l \in N, \quad (3)$$

где l — длина рассуждения, g_k — отношение на k -ом шаге, E — пронумерованное пространство отношений. Можно рассматривать также $g_k \in F$, где F — пронумерованное пространство допустимых отношений. Т. к. G — числовое представление, введем отношение:

$$\Gamma = \frac{1}{G}; \quad G \neq 0; \quad \Gamma = (0, 1]. \quad (4)$$

При $G \rightarrow \infty$, $\Gamma \rightarrow 0$, $\Gamma \neq 0$. Любой алгоритм с количеством операций, стремящимся к бесконечности, приводит к $\Gamma \rightarrow 0$. Для числового представления рассуждений G_c и G_d введем метрику $\rho(G_c, G_d)$ — расстояние между двумя числовыми представлениями рассуждений. При $\rho = 0$, $G_c = G_d$, $\rho \neq 1$ для любых значений G_c, G_d , $\rho = [0, 1)$, пространство состояний неполно. При $\rho \rightarrow 1$ модуль разности $|G_c - G_d| \rightarrow \infty$. Величину Γ можно рассматривать как вероятность решения задачи за конечное время или показатель скорости сходимости алгоритма, решения aGb . Пусть a — исходный объект, образ G_s — исходное числовое представление рассуждения, b_s — искомое решение задачи. Причем пространство решений $B \neq \emptyset$, $b_s \in B$.

Для задач неограниченно возрастающей размерности справедливо соотношение: $\Gamma_s \rightarrow 0$, если $G \rightarrow \infty$.

Повышение эффективности решения или оптимизация решения — это поиск такого G_r , что $G_s \gg G_r$ и в идеальном варианте $\rho(\Gamma_s, \Gamma_r) \rightarrow 1$.

Визуальный корреляционный анализ позволяет на основе опыта и зрительного восприятия исследователя сократить количество отношений в рассуждении, то есть определить новые отношения и

их последовательности $G_{new} \subset G_r$, такие что $|G_{new} - G_{sub}| > 0$, $G_{sub} \subset G_s$, метрика $\rho > 0$. Необходимо отметить, что G_s и G_r могут быть не эквивалентными, то есть aG_sb_s и aG_rb_r , при этом $b_s \in B$ и $b_r \in B$. Итерационное сокращение количества отношений при условии $|G_{new} - G_{sub}| > 0$ приводит к росту G_r , как следствие, вероятность и скорость решения задачи возрастают. Таким образом, заключаем, что процедура визуального корреляционного анализа сходится.

Теорема доказана.

Для задачи aGb решение может быть не единственным, то есть решения могут быть точными и приближенными. Точные решения могут быть зафиксированы и определены как инвариантные. В практических задачах приближенные решения сложных задач преобладают.

Представления $G_{sub} \subseteq G$ будем называть числовым представлением G , при этом $\bigcup G_{sub} = G$. Рассуждения G_c и G_d будем называть эквивалентными, если выполняются отношения aG_cb , aG_db , при этом $G_c \neq G_d$, эквивалентными могут быть числовое представление отдельного отношения и числовые представления, например, $g_k = G_{sub}$, где $G_{sub} \leq G$.

Оптимизация решения может быть определена как преобразование некоторого рассуждения G_c в G_d при условии aG_cb , aG_db и $G_c > G_d$. Примером такого преобразования может служить школьная задача по упрощению выражения. Если решение задачи не единственное, тогда может быть определено пространство решений B , где $\forall$ решение $b \in B$ удовлетворяет заданным требованиям и ограничениям. Пусть $b_c \in B$ и $b_d \in B$ — два решения из пространства решений, если b_c — точное решение, b_d — приближенное решение, тогда при $G_c \gg G_d$ — переход к приближенному решению эффективен, при $G_c \leq G_d$ — неэффективен.

Аналогично и при b_c — приближенное значение, b_d — приближенное решение, но при этом необходимо учитывать требования и ограничения на множество решений.

Введем следующие обозначения:

- $O = \{O_1, O_2, \dots, O_w\}$, $w \in N$ — множество исходных объектов (алфавит, знаки, объекты и т. п.);
- $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, $n \in N$ — множество утверждений (аксиоматика, законы, решения и т. д.);
- $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$, $m \in N$ — множество морфизмов (отношений);
- $V = \{V_1, V_2, \dots, V_l\}$, $l \in N$ — множество правил применения морфизмов (правил логического вывода), $l \in N$.

$\forall$ утверждение $P_b \in P$ представляет упорядоченное множество, состоящее из элементов множества O . $E_a : P_b \rightarrow P_c$ — морфизм (отношение), $E_a \in E$, $a = [1, m]$, $P_b \in P$, $P_c \in P$, $b = [1, n]$, $c = [1, n]$, тогда $\forall$ морфизм может быть доопределен:

$$V_k = \{E_a, P_b, P_c\}, \quad k = [1, l]. \quad (5)$$

Последовательность доопределенных морфизмов представима в виде рассуждения:

$$S = s_1 s_2 \dots s_h, \quad h \in N, \quad (6)$$

где $s_i \in V$, $s_i = V_d$, $i = [1, h]$, $d = [1, l]$, при этом $V_d \in V$, h — длина рассуждения. Элементы множества V могут быть пронумерованы и, следовательно, получено числовое представление — G аналогично (3).

Необходимо отметить, что V — это граф всех возможных утверждений предметной области. Рассуждение S является подграфом. В такой постановке визуальный корреляционный анализ направлен на решение задачи быстрого поиска отношений между узлами за счет сокращения пространства отношений.

Пусть множество Q является объединением всех возможных рассуждений S , $Q = \bigcup S$, тогда в пределе $|Q| \rightarrow \aleph_0$. Такие множества могут быть представлены, но большинство элементов таких множеств не несут никакой семантической нагрузки (бессмысленны). Например, можно взять алфавит и случайным образом из символов алфавита формировать слова (утверждения в данном контексте), а далее и рассуждения. Подавляющее большинство сформированных текстов не будет иметь никакого смысла. Точно так же можем сформировать программу на том или ином языке программирования, применить математические операторы и т. д.

Обозначим z семантическую значимость, например, истинность некоторого рассуждения, $\bar{z}$ — отсутствие семантической значимости, например, ложность. Семантическая значимость может рассматриваться как бинарное отношение, например, истина и ложь, и иметь множество различных значений, например, точное значение, приближенное значение с заданной точностью. В результате

$z = \{z_1, z_2, \dots, z_\tau\}$, $\tau \in N$, а $\bar{z}$ — это любое значение, которое не входит в пространство z . При этом семантическая значимость определяется создателем некоторой теории. Введем понятие теории, множество $T = \{T_1, T_2, \dots, T_t\}$ будем называть теорией, при условии, что элемент теории T определяется следующим образом: $T_j = \{S, z\}$, $T_j \in T$. Для $\forall \bar{T}_i = \{S, \bar{z}\}$ справедливо $\bar{T}_i \notin T$.

Рассмотрим некоторую теорию T . Пусть существует невыводимое рассуждение S' , то есть не существует допустимой последовательности морфизмов, определенных на множестве V , при этом для S' определена семантическая значимость $T' = \{S', z\}$. Тогда T — неполна. Предположим, что T полна, тогда существует такое S'' и E'' , что $E'' : S'' \rightarrow S'$, тогда S' выводима, но S' невыводима, следовательно, S'' невыводима. Следовательно, любая теория по определению неполна. Визуальный корреляционный анализ — основной способ исследования морфизмов, определения семантической значимости, в том числе пополнения теории и проверки ее непротиворечивости. Кроме этого, визуальный корреляционный анализ позволяет эффективно решать задачу сопоставления, подобия, похожести, а также помогает в поиске топологических и иных инвариантов.

В историческом плане рождение и гибель любой теории можно рассматривать как итерационный и эволюционный процесс. Любая теория существует только до тех пор, пока не начинают проявляться непреодолимые противоречия в ней. В современном мире появление противоречивых данных приводит к необходимости переосмысления теоретических знаний. При этом исследователь, эксперт выполняет основополагающую функцию — определение семантической значимости результата и сопоставление с существующими утверждениями и рассуждениями. Человек способен не только выстраивать рассуждения, но и давать им оценку, определять наличие смысловой нагрузки. Человек выполняет функцию контроля и оценки. Оценка семантической значимости — ключевая процедура, фактически это отделение бессмысленного от имеющего смысл. Человек на основе ощущений, наблюдений и опыта определяет семантическую значимость.

Графическое отображение обладает высокой информационной значимостью, высокой эффективностью представления данных. Большие объемы данных, описывающих развитие некоторого процесса, могут быть параметризованы точками многообразия, вложенного в пространство. Таким образом, исследователь, используя визуальный корреляционный анализ, получает возможность анализа данных наиболее эффективными методами, в первую очередь, благодаря визуальной оценке графического представления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бетелин В. Б., Галкин В. А. О неподвижных точках непрерывных преобразований, связанных с построением искусственных нейронных сетей. *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2022;507(1):22–25. DOI: 10.31857/S2686954322700035.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы. Общая теория*. Т. 1. М.: ИЛ; 1962.
3. Кузо П., Кузо Р. Абстрактная интерпретация: унифицированная решетчатая модель для статического анализа путем построения или аппроксимации неподвижных точек. *Протокол конференции 4-го симпозиума ACM по принципам языков программирования*. Лос-Анджелес, Калифорния, США; 1977. Р. 238–252.
4. Church A. An Unsolvability Problem of Elementary Number Theory. *American Journal of Mathematics*. 1936;58:345–363.
5. Бурбаки Н. *Теория множеств* / пер. с фр. В. А. Успенский. М.: Мир; 1965. 458 с.
6. Бетелин В. Б., Галкин В. А. Математические задачи, связанные с искусственным интеллектом и искусственными нейронными сетями. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):6–14. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-1.
7. Эббинхауз Г.-Д., Якобс К., Ман Ф.-К., Хермес Г. *Машины Тьюринга и рекурсивные функции* / пер. с нем. М.: Мир; 1972. 262 с.
8. Успенский В. А. *Машина Поста*. 2-е изд., испр. М.: Наука; 1988. 96 с.
9. Idel M. *Golem: Jewish Magical and Mystical Traditions on the Artificial Anthropoid*. Albany, New York: State University of New York Press; 1990. 296 p.
10. Sierra C. A. Recurrence in Lissajous Curves and the Visual Representation of Tuning Systems. *Foundations of Science*. 2023. Режим доступа: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10699-023-09930-z>. DOI: 10.1007/s10699-023-09930-z.

11. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры*. 9-е изд. М.: Наука; Главная редакция физико-математической литературы; 1968. 431 с.
12. Legendre A. M. *Nouvelles Methodes Pour la Determination des Orbites des Cometes*. Paris; 1806. 80 p.
13. Gauss C. F. *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium*. Hamburg; 1809. 246 p.
14. Соболев С. Л. *Избранные труды. Т. II. Функциональный анализ. Дифференциальные уравнения с частными производными*. Новосибирск: Издательство Института; Академическое издательство «Гео»; 2006. 689 с.
15. Фридрихс К. О. Асимптотические явления в математической физике. *Математика*, 1957;1(2):79–94.
16. Шварц Л. *Анализ*. Т. 1–2. М: Мир; 1972. 824 с.
17. Филиппов А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. М.: Наука; 1985. 216 с.
18. Бетелин В. Б., Галкин В. А. Универсальные вычислительные алгоритмы и их обоснование для приближенного решения дифференциальных уравнений. *Доклады Академии наук*. 2019;488(4):351–357. DOI: 10.31857/S0869-56524884351-357.
19. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука; 1986. 181 с.
20. Бетелин В. Б., Галкин В. А. Математические и вычислительные проблемы, связанные с образованием структур в сложных системах. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2022;14(4):805–815. DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-4-805-815. EDN: FJIRVQ.
21. Галкин В. А. Теория функциональных решений квазилинейных систем законов сохранения. *Труды семинара имени И. Г. Петровского*. 2000;20:81–120.
22. Galkin V. A. Background of Mathematical Models, Based on Conservation Laws Systems. *Industrial Mathematics, Narosa Publishing House*. New Delhi, India; 2006. P. 159–178.
23. Тихомиров О. К. *Психология мышления: Учеб. пособие*. М.: Изд-во Моск. ун-та; 1984. 272 с.
24. Мендельсон Э. *Введение в математическую логику*. М.: Наука; 1971. 320 с.