

DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-4-05

**ВИЗУАЛЬНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ РЕКУРРЕНТНОГО АНАЛИЗА****Д. В. Горбунов<sup>а</sup>, А. В. Гавриленко<sup>б</sup>, М. Н. Горбунова<sup>в</sup>, О. Ю. Семенов<sup>г</sup>**  
Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация  
<sup>а</sup> ✉ [Gorbunov.dv@mail.ru](mailto:Gorbunov.dv@mail.ru)<sup>б</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1837-5698>, [gavrilenko.anna.v@gmail.com](mailto:gavrilenko.anna.v@gmail.com)<sup>в</sup> [ms.smussi@mail.ru](mailto:ms.smussi@mail.ru), <sup>г</sup> [ous.tutor.phinma@mail.ru](mailto:ous.tutor.phinma@mail.ru)

*Аннотация:* изучение различного рода процессов требует углубленного анализа данных. Для понимания динамики поведения той или иной системы приходится часто использовать различные методы анализа, чтобы определить зависимости и характер поведения системы. В данной работе сконцентрировано внимание на анализе данных с помощью метода нелинейной динамики в виде построения рекуррентных диаграмм и анализа их количественных мер. На основе анализа периодических и непериодических функций были продемонстрированы их визуальные отличия, что в последующих исследованиях позволит определить зависимости и характер поведения динамических систем. Следует отметить, что состояние сложных динамических систем может существенно изменяться с течением времени, что осложняет изучение подобных систем. В этой связи рассматриваемые функции будут модифицироваться с помощью различных коэффициентов, что позволит провести визуальный корреляционный анализ разных функций и влияние на них коэффициентов в виде изменений рекуррентных диаграмм и их количественных мер. Далее подобным образом возможен анализ данных, полученных с разных датчиков или устройств. В этом случае данные могут быть представлены как n-мерный сигнал, как правило, сложной формы, и для упрощения первичного анализа к ним предлагается использовать построение рекуррентных диаграмм.

*Ключевые слова:* визуальный анализ, корреляционная диаграмма, периодическая функция, непериодическая функция.

*Для цитирования:* Горбунов Д. В., Гавриленко А. В., Горбунова М. Н., Семенов О. Ю. Визуальный корреляционный анализ периодических и непериодических функций на основе рекуррентного анализа. *Успехи кибернетики*. 2023;4(4):54–61. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-4-05.

*Поступила в редакцию:* 04.12.2023.*В окончательном варианте:* 07.12.2023.**VISUAL CORRELATION ANALYSIS OF PERIODIC AND APERIODIC FUNCTIONS USING RECURRENCE ANALYSIS****D. V. Gorbunov<sup>а</sup>, A. V. Gavrilenko<sup>б</sup>, M. N. Gorbunova<sup>в</sup>, O. Yu. Semenov<sup>г</sup>**  
Surgut State University, Surgut, Russian Federation<sup>а</sup> ✉ [Gorbunov.dv@mail.ru](mailto:Gorbunov.dv@mail.ru)<sup>б</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1837-5698>, [gavrilenko.anna.v@gmail.com](mailto:gavrilenko.anna.v@gmail.com)<sup>в</sup> [ms.smussi@mail.ru](mailto:ms.smussi@mail.ru), <sup>г</sup> [ous.tutor.phinma@mail.ru](mailto:ous.tutor.phinma@mail.ru)

*Abstract:* the study of many types of processes requires in-depth data analysis. To understand the dynamics of a system, it is often necessary to use various methods of analysis to determine the relationships and the nature of the system's behavior. This study focuses on data analysis using the method of nonlinear dynamics in the form of constructing recurrence diagrams and analyzing their quantitative measures. Based on the analysis of periodic and aperiodic functions, their visual differences are demonstrated. Subsequent studies will allow to determine the dependencies and the nature of the behavior of dynamic systems. It should be noted that the state of complex dynamic systems can change significantly with time, which complicates the study of such systems. In this regard, the considered functions will be modified with different coefficients, which will allow a visual correlation analysis of different functions and the effect of coefficients on them in the form of changes in recurrence diagrams and their quantitative measures. In addition, a similar analysis is possible for data obtained from different sensors or devices. In this case, the data can be presented as an n-dimensional signal, usually of a complex shape, and to simplify the initial analysis, it is proposed to use the construction of recurrence plots for them.

**Keywords:** visual analysis, correlation diagram, periodic function, aperiodic function.

**Cite this article:** Gorbunov D. V., Gavrilenko A. V., Gorbunova M. N., Semenov O. Yu. Visual Correlation Analysis of Periodic and Aperiodic Functions Using Recurrence Analysis. *Russian Journal of Cybernetics*. 2023;4(4):54–61. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-4-05.

*Original article submitted:* 04.12.2023.

*Revision submitted:* 07.12.2023.

## Введение

В ряде работ, посвященных изучению функциональных систем организма человека, продемонстрировано наличие определенного гомеостаза испытуемых в рамках ограниченной области квазиаттрактора [1–4]. Также следует обратить внимание и на то, что практически любой процесс живой природы очень часто обладает рекуррентным поведением (периодичность и/или иррегулярная цикличность). В этой связи нельзя не упомянуть фундаментальное свойство диссипативных динамических систем, сформулированное и опубликованное (в виде теоремы рекуррентности) выдающимся математиком Пуанкаре [5].

Если система сводит свою динамику к ограниченному подмножеству фазового пространства, то система почти наверняка, т. е. с вероятностью, практически равной 1, сколь угодно близко возвращается к какому-либо изначально заданному режиму.

Яркой демонстрацией данного фундаментального свойства является аттрактор Лоренца. Для технических систем это легко можно продемонстрировать и воспроизвести за счет повторения начальных условий. Проблема появляется, когда нет возможности получить начальные условия или динамика системы такова, что траектория движения постоянно изменяется в рамках ограниченного фазового пространства. В теории, рекуррентный анализ позволяет уточнить динамику поведения системы, но для этого необходимо более детальное изучение визуальных изменений на подобных диаграммах.

В этой связи в рамках данной работы будут рассмотрены примеры периодических и непериодических функций и их рекуррентные диаграммы. Причем к функциям будут применены различные коэффициенты с использованием визуального корреляционного анализа [6, 7].

## Рекуррентный анализ

Прежде чем приступать к анализу рекуррентных диаграмм, необходимо понять, как они строятся. Этот способ анализа впервые был представлен в 1987 г. Ж.-П. Экманн с соавторами [8]. Суть метода построения рекуррентных диаграмм заключается в следующем: отображение  $m$ -мерной фазовой траектории на квадратную область, т. е.  $m$ -мерная фазовая область системы  $x(t)$  длиной  $N$  преобразуется в двумерную квадратную двоичную матрицу  $N \times N$ , каждый элемент, равный 1, соответствует повторению состояния системы в момент времени  $t_i$  другого момента времени  $x_j$ , при этом «совпадение» элементов  $x_i \approx x_j$  обычно изображают черной точкой. Как правило, для динамических систем (и тем более хаотической) обнаружение полной рекуррентности невозможно ( $x_i \equiv x_j$ ), поэтому рекуррентность должна определяться как некоторое приближение двух состояний  $x_i$  и  $x_j$  с заданной точностью  $\varepsilon$ . Визуализацию рекуррентного поведения траектории фазового пространства можно представить в математической форме:

$$R(i, j) = \Theta(\varepsilon - \|\vec{x}(i) - \vec{x}(j)\|), \vec{x}_i \in^m, i, j = 1, \dots, N,$$

где  $N$  — количество рассматриваемых состояний  $x_i$ ,  $\varepsilon$  — размер окрестности точки  $x_i$ ,  $\|\cdot\|$  — норма и  $\Theta(\cdot)$  — функция Хэвисайда.

Такой способ анализа систем с рекуррентным поведением является мощным инструментом, т. к. он позволяет оценить повторяемость в динамике поведения системы не точно, а с заданной точностью. Более того, вследствие изложенного выше, это позволит оценить динамические системы с хаотической динамикой (например, функциональные системы организма человека). Во многих исследованиях из разных областей (например, математика, биомедицина) важно находить повторяющиеся структуры, а если динамика поведения системы непериодическая или почти периодическая, то важно найти повторяющиеся структуры с заданной точностью.

Следует отметить, что интерпретация результатов рекуррентных диаграмм может способствовать в поиске особенностей динамики системы. В теории существуют описания некоторых структур, которые могут появиться при построении рекуррентных диаграмм, основные из них представлены ниже [9–11].

- Однородность — свойства не изменяются со временем, т. е. процесс стационарный. В этом случае распределение вероятностей различных состояний системы неизменно на протяжении всего времени наблюдения. В подобных процессах нет тенденции к изменению средних значений или дисперсий со временем.

- Затухание в углах относительно главной диагонали — процесс нестационарный. В таком процессе присутствует тренд или сдвиг.

- Белые полосы — свойства процесса изменяются со временем, т. е. процесс нестационарный. Возникновение подобного рода структур может быть связано с редкими или ненормальными состояниями системы, которые проявляются в процессе перехода.

- Периодические или квазипериодические структуры на рекуррентной диаграмме — явное присутствие цикличности в системе или процессе. Например, неравномерно распределенные диагональные линии характеризуют квазипериодический процесс, а если эти линии равноудалены друг относительно друга, то это периодический процесс.

- Одиночные изолированные точки — сильные колебания в процессе. В этом случае изолированные точки могут характеризовать случайный или антикоррелированный процесс.

- Диагональные линии (параллельны главной диагонали) — изменение состояния процесса происходит в разное время. Процесс может быть хаотическим, если рядом с диагональными линиями присутствуют одиночные изолированные точки.

- Диагональные линии (ортогональные главной диагонали) — развитие процесса происходит в разное время (с реверсивным временем) [11].

- Вертикальные или горизонтальные линии (могут выстраиваться в виде кластеров) — медленно-текущий процесс, также подобное проявление на рекуррентной диаграмме может свидетельствовать о неизменности состояния системы или процесса.

- Изогнутые линии (обычно длинные) — состояние системы может меняться, но эти изменения одинаковы, за исключением их скорости. Следует отметить, что подобные структуры рекуррентных диаграмм могут свидетельствовать и об изменении динамики системы с течением времени. Подобные структуры не относятся к структурам, в которых присутствуют короткие изогнутые линии.

Подводя итог, отметим, что интерпретация рекуррентных диаграмм требует внимательного анализа и может быть полезной для выявления скрытых структур и характера временных рядов или динамических систем. Причем для корректной интерпретации необходимо обладать навыками визуального корреляционного анализа.

### Периодические и непериодические функции и их фазовые плоскости

В этом разделе представлены некоторые периодические и непериодические (почти периодические) функции для дальнейшего визуального корреляционного анализа. Функции построены по значениям  $x \in [0; 25]$ , шаг 0,05. На рис. 1 и рис. 2 представлены периодические функции с их фазовыми портретами:  $2 * \sin(x) + 5 * \cos(\frac{x}{4})$ ,  $4 * \sin(2 * x) + 3 * \cos(5 * x)$ ,  $4 * \sin(\frac{x}{3}) + 7 * \cos(x)$ ,  $5 * \sin(3 * \cos(x))$ ,  $5 * \sin(7 * \cos(x))$ ,  $2 * \sin(5 * \cos(x))$ .

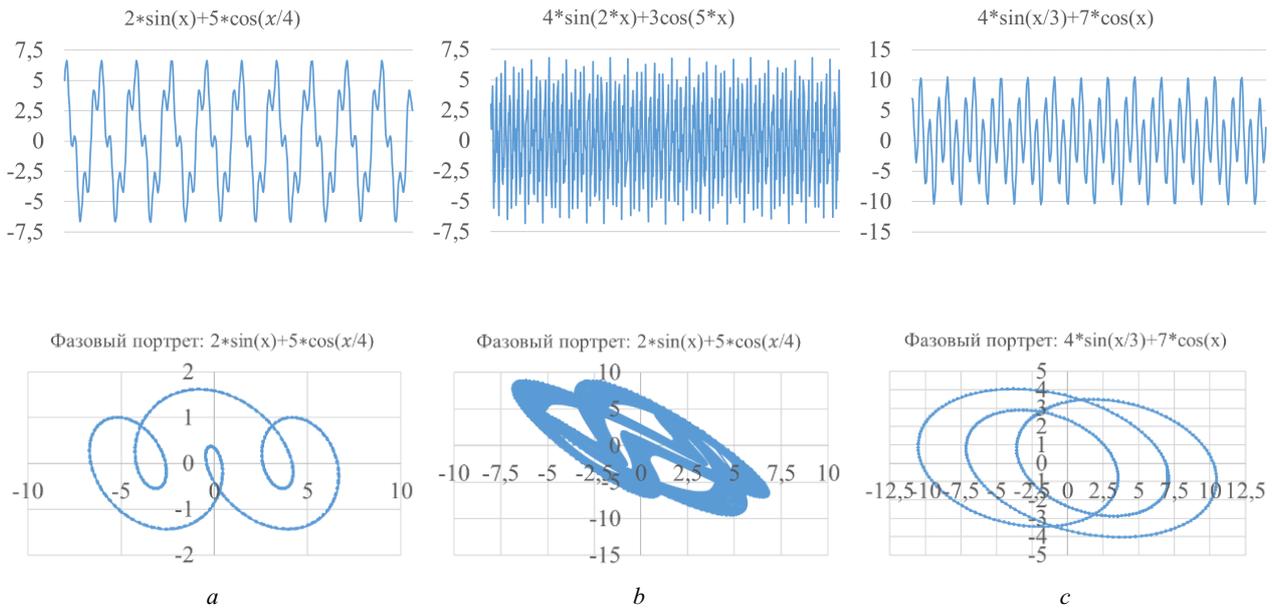
На основе полученных графиков и фазовых портретов периодических функций, как и ожидалось, можно заметить, что они явно периодические, а также траектории на фазовых плоскостях имеют цикличность.

Аналогично для почти периодических функций были построены графики и фазовые плоскости (рис. 3). Функции были выбраны следующие:  $\sin(x^2)$ ,  $\sin(x^3)$ ,  $\sin(2 * x^2)$ ,  $2 * \sin(x) + \sin(x\sqrt{2})$ ,  $\sin(x) + 3 * \sin(2 * x\sqrt{2})$ ,  $2 * \sin(x) + 5 * \sin(x\sqrt{2})$ .

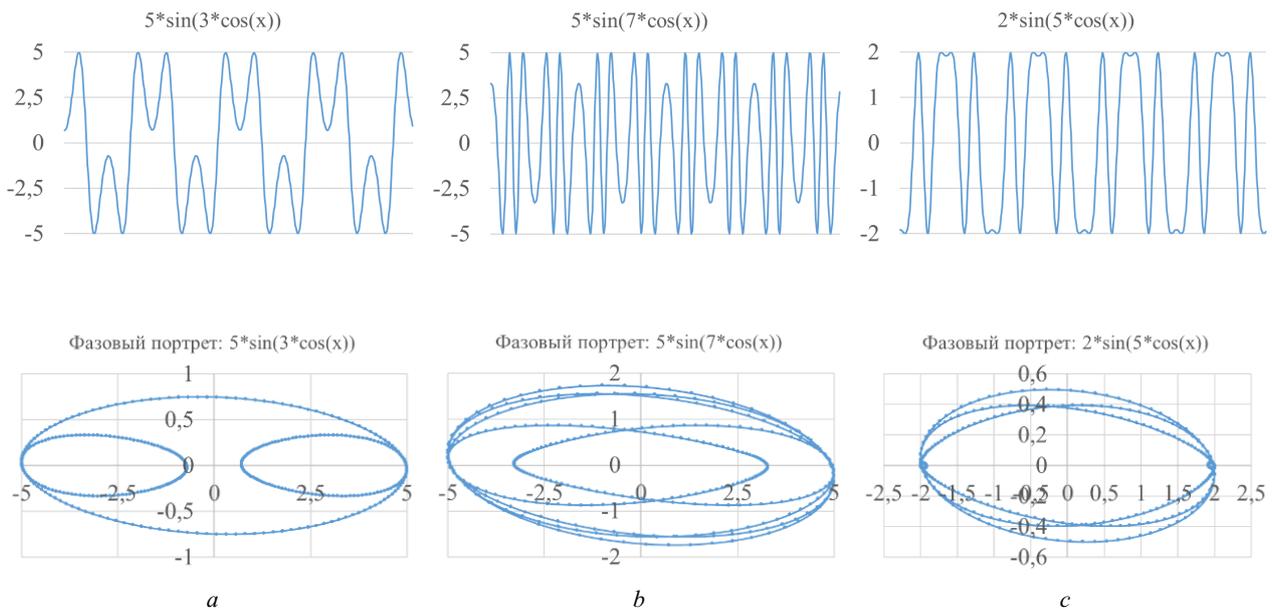
На основе визуального корреляционного анализа представленных примеров рис. 1 и рис. 2 можно сделать вывод, что в периодических функциях, в отличие от почти периодических, явно прослеживается траектория движения на фазовой плоскости. Эта информация и знания о поведении этих функций позволят сделать более полный вывод о их рекуррентных диаграммах, которые будут представлены далее.

### Рекуррентный анализ периодических и непериодических функций

При построении рекуррентных диаграмм для периодических функций и их фазовых плоскостей, представленных на рис. 1, приближение было выбрано  $\varepsilon=1$ , т. к. нет никаких конкретных требова-



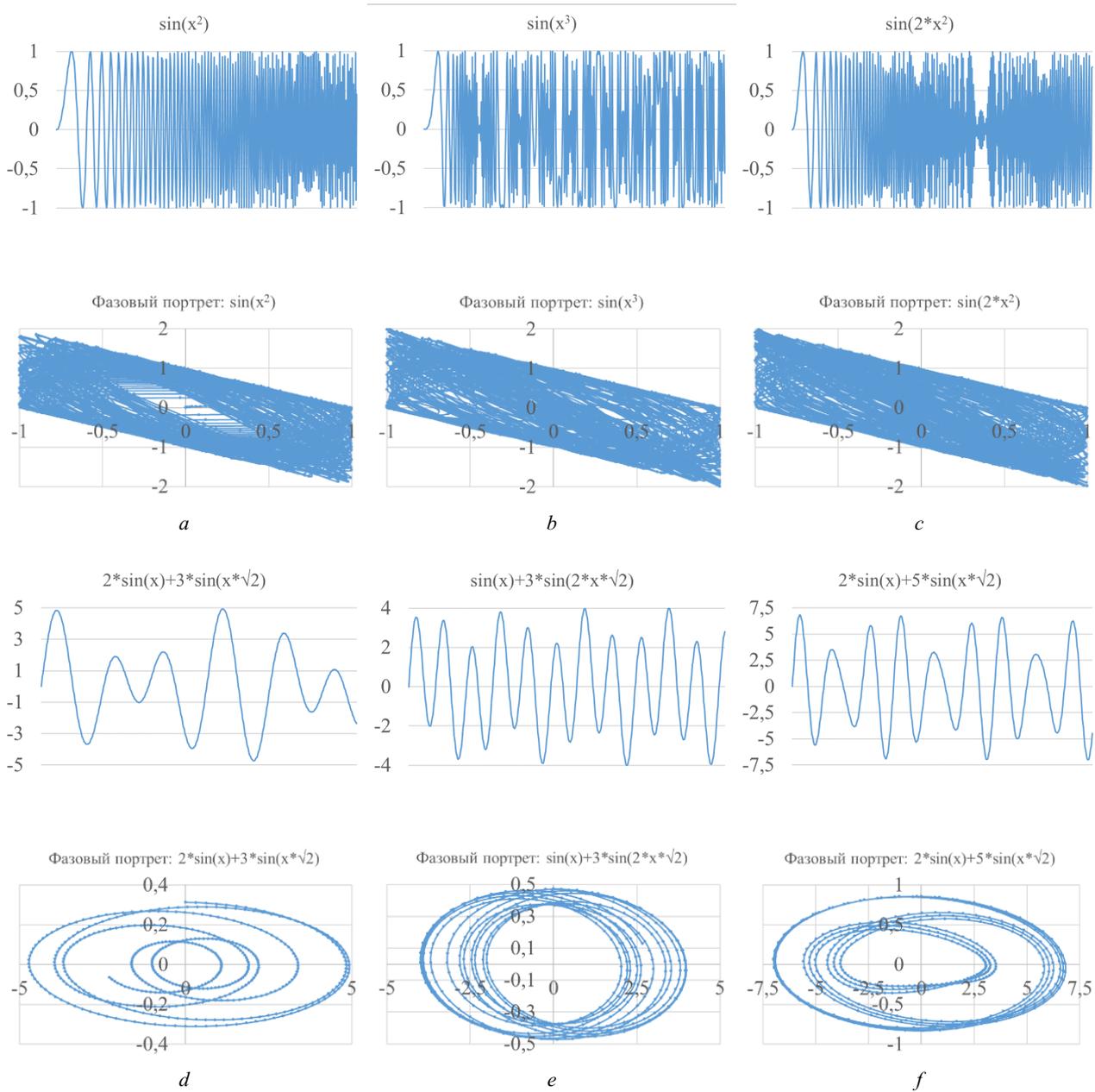
**Рис. 1.** Периодические функции с их фазовыми портретами:  $a - 2 * \sin(x) + 5 * \cos(\frac{x}{4})$ ,  $b - 4 * \sin(2 * x) + 3 * \cos(5 * x)$ ,  $c - 4 * \sin(\frac{x}{3}) + 7 * \cos(x)$



**Рис. 2.** Периодические функции с их фазовыми портретами:  $a - 5 * \sin(3 * \cos(x))$ ,  $b - 5 * \sin(7 * \cos(x))$ ,  $c - 2 * \sin(5 * \cos(x))$

ний к данной величине. Это означает, что если рекуррентность двух состояний системы не превысила значение  $\varepsilon$ , то эта точка считается рекуррентной и на рисунке изображается черным цветом. Как видно из рис. 4 и рис. 5, рекуррентные диаграммы для периодических функций имеют периодические одинаковые сегменты, как и ожидалось. Наибольший интерес представляют непериодические функции, представленные на рис. 6 и рис. 7.

При внимательном изучении рекуррентных диаграмм периодических функций, полученных по одной координате (рис. 4-I, рис. 5-I) и по фазовой плоскости (рис. 4-II, рис. 5-II), можно заметить разницу при визуальном анализе. В основном на всех диаграммах сегменты цикличны, причем на всех из них наблюдаются диагональные линии, параллельные главной диагонали. Это свидетельствует о том, что процессы детерминированные, а периодические структуры говорят о цикличности в процессах.

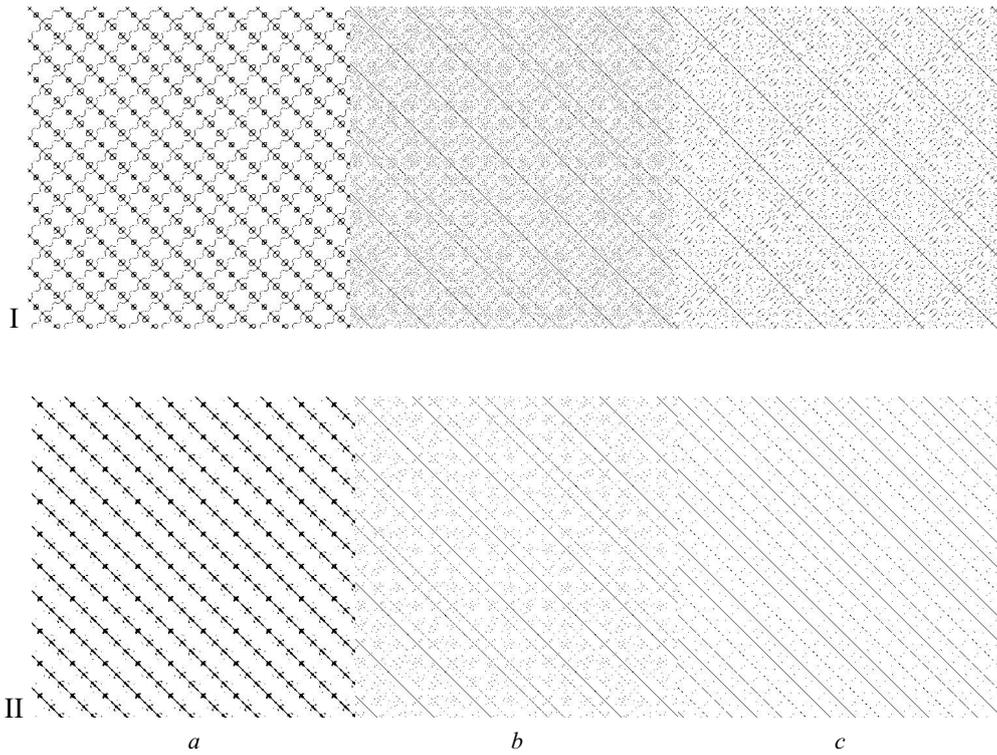


**Рис. 3.** Почти периодические функции с их фазовыми портретами:  $a - \sin(x^2)$ ,  $b - \sin(x^3)$ ,  $c - \sin(2x^2)$ ,  $d - 2\sin(x) + \sin(x\sqrt{2})$ ,  $e - \sin(x) + 3\sin(2x\sqrt{2})$ ,  $f - 2\sin(x) + 5\sin(x\sqrt{2})$

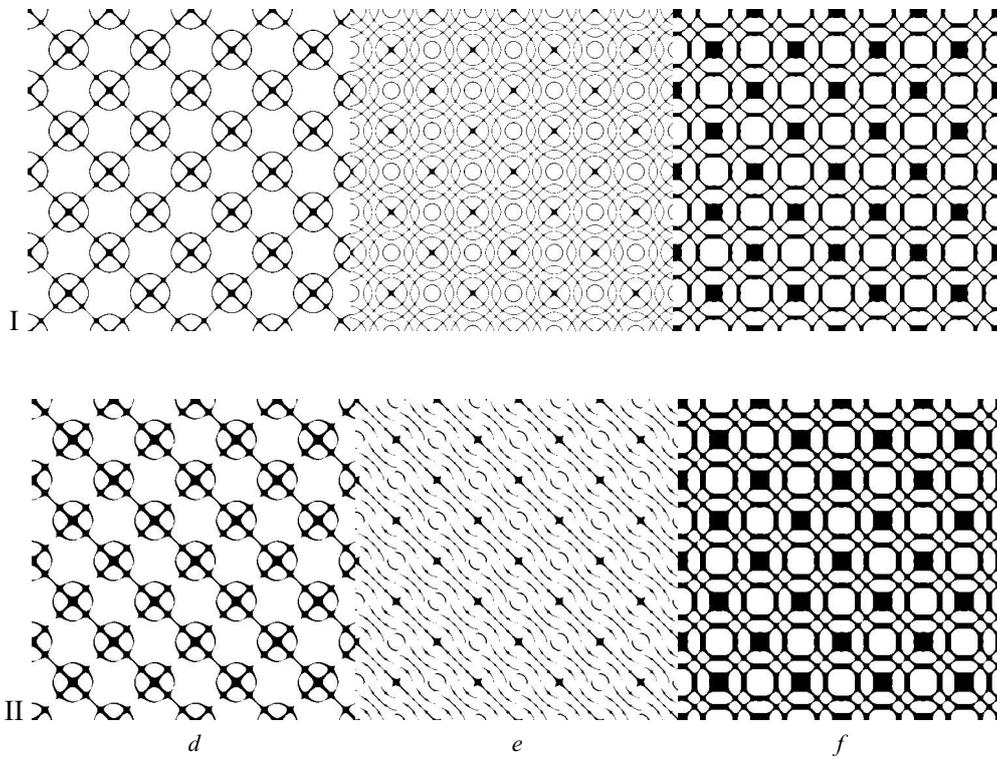
Аналогичным образом проводился визуальный корреляционный анализ и для рекуррентных диаграмм, построенных по данным для непериодических (почти периодических) функций. Здесь динамика процессов существенно отличается от динамики периодических функций. Первое, на что можно обратить внимание, — это то, что рис. 6 соответствует нестационарному режиму протекающих процессов, а на рис. 7 наблюдаются длинные изогнутые линии, что свидетельствует об изменчивости динамики системы.

### Заключение

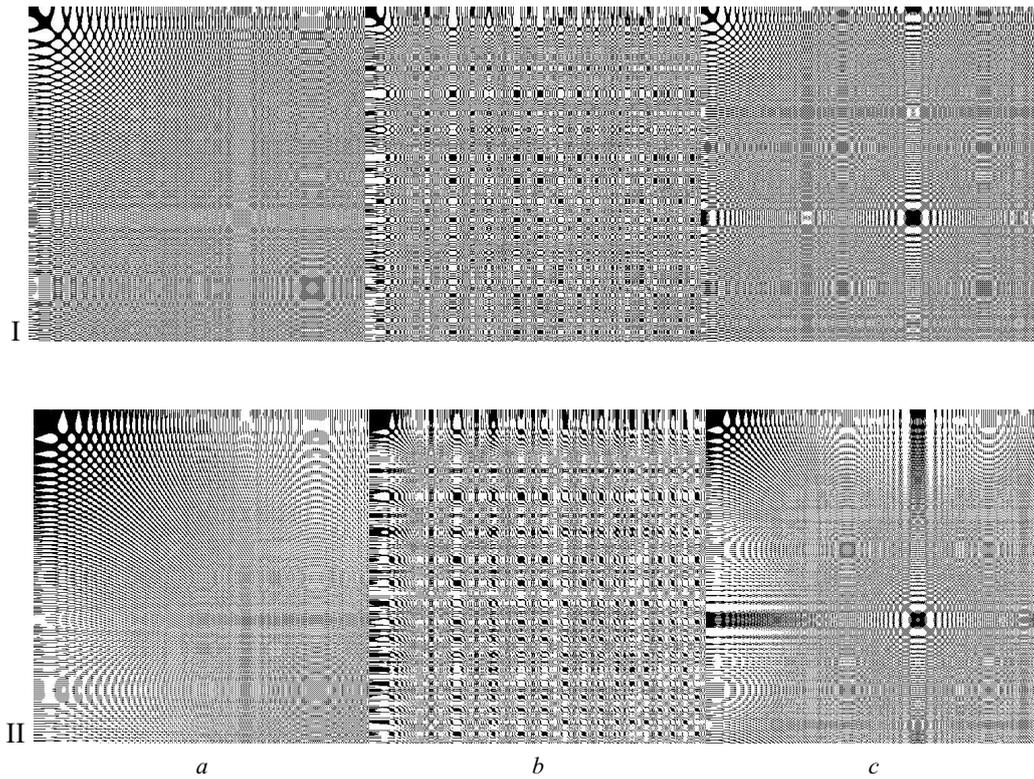
На основе проведенного визуального корреляционного анализа рекуррентных диаграмм, полученных на основе периодических и непериодических (почти периодических) функций, можно сделать вывод, что данный метод анализа может существенно помочь классифицировать динамики различных процессов. Следует отметить, что данный метод требует дополнительных исследований для выявления тех или иных закономерностей, соответствующих разным динамикам систем. Также требуется разра-



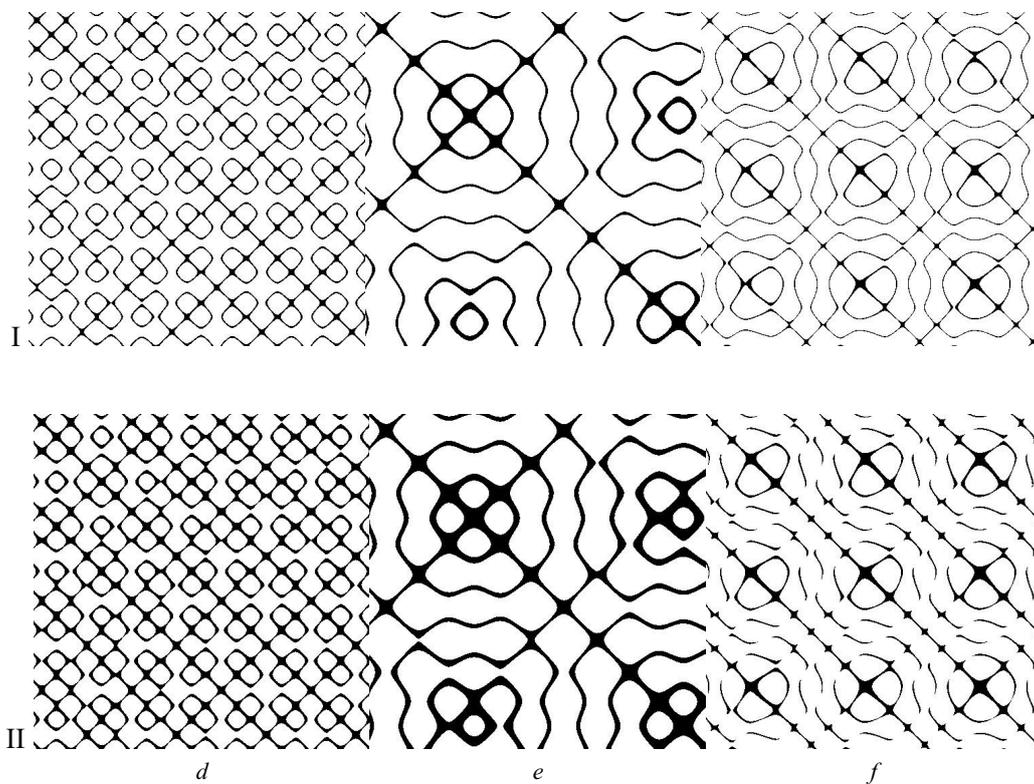
**Рис. 4.** Рекуррентные диаграммы периодических функций с их фазовыми портретами: I – по параметру  $x_i$ , II – по фазовой траектории; a –  $2 * \sin(x) + 5 * \cos(\frac{x}{4})$ , b –  $4 * \sin(2 * x) + 3 * \cos(5 * x)$ , c –  $4 * \sin(\frac{x}{3}) + 7 * \cos(x)$



**Рис. 5.** Рекуррентные диаграммы периодических функций с их фазовыми портретами: I – по параметру  $x_i$ , II – по фазовой траектории; d –  $5 * \sin(3 * \cos(x))$ , e –  $5 * \sin(7 * \cos(x))$ , f –  $2 * \sin(5 * \cos(x))$



**Рис. 6.** Почти периодические функции с их фазовыми портретами: I — по параметру  $x_i$ , II — по фазовой траектории; a —  $\sin(x^2)$ , b —  $\sin(x^3)$ , c —  $\sin(2*x^2)$



**Рис. 7.** Почти периодические функции с их фазовыми портретами: I — по параметру  $x_i$ , II — по фазовой траектории; d —  $2 * \sin(x) + \sin(x\sqrt{2})$ , e —  $\sin(x) + 3 * \sin(2 * x\sqrt{2})$ , f —  $2 * \sin(x) + 5 * \sin(x\sqrt{2})$

ботка методики определения значения приближения  $\varepsilon$ , т. к. результаты рекуррентного анализа могут существенно отличаться для динамических систем при изменении  $\varepsilon$ . Рекуррентный анализ может быть применим для оценки гомеостаза человека, в том числе при лечении пациентов или функциональной диагностики паталогических процессов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шакирова Л. С., Кухарева А. Ю., Еськов В. М. Неопределенность первого типа параметров сердечно-сосудистой системы девочек Югры. *Вестник новых медицинских технологий*. 2023;30(2):111–114.
2. Галкин В. А., Еськов В. М., Еськов В. В., Шамов К. А. Потеря эргодичности — фундаментальная математическая проблема всех наук о живых системах. *Сложность. Разум. Постнеклассика*. 2023;2:56–67.
3. Газя Г. В., Газя Н. Ф., Еськов В. М. Проблема выбора инвариант в биокибернетике с позиций статистики. *Успехи кибернетики*. 2022;3(3):102–109.
4. Зилов В. Г., Хадарцев А. А., Еськов В. М., Иляшенко Л. К. Новый эффект в физиологии нервно-мышечной системы человека. *Бюллетень экспериментальной биологии и медицины*. 2019;167(4):400–404.
5. Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики*. Избранные труды. Т. I. М.: Наука; 1971. 771 с.
6. Горбунов Д. В., Гавриленко Т. В. Математическое моделирование динамических процессов организма человека на основе дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. *Успехи кибернетики*. 2023;4(1):15–20.
7. Галкин В. А., Гавриленко Т. В., Смородинов А. Д. Подходы к решению систем линейных алгебраических уравнений с помощью нейронных сетей. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2022;40(3):153–164.
8. Eckmann J.-P., Kamphorst S. O., Ruelle D. Recurrence Plots of Dynamical Systems. *Europhysics Letters*. 1987;5:973–977.
9. *Recurrence Quantification Analysis: Theory and Best Practices*. Ed. C. L. Webber, N. Marwan. Springer International Publishing Switzerland; 2015.
10. Manuca R., Savit R. Stationarity and Nonstationarity in Time Series Analysis. *Physica D*. 1996;99(2–3):134–161.
11. Garcia S. R., Romo M. P., Figueroa-Nazuno J. Characterization of Ground Motions Using Recurrence Plots. *Geofisica Internacional*. 2013;52(3):209–227.