

DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-3-02

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ РЕЖИМОВ ГИДРОМАГНИТНОГО ДИНАМО ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

И. В. Бычин^{1,2,a}, А. В. Гореликов^{1,2,b}, А. В. Ряховский^{1,2,c}¹ Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,

г. Сургут, Российская Федерация

² Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация^a bychin_iv@surgu.ru, ^b gorelikov_av@surgu.ru, ^c ryakhovskij_av@surgu.ru

Аннотация: проведено численное исследование влияния начальных условий на характеристики и структуру решений задачи гидромагнитного динамо во вращающемся сферическом слое. Вычислительные эксперименты проводились с помощью разработанного авторами МГД-кода, адаптированного для работы на гибридных вычислительных системах с графическими процессорами. Получены квази-стационарные решения с устойчивым уровнем энергии генерируемого магнитного поля. Исследована эволюция решений в зависимости от числа Рейля.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, гидромагнитное динамо, сферический слой.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме № 0580-2021-0007 «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления».

Для цитирования: Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Численное исследование эволюции режимов гидромагнитного динамо во вращающемся сферическом слое при различных начальных условиях. *Успехи кибернетики*. 2023;4(3):19–30. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-3-02.

Поступила в редакцию: 08.08.2023.

В окончательном варианте: 07.09.2023.

DYNAMIC SIMULATION OF THE HYDROMAGNETIC DYNAMO BEHAVIOR IN A ROTATING SPHERICAL LAYER UNDER VARIOUS INITIAL CONDITIONS

I. V. Bychin^{1,2,a}, A. V. Gorelikov^{1,2,b}, A. V. Ryakhovskij^{1,2,c}¹ Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation² Surgut State University, Surgut, Russian Federation^a bychin_iv@surgu.ru, ^b gorelikov_av@surgu.ru, ^c ryakhovskij_av@surgu.ru

Abstract: we simulated the effects of initial conditions on the properties and structure of the hydromagnetic dynamo a rotating spherical layer. We developed an MHD code for the computational experiments adapted for hybrid computing systems with GPUs. We obtained quasi-stationary solutions with the stable energy of the generated magnetic field. The impact of the Rayleigh number on the solutions is also studied.

Keywords: magnetohydrodynamics, hydromagnetic dynamo, spherical shell.

Acknowledgements: this study is a part of the government contract 47 GP with the Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, project No. 0580-2021-0007 Advancing Distribution System Simulation and Computation Methods.

Cite this article: Bychin I. V., Gorelikov A. V., Ryakhovskij A. V. Dynamic Simulation of the Hydromagnetic Dynamo Behavior in a Rotating Spherical Layer under Various Initial Conditions. *Russian Journal of Cybernetics*. 2023;4(3):19–30. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-3-02.

Original article submitted: 08.08.2023.

Revision submitted: 07.09.2023.

Введение

В настоящее время численное моделирование гидромагнитного динамо начинает находить практическое применение. Его результаты могут предоставить ценную недостающую информацию о

динамике геомагнитного поля и, таким образом, сделать возможными расширенные прогнозы будущей эволюции магнитного поля Земли [1]. В связи с этим важным является вопрос о том, воспроизводят ли численные модели «корректный» режим конвекции в ядре Земли, поскольку даже в самых современных вычислительных экспериментах определяющие процесс параметры на порядки отличаются от значений для жидкого ядра Земли. Под «корректным» режимом конвекции обычно понимается порядок слагаемых, входящих в уравнение Навье–Стокса: сила Кориолиса, градиент давления, сила Архимеда и сила Лоренца должны иметь одинаковый порядок величины, а силы вязкости и инерциальная сила должны быть малы по сравнению с ними — так называемый QC-МАС баланс (Quasi Geostrophic — Magneto Archimedian Coriolis balance) [1]. Анализ показывает [1], что ряд современных численных моделей действительно в целом реализует корректный баланс сил [2, 3, 4], хотя силы вязкости и инерции по-прежнему не настолько малы, как в оценках для ядра Земли. Согласно исследованиям, проведенным за последние годы, магнитное поле, получающееся при численном моделировании, оказывается морфологически схожим с магнитным полем Земли при выполнении, по-видимому, двух условий [5]. Во-первых, отношение характерного времени магнитной диффузии $\tau_\eta = \frac{D^2}{\eta}$ к характерному времени конвекции $\tau_U = \frac{D}{U}$ должно быть приблизительно равно аналогичному отношению для ядра Земли, т. е. $Rm = \frac{\tau_\eta}{\tau_U} \approx 1000$, где D — толщина внешнего ядра Земли; U — характерная скорость течения; η — коэффициент магнитной диффузии; Rm — магнитное число Рейнольдса. Во-вторых, время вращения ядра вокруг своей оси $\tau_\Omega = \frac{1}{\Omega}$ должно быть значительно меньше, чем время τ_U , т. е. $Ro = \frac{\tau_\Omega}{\tau_U} \leq 10^{-2}$, здесь τ_Ω — угловая скорость вращения ядра; Ro — число Россби. Кроме того, при приближении параметров к более реалистичным значениям может изменяться динамика режима, например, возникают магнитные волны, скорость которых возрастает с изменением параметров [6]. Связь между численными моделями, в которых выполняется QC - МАС баланс сил, и моделями, которые демонстрируют реалистичную структуру магнитного поля, не является однозначной, однако вероятнее всего, что для решений, морфологически схожих с геомагнитным полем, QC-МАС баланс должен иметь место [7].

Топология магнитного поля может зависеть не только от набора используемых параметров, но и от задаваемых начальных условий. Например, в систематическом исследовании, проведенном Петит-деманжем [8], было показано, что существуют области параметров, в которых могут сосуществовать решения двух различных типов. Так, если интенсивность начального магнитного поля достаточно велика, $\Lambda \approx 10$, где Λ — число Эльзассера, то в магнитном поле доминирует дипольная составляющая. Если же задавать слабое начальное поле, $\Lambda \approx 10^{-2}$, то решение имеет мультипольную структуру. Следует отметить, что данное поведение существенно зависит от параметров модели, например, если число Рэлея и магнитное число Прандтля достаточно велики, то, вне зависимости от начальных условий, получаемое поле имело дипольную структуру.

Таким образом, значительный интерес представляет изучение влияния начальных условий и набора определяющих задачу параметров на структуру течения и топологию магнитного поля в задаче геомагнетизма. В данной работе численно исследуется влияние начальных условий, а также числа Рэлея на структуру и характеристики квазистационарных решений задачи геомагнетизма. Результаты, представленные в данной статье, являются продолжением исследований авторов по разработке и модификации численных методов решения задач магнитной гидродинамики (МГД) и созданию программного обеспечения для моделирования геомагнетизма [9–11].

Постановка задачи и математическая модель

Постановка задачи, математическая модель гидромагнитного динамо и обозначения соответствуют сформулированным в работе [12]. Рассматривается вращающийся вокруг оси Oz с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ сферический слой, заполненный вязкой несжимаемой электропроводящей жидкостью. Для моделирования естественной конвекции используется приближение Буссинеска. Сила тяжести направлена к центру слоя и линейно зависит от радиуса. В качестве характерного размера выбирается толщина слоя $H = r_o - r_i$, что делает безразмерные внешний и внутренний радиусы равными $r_o = 20/13$ и $r_i = 7/13$. Система уравнений магнитной гидродинамики в равномерно вращающейся системе отсчета в безразмерной форме имеет вид [12]:

$$r_i < r < r_o, \tau > 0 :$$

$$E \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} - \nabla^2 \vec{u} \right) + 2 \vec{e}_z \times \vec{u} + \nabla P = Ra^* \frac{\vec{r}}{r_o} \Theta + \frac{1}{Pm} \text{rot} \vec{B} \times \vec{B}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau} - \text{rot}(\vec{u} \times \vec{B}) - \frac{1}{Pr} \nabla^2 \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\vec{u} \nabla \Theta) = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \Theta, \quad (3)$$

$$\text{div} \vec{u} = 0, \quad (4)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (5)$$

Здесь $\tau, \vec{r}, \vec{u}, P, \Theta, \vec{B}$ – безразмерные время, радиус-вектор точки, скорость жидкости, давление, температура и вектор индукции магнитного поля соответственно. Безразмерные параметры задачи: $E = \frac{\nu}{\Omega H^2}$ – число Экмана, $Pr = \frac{\nu}{k}$ – число Прандтля, $Ra^* = \frac{\alpha g_0 \Delta T H}{\nu \Omega}$ – модифицированное число Рэлея, $Pm = \frac{\nu}{\eta}$ – магнитное число Прандтля, где ν – кинематическая вязкость, η – коэффициент магнитной диффузии, H – толщина сферического слоя, k – коэффициент теплопроводности, g_0 – ускорение свободного падения на внешнем радиусе, α – коэффициент теплового расширения, Ω – скорость вращения сферического слоя, ΔT – разность температур на внутренней и внешней границах слоя.

Граничные условия для поля температур и поля скоростей:

$$r = r_i : \quad \Theta = 1, \vec{u} = 0;$$

$$r = r_o : \quad \Theta = 0, \vec{u} = 0.$$

Полагается, что вне сферического слоя ($r > r_o$) электропроводность равна нулю, магнитное поле потенциально ($\vec{B} = \nabla \psi$), и, следовательно, потенциал является решением внешней задачи Неймана на уравнение Лапласа:

$r > r_o : \quad \Delta \psi = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=r_o} = B_r$, где ψ – функция регулярная на бесконечности. Тогда тангенциальные составляющие магнитного поля на внешней границе сферического слоя определяются по формулам (так называемые вакуумные граничные условия):

$$r = r_o : \quad B_\theta = \frac{1}{r_o} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad B_\varphi = \frac{1}{r_o \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}.$$

Начальные условия для компонент вектора индукции магнитного поля (соответствуют case2 из [12]):

$$0 \leq r < r_o, \quad \tau = 0 :$$

$$B_r = 5 \frac{4r_o - 3r}{3 + r_o} \cos \theta$$

$$B_\theta = 5 \frac{9r - 8r_o}{2r_o + 6} \sin \theta, \quad (6)$$

$$B_\varphi = 5 \sin \left(\pi \frac{r}{r_o} \right) \sin(2\theta).$$

Начальные условия на температуру и скорость в сферическом слое:

$$r_i < r < r_o, \quad \tau = 0 :$$

$$\vec{u} = 0, \quad \Theta = \frac{r_o r_i}{r} - r_i + \frac{21}{\sqrt{17920\pi}} \left(1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 \right) \sin^4 \theta \cos(m\varphi) \quad (7)$$

где $x = 2r - r_i - r_o$, волновое число m – параметр, который определяет азимутальную симметрию начального поля температуры.

Результаты вычислительных экспериментов

Все вычислительные эксперименты проводились для следующих значений безразмерных параметров: $E = 10^{-3}$, $Pr = 1$, $Pm = 5$. Модифицированное число Рэлея Ra^* и волновое число m являлись варьируемыми параметрами. В работе рассматривались решения, обладающие симметрией относительно плоскости экватора ($\theta = \pi/2$), что позволило проводить расчеты только в половине сферического слоя. Для полученных решений вычислялись средние плотности: кинетической энергии E_{kin} , магнитной энергии E_{mag} в жидком сферическом слое G_L и магнитной энергии E_{mag_ic} в твердом внутреннем ядре G_S по формулам:

$$E_{kin} = \frac{1}{2V_L} \int_{G_L} \vec{u}^2 dV_L, \quad E_{mag} = \frac{1}{2V_L E Pr} \int_{G_L} \vec{B}^2 dV_L, \quad E_{mag_ic} = \frac{1}{2V_S E Pr} \int_{G_S} \vec{B}^2 dV_S,$$

где V_L — объем жидкого сферического слоя, V_S — объем твердого внутреннего ядра.

Расчеты проводились с помощью разработанного авторами МГД-кода [9–11], ориентированного для работы на вычислительных системах с графическими ускорителями.

Проведено три серии вычислительных экспериментов по исследованию зависимости режимов генерации магнитного поля от модифицированного числа Рэлея Ra^* , при волновых числах $m = 3, 4, 5$. В каждой серии расчетов, при фиксированном m , сначала было получено решение с постоянным уровнем кинетической и магнитной энергии для $Ra^* = 110$ при начальных условиях (6–7), которое рассматривалось в качестве базового. Все остальные решения получались последовательно, начиная с базового, методом продолжения по параметру, в данном случае по числу Ra^* , с шагом 10. Число Рэлея увеличивалось до тех пор, пока не начинались существенные осцилляции энергий, которые могли бы привести к нарушению экваториальной симметрии решения.

В первой серии расчетов при $m = 3$ число Рэлея варьировалось в диапазоне от 110 до 150. Рисунки 1–2 демонстрируют характер изменения средней плотности кинетической E_{kin} и магнитной энергий E_{mag} , которые ожидаемо увеличиваются по мере увеличения числа Рэлея. При $Ra^* = 150$ значения энергий начинают осциллировать. На рисунках 3–6 представлены некоторые результаты для $Ra^* = 140$, демонстрирующие трехлучевую симметрию решения.

Решения, полученные при $m = 4$, обладают четырехлучевой симметрией, и результаты второй серии расчетов в целом схожи с предыдущей.

В третьей серии расчетов ($m = 5$) уже при $Ra^* = 130$ решение с пятилучевой симметрией (см. рисунки 10–13) становится неустойчивым (см. рисунки 7–9) и перестраивается на устойчивое решение с трехлучевой симметрией. На рисунках 10–13 представлены некоторые результаты для $Ra^* = 120$, демонстрирующие пятилучевую симметрию квазистационарного решения.

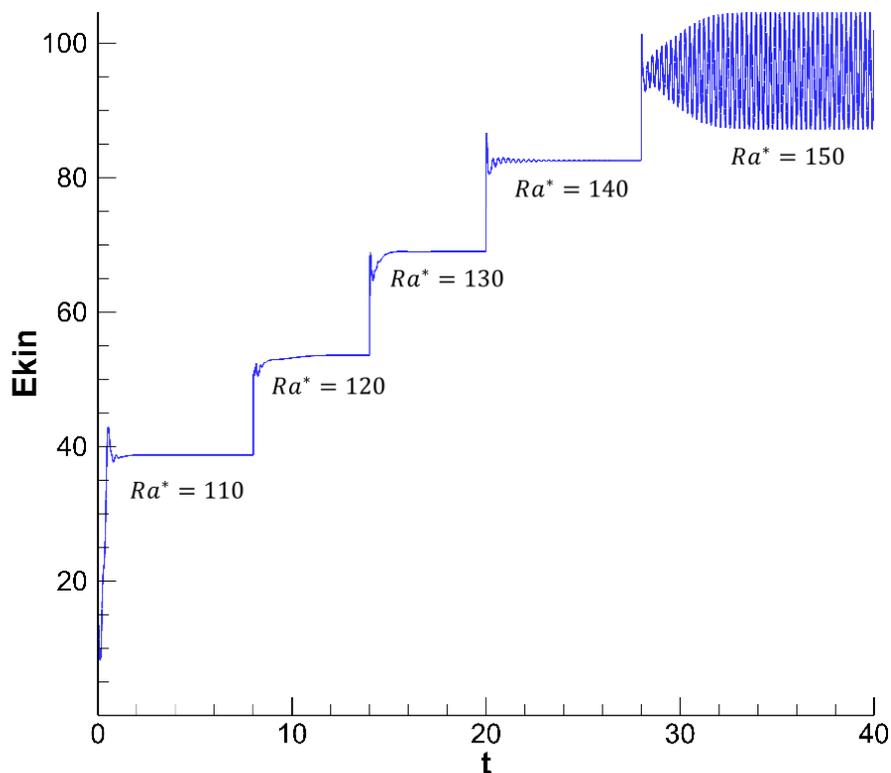


Рис. 1. График средней плотности кинетической E_{kin} энергии в жидком проводящем слое ($m = 3$)

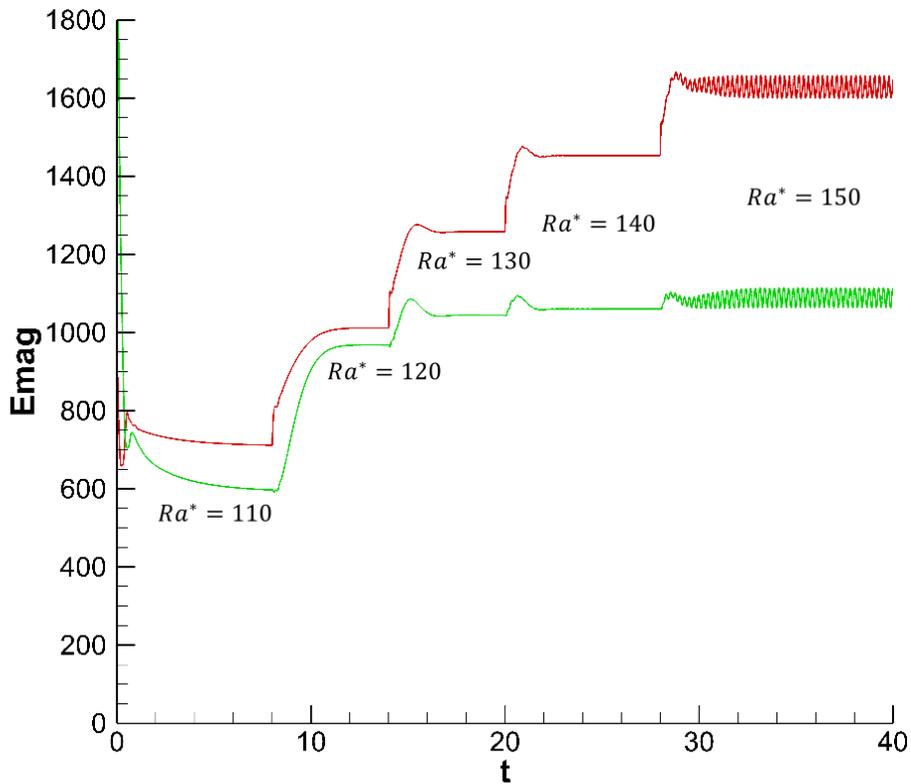


Рис. 2. График средней плотности магнитной энергии в жидком проводящем слое (красная линия) и в твердом внутреннем проводящем ядре (зеленая линия) ($m = 3$)

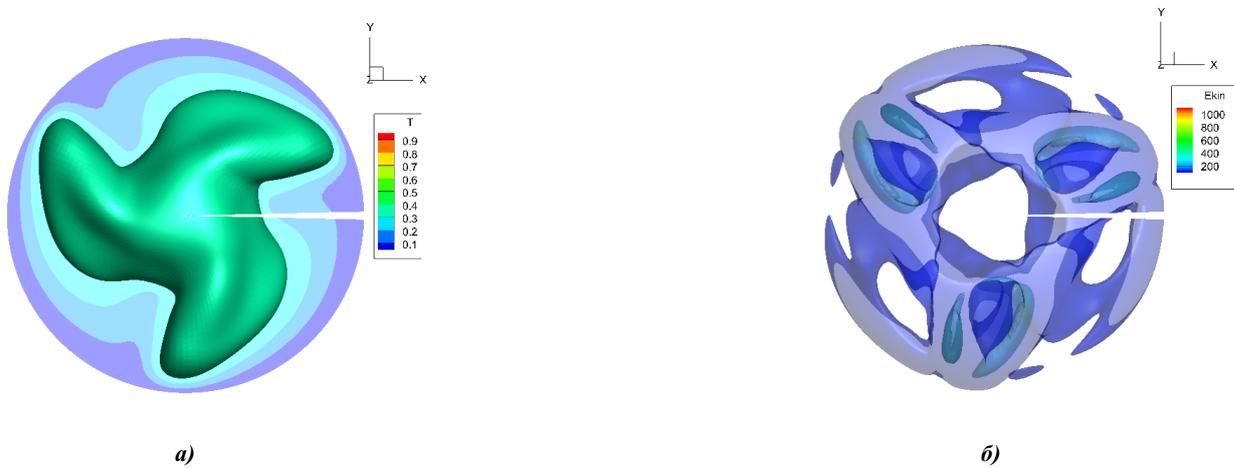


Рис. 3. Изоповерхность температуры ($\Theta = 0.25$; а) Распределение кинетической энергии ($m = 3, Ra^* = 140$) б)

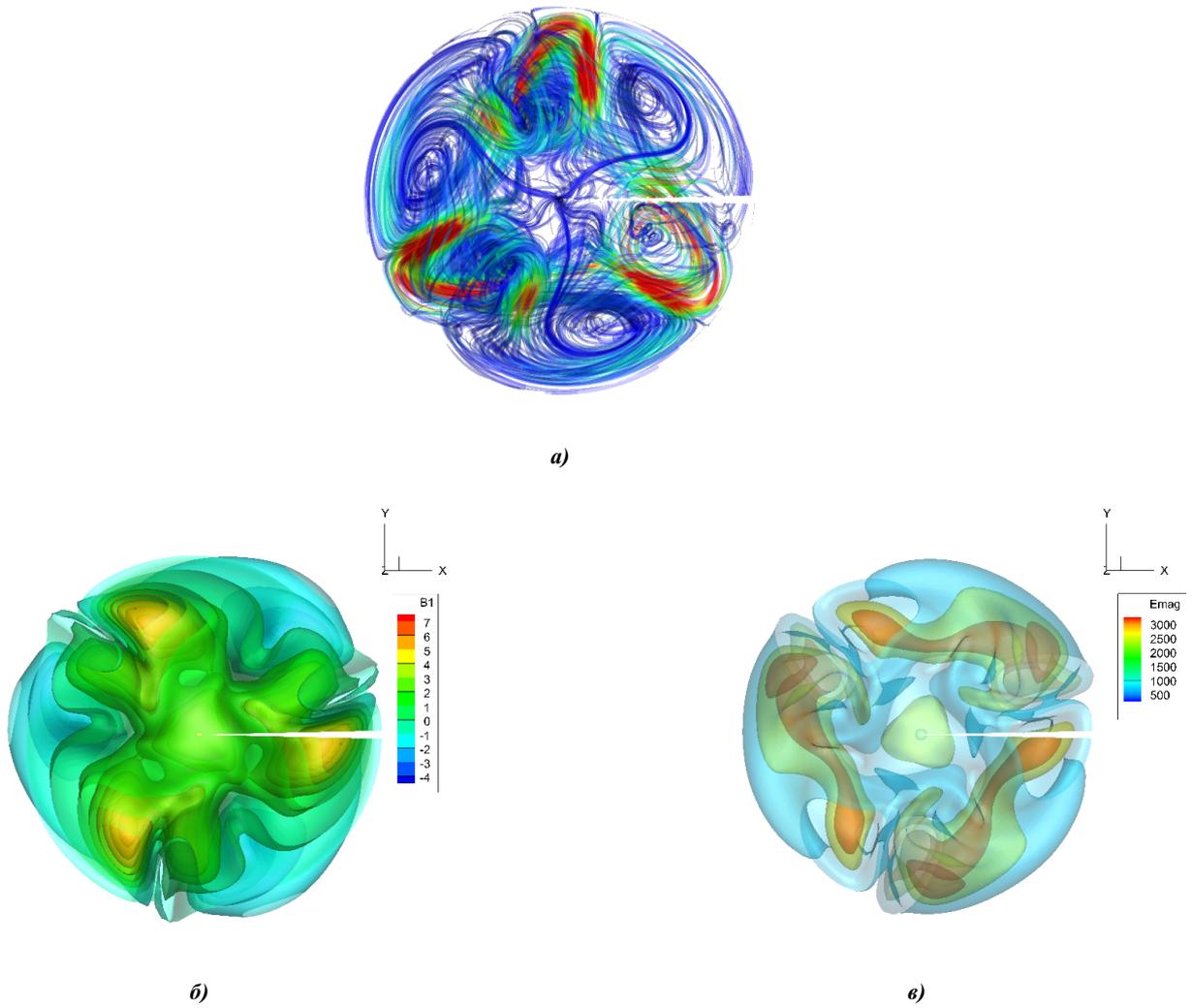


Рис. 4. Структура квазистационарного течения; б) Изоповерхности радиальной компоненты индукции магнитного поля; в) Изоповерхности магнитной энергии ($m = 3$, $Ra^* = 140$)

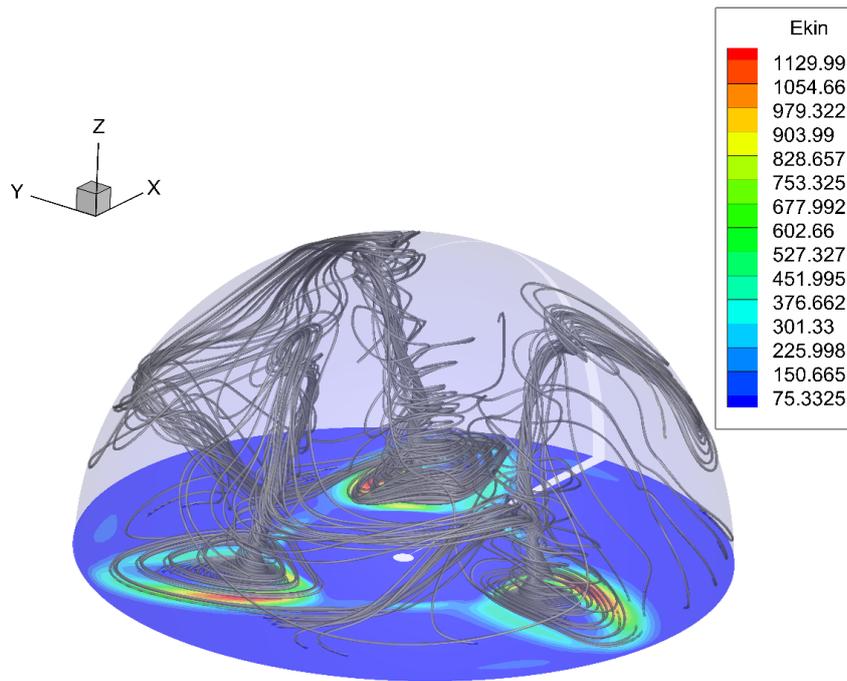


Рис. 5. Система циклонов при установившемся квазистационарном режиме МГД-конвекции ($m = 3$, $Ra^* = 140$)

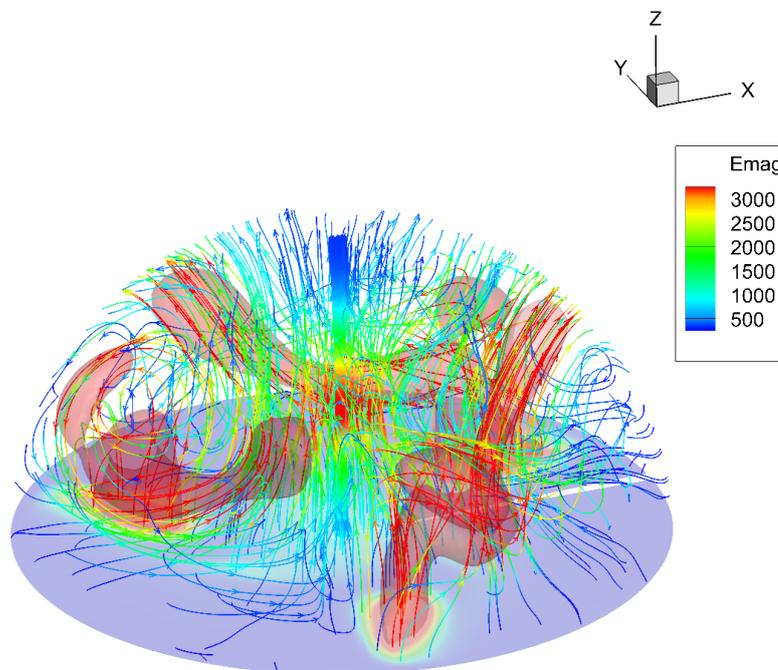


Рис. 6. Силовые линии индукции магнитного поля ($m = 3$, $Ra^* = 140$)

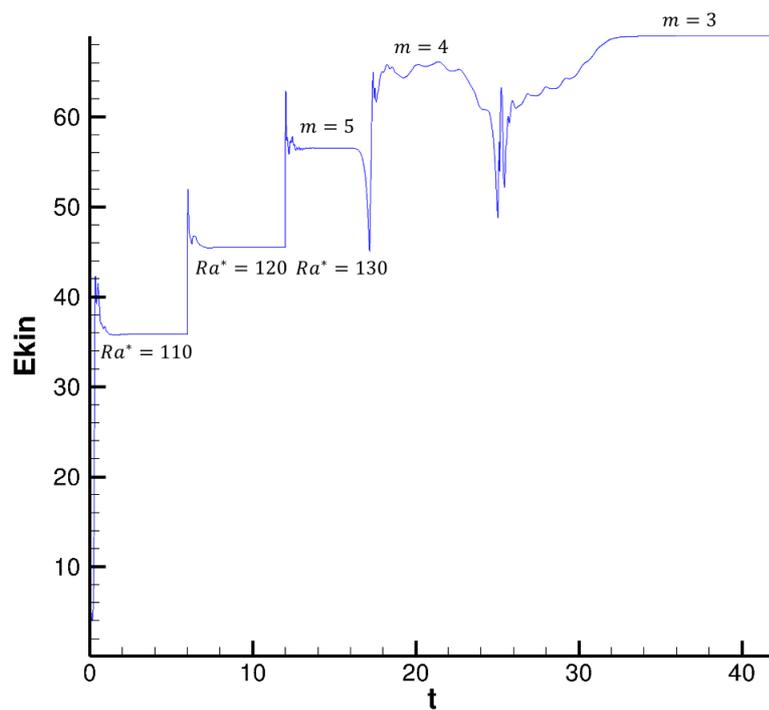


Рис. 7. График средней плотности кинетической E_{kin} энергии в жидком проводящем слое $t = 5$

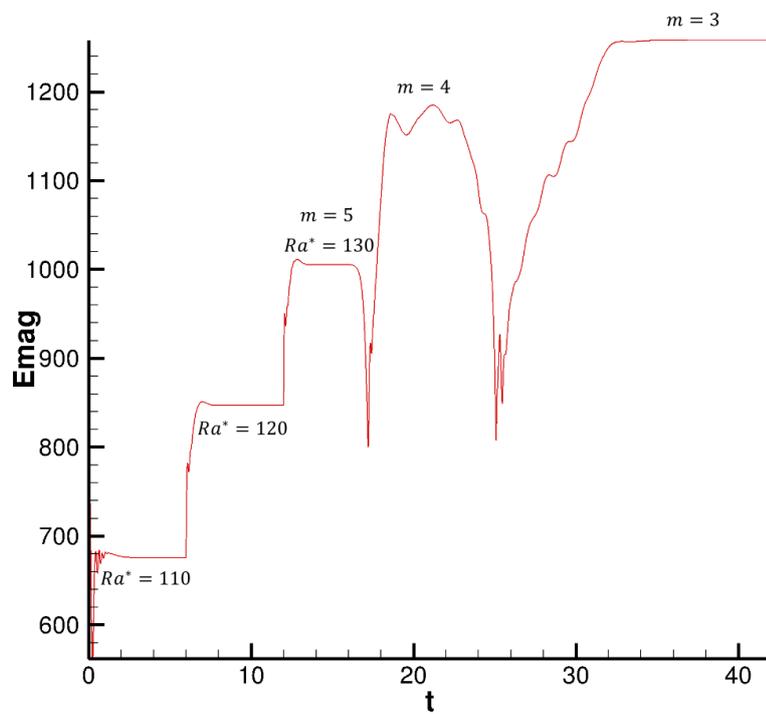


Рис. 8. График средней плотности магнитной энергии в жидком проводящем слое $t = 5$

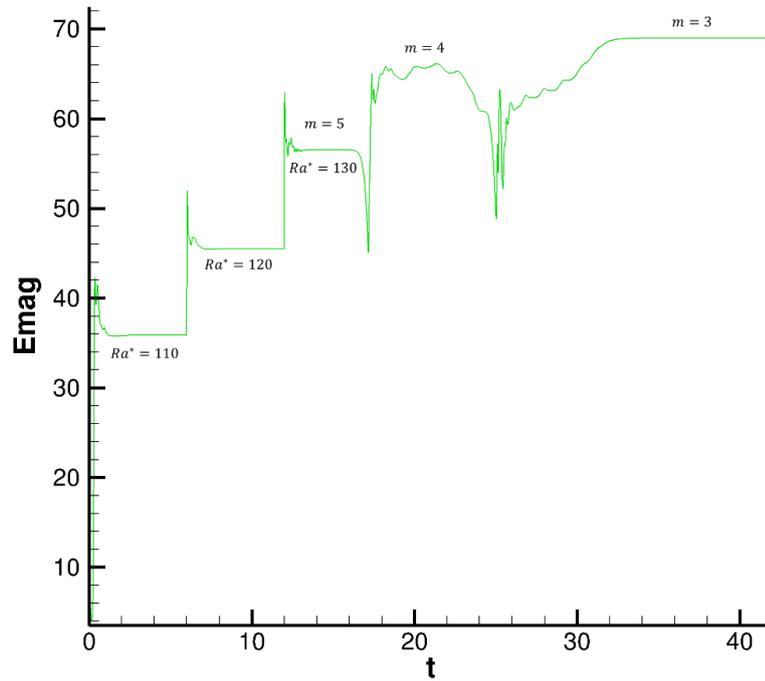


Рис. 9. График средней плотности магнитной энергии в твердом внутреннем проводящем ядре $m = 5$

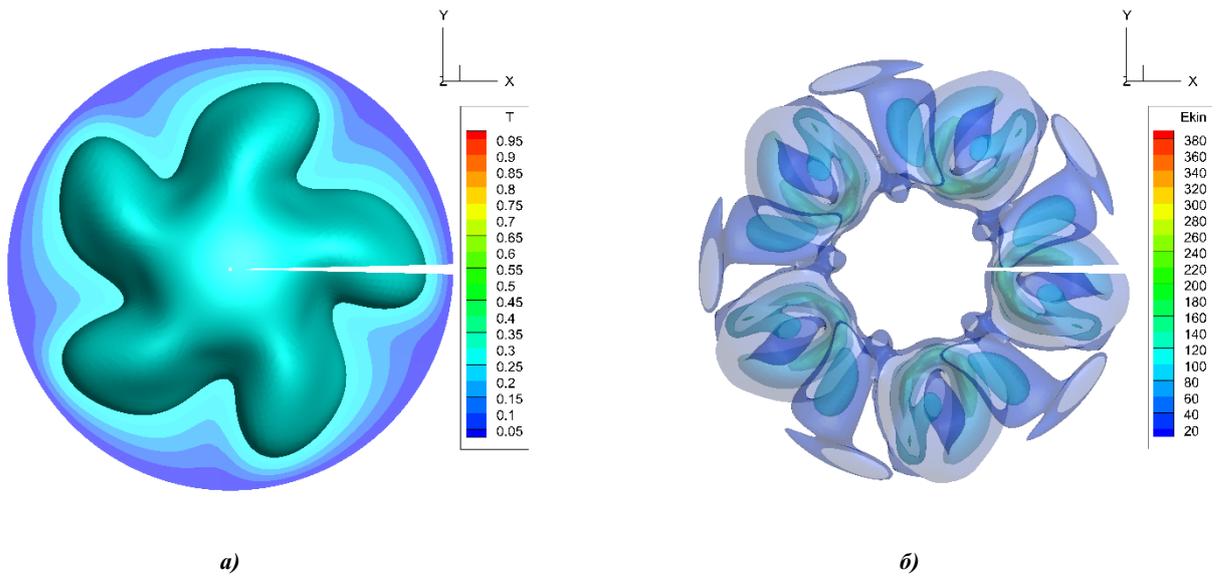


Рис. 10. а) Изоповерхность температуры ($\Theta = 0.25$); б) Распределение кинетической энергии ($m = 5, Ra^* = 120$)

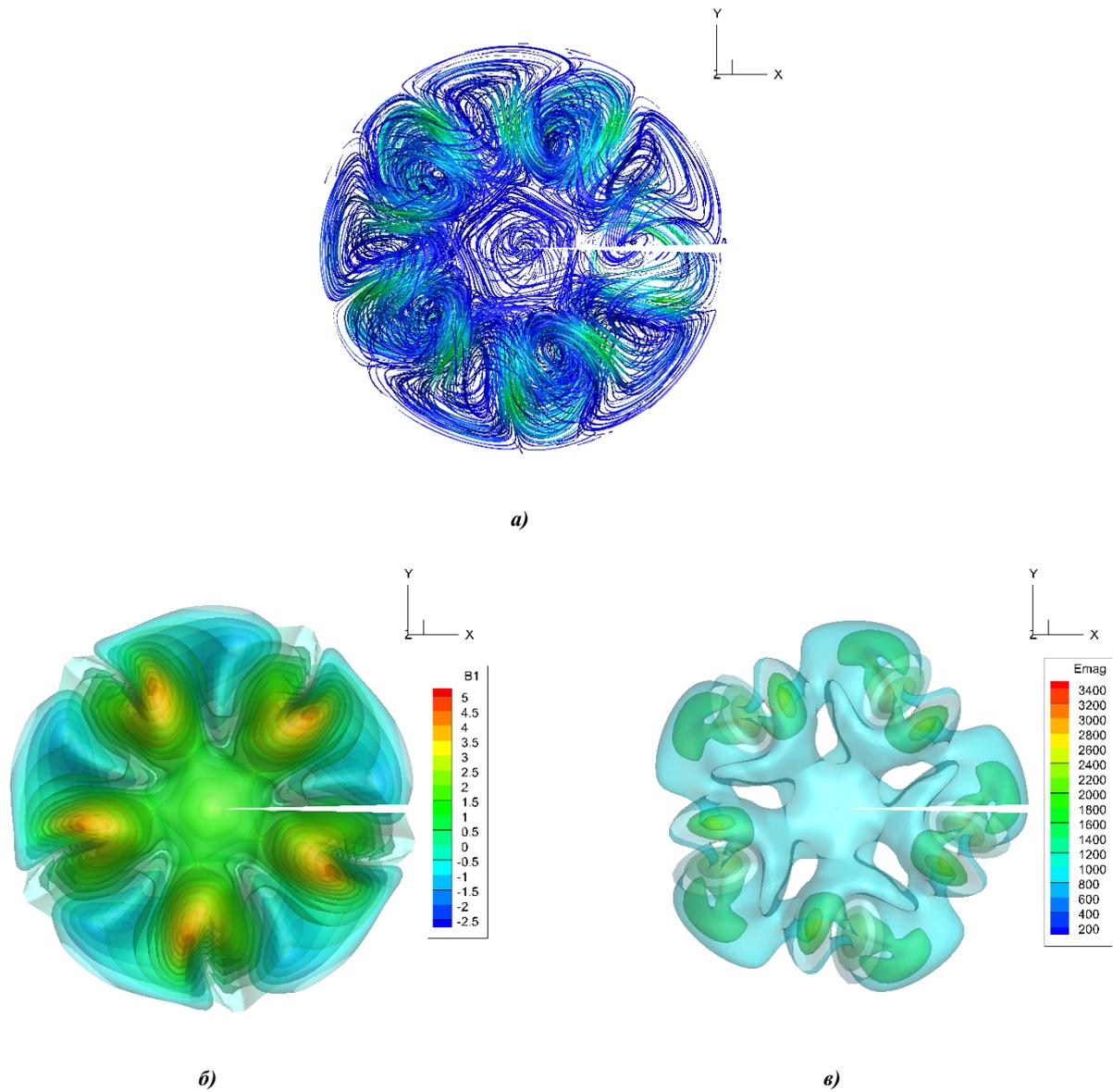


Рис. 11. а) Структура квазистационарного течения; б) Изоповерхности радиальной компоненты индукции магнитного поля; в) Изоповерхности магнитной энергии ($m = 5$, $Ra^* = 120$)

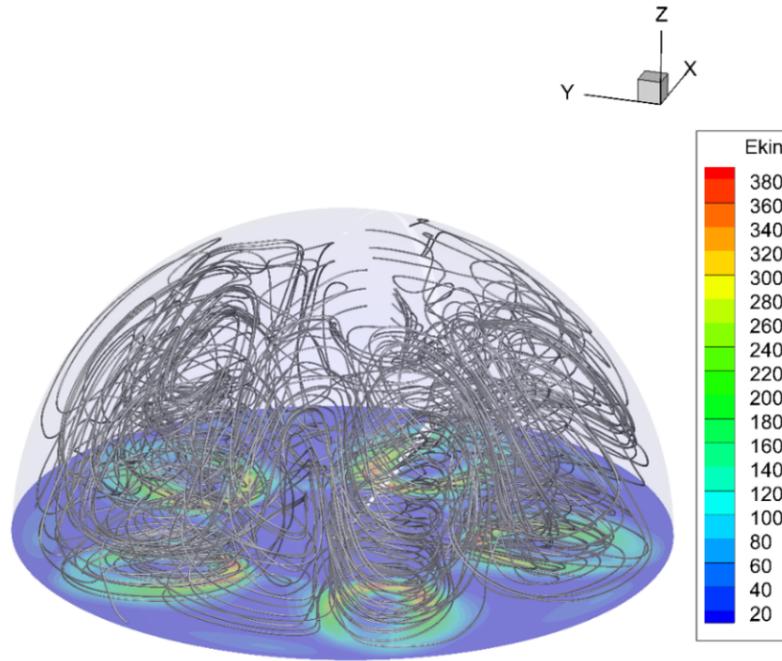


Рис. 12. Система циклонов при установившемся квазистационарном режиме МГД-конвекции ($m = 5$, $Ra^* = 120$)

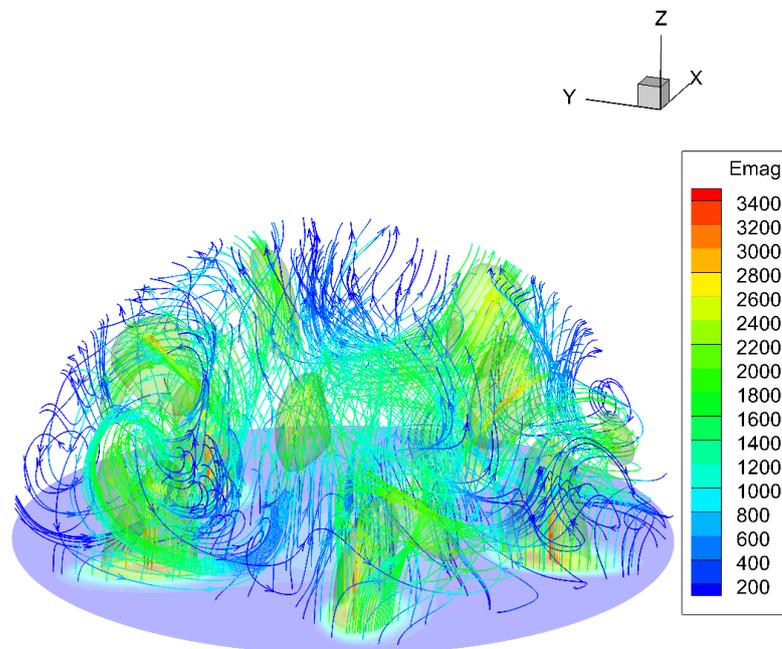


Рис. 13. Силовые линии индукции магнитного поля ($m = 5$, $Ra^* = 120$)

Заключение

Для волновых чисел $m = 3, 4, 5$ и различных значений числа Рэлея получен ряд квазистационарных решений задачи гидромагнитного динамо во вращающемся сферическом слое с вакуумными граничными условиями, в которых реализуется устойчивый уровень энергии генерируемого магнитного поля. Для каждого значения волнового числа получены зависимости плотностей кинетической и магнитной энергий от числа Рэлея. Установлено, что увеличение числа Рэлея может приводить к изменению структуры и симметрии решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wicht J., Sanchez S. Advances in Geodynamo Modelling. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. 2019;113(1–2):2–50. DOI: 10.1080/03091929.2019.1597074.
2. Yadav R. K., Gastine T., Christensen U. R., Wolk S. J., Poppenhaeger K. Approaching a Realistic Force Balance in Geodynamo Simulations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2016;113(43):12065–12070. DOI: 10.1073/pnas.1608998113.
3. Aubert J., Gastine T., Fournier A. Spherical Convective Dynamos in the Rapidly Rotating Asymptotic Regime. *Journal of Fluid Mechanics*. 2017;813:558–593. DOI: 10.1017/jfm.2016.789.
4. Schaeffer N., Jault D., Nataf H. C., Fournier A. Turbulent Geodynamo Simulations: a Leap Towards Earth's Core. *Geophysical Journal International*. 2017;211:1–29. DOI: 10.1093/gji/ggx265.
5. Aubert J. State and Evolution of the Geodynamo from Numerical Models Reaching the Physical Conditions of Earth's Core. *Geophysical Journal International*. 2023;235(1):468–487. DOI: 10.1093/gji/ggad229.
6. Aubert J. Geomagnetic Acceleration and Rapid Hydromagnetic Wave Dynamics in Advanced Numerical Simulations of the Geodynamo. *Geophysical Journal International*. 2018;214(1):531–547. DOI: 10.1093/gji/ggy161.
7. Nakagawa T., Davies C. J. Combined Dynamical and Morphological Characterisation of Geodynamo Simulations. *Earth and Planetary Science Letters*. 2022;594:117752. DOI: 10.1016/j.epsl.2022.117752.
8. Petitdemange L. Systematic Parameter Study of Dynamo Bifurcations in Geodynamo Simulations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2018;277:113–132. DOI: 10.1016/j.pepi.2018.02.001.
9. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Численное решение начально-краевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля в шаре. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020;64:15–30.
10. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Схема дискретизации уравнения индукции на смещенных сетках в ортогональных криволинейных координатах. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):60–73. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-8.
11. Бычин И. В. Тестирование магнитогидродинамического кода на задачах естественной конвекции и геодинамо. *Успехи кибернетики*. 2021;2(1):6–13. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-1-1.
12. Christensen U. R., Aubert J., Cardin P., Dormy E., Gibbons S. A Numerical Dynamo Benchmark. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2001;128:25–34. DOI: 10.1016/S0031-9201(01)00275-8.