

DOI: 10.51790/2712-9942-2020-1-1-6

ПОСТРОЕНИЕ КАРТ И РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ

А. Пападопулос

*Университет Страсбурга, Национальный центр научных исследований Франции, Страсбург,
Франция, papadop@math.unistra.fr*

Аннотация: в статье рассматриваются вопросы, касающиеся работ Эйлера в области картографии, и их последствия, в которых важную роль играют развертки поверхности сферы по меридианам и параллелям.

Ключевые слова: математическая география, построение карт, история картографии, идеальная карта, Леонард Эйлер, Жозеф-Никола Делиль, развертки.

Благодарности: эта статья основана на моем выступлении на конференции в Обнинске 14 мая 2019 года, посвященной Пафнутию Львовичу Чебышеву. Я бы хотел поблагодарить организатора конференции Валерия Галкина за приглашение. Также хочу выразить благодарность Алене Жуковой за помощь в работе над черновиком статьи.

Для цитирования: Пападопулос А. Построение карт и развертка поверхности сферы. *Успехи кибернетики*. 2020;1(1):38–45. DOI: 10.51790/2712-9942-2020-1-1-6.

MAP DRAWING AND FOLIATIONS OF THE SPHERE

Athanasios Papadopoulos

*University of Strasbourg, The French National Centre for Scientific Research, Strasbourg, France,
papadop@math.unistra.fr*

Abstract: I consider some questions related to Euler's work on cartography and its consequences, in which the foliations of the sphere by meridians and parallels play important roles.

Keywords: mathematical geography, map drawing, history of cartography, perfect map, Leonhard Euler, Joseph-Nicolas Delisle, foliation.

Acknowledgements: this paper is based on a talk I gave in Obninsk, on May 14, 2019, at a conference commemorating Pafnouti Chebyshev. I would like to thank the organizer, Valerii Galkin, for inviting me to that conference. I would also like to thank Alena Zhukova for her corrections on a preliminary version of this paper.

Cite this article: Papadopoulos A. Map Drawing and Foliations of the Sphere. *Russian Journal of Cybernetics*. 2020;1(1):38–45. DOI: 10.51790/2712-9942-2020-1-1-6.

Введение

В этой статье будут рассмотрены некоторые вопросы, связанные с трудами Эйлера по составлению географических карт и практическому применению этих работ. Важную роль в указанных исследованиях играет задача развертки сферы по меридианам и параллелям. Эту статью можно рассматривать как продолжение статьи автора [1], в которой рассказано о работах Эйлера и Чебышева по географии. Пользуясь случаем, мы уточним часто встречающиеся в литературе утверждения относительно вклада Эйлера в картографию.

Про «идеальные» карты Эйлера

Начнем с нескольких замечаний о работе Эйлера «О представлении сферической поверхности на плоскости» («De repraesentatione superficiei sphaericae super plano») [2], представленной в Петербургской академии наук 4 сентября 1775 года и опубликованной в томе «Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae» за 1777 год.

Эта статья очень редко цитируется. С одной стороны, в ней рассказывается о результате, который приписывается Эйлеру, хотя он был известен еще со времен Древней Греции, а его доказательство следует непосредственно из результатов исследований в области сферической геометрии, уже известных на тот период. С другой стороны, есть интересные результаты, которые Эйлер представил

в упомянутой статье и которые, насколько мне известно, не упоминались в статьях или книгах по математической картографии.

Результат, который обычно приписывается Эйлеру и его работе [2], говорит о том, что «идеальной» карты в виде проекции подмножества сферы на евклидову плоскость не существует. Путаницу усугубляет тот факт, что слово «идеальный» использовано Эйлером в работе без надлежащего определения. В относительно большом числе трудов, цитирующих статьи Эйлера, говорится, что Эйлер в своей работе доказал: не существует карты, образованной проекцией подмножества сферы на евклидову плоскость, которая сохраняет расстояния в масштабе. Безусловно, Эйлер доказал совсем не это. Причина такой ситуации в том, что, как это часто бывает в «исторических» исследованиях, авторы берут информацию из работ других авторов на эту же тему, не утруждая себя поиском оригинальных источников и не пытаясь их понять. Приведем несколько примеров цитат из подобных работ.

Т. Феэман (Т. Feeman) в книге «Портреты Земли: взгляд математика на карты» («Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps») [3] обсуждает существование карты, получаемой проекцией части сферы на плоскость. Карта имеет постоянный масштаб. Как выразился автор, это карта такова, что отношение

$$\frac{\text{расстояние между двумя точками на земном шаре}}{\text{расстояние между их проекциями}}$$

является постоянным, т.е. не зависит от выбранной пары точек. Автор отметил: «На протяжении многих лет попытки картографов решить эту проблему привели к появлению оригинальных, но не идеальных карт. Наконец, в 1775 г. Леонард Эйлер (1707–1783), ведущий математик своего времени и одна из важнейших математических фигур всех времен, представил Петербургской академии наук работу под названием «О представлениях сферической поверхности на плоскости», в которой он убедительно доказал, что такой карты не существует» [3, с. 25].

В статье «Dallo spazio come contenitore allo spazio come rete» С. Коппалез Родриганез (С. Corrales Rodriganez) отмечает: «Математик Леонард Эйлер в статье «De repraesentatione superficiei sphaericae super plano», опубликованной в XVIII веке, доказал, что никакая часть поверхности Земли не может быть представлена на плоской поверхности без искажений. Теорема Эйлера гласит, что идеальной карты не существует» [4, с. 125]¹. При этом автор добавляет, что «теорема Эйлера подтолкнула математических картографов к изучению сферической геометрии и тригонометрии как самостоятельного предмета, независимого от евклидовой геометрии»². Неясно, о каких именно математических картографах идет речь, но сам Эйлер тоже был картографом. Он опубликовал несколько работ по сферической геометрии и тригонометрии за несколько десятилетий до того, как написал упомянутую статью³. Кроме того, задолго до Эйлера Птолемей (II в. н.э.), один из самых известных математических картографов всех времен, также глубоко занимался сферической геометрией и тригонометрией. По сути, область сферической геометрии остается малоизученной историками математики. В книге «Портреты Земли: взгляд математика на карты» («Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps»), которая уже упоминалась, автор утверждает [3, с. 25], что сферическую геометрию можно развивать аксиоматически, как и евклидову геометрию, в которой пятый постулат Евклида заменен постулатом, гласящим, что любые две линии пересекаются (в двух точках). Это утверждение неверно. Путаница, вероятно, вызвана тем, что аксиомы гиперболической геометрии (которая вместе с евклидовой и сферической геометрией образует три «классические» геометрии — геометрии постоянной кривизны) являются именно аксиомами евклидовой геометрии с пятым постулатом, замененным на обратный ему постулат. Сферическая геометрия может развиваться аксиоматически, но соответствующий набор аксиом нельзя просто вывести из аксиом евклидовой геометрии.

Продолжим изучать цитаты из работ, исследующих результаты Эйлера.

Р. Оссерман (R. Osserman) в своей работе «Математическое картирование — от Меркатора до миллениума» («Mathematical mapping from Mercator to the millennium») приписывает Эйлеру следующую теорему: *невозможно в точном масштабе построить карту произвольной части сферической*

¹ [Il matematico Leonard Euler] nel suo articolo De repraesentatione superficiei sphaericae super plano, pubblicato nel Settecento, ha provato che nessuna parte della Terra pu' essere riprodotta su una superficie piana senza deformazione. Il teorema di Eulero dice che la carta perfetta non esiste.

² Il teorema di Eulero ha spunto i cartografi matematici a studiare la geometria sferica e la trigonometria come materie a s'e, indipendenti dalla geometria euclidea.

³ Работы Эйлера и его коллег по сферической геометрии были включены в книгу [5].

поверхности [6, с. 234]. Под «картой в точном масштабе» Оссерман понимает карту, сохраняющую расстояния в масштабе. Он также ссылается на работу Эйлера [2].

Пью Робинсон (P. Robinson) в статье «Сфера не плоская» («The sphere is not flat») пишет: «Упоминанная в заголовке теорема утверждает, что не существует изометрической (то есть с сохранением расстояний) функции проецирования сферы (или, более того, функции любого из ее непустых открытых подмножеств) на евклидову плоскость; в более общем плане – не существует изометрической проекции на любое евклидово пространство. Эту теорему можно обнаружить в работе Эйлера «De repraesentatione superficiei sphaericae super plano» 1778 года» [7].

Столь же сомнительное приписывание авторства Эйлеру встречается в главе «Кривизна и понятие пространства» книги «Математические шедевры: новые хроники исследователей» («Mathematical masterpieces: further chronicles by the explorers») А. Кнобеля, Я. Лоддера, Р. Лаубенбахера и Д. Пенгеля (A. Knoebel, J. Lodder, R. Laubenbacher and D. Pengelley), где авторы пишут: «В работе De repraesentatione superficiei sphaericae super plano, представленной в Петербургской академии наук в 1775 г., Эйлер доказал то, о чем картографы давно подозревали: а именно невозможность построения плоской карты сферического мира таким образом, чтобы все расстояния на земном шаре оказались пропорциональны (с одним и тем же коэффициентом пропорциональности) соответствующим расстояниям на карте» [8, с. 163].

Дж. Грей (J. Gray) в книге «Просто Риман, просто Чарли» («Simply Riemann, Simply Charly»), вышедшей в 2020 году, пишет о работе Эйлера в области картографии: «Эйлер использовал анализ, чтобы доказать то, о чем подозревал каждый картограф: не существует точной во всех отношениях карты поверхности Земли на плоскости. Некоторые карты превращают наикратчайшие кривые на сфере в прямые линии на плоскости; есть карты, которые сохраняют углы, и есть карты, которые одинаково масштабируют все области. Но не существует карты, которая делает все это сразу» [9].

Естественно, авторы научно-популярных трудов берут информацию из работ математиков — если способны их понять: в испанской газете «La Vanguardia» от 26 марта 2017 г. в статье «Один мир, три карты» («Un mundo, tres mapas») ее автор А. Молинс Рентер (A. Molins Renter) написал: «Переход от сферы к плоской форме двумерной и обычно прямоугольной формы приводит к тому, что в ходе преобразования всегда что-то теряется, как продемонстрировал в 1778 году швейцарский математик и физик Леонард Эйлер в работе «De repraesentatione superficiei sphaericae super plano»⁴.

Можно привести множество других примеров.

Утверждение, приписываемое всеми этими авторами Эйлеру, очевидно, было ему известно, но оно не соответствует результатам, полученным в цитируемой статье, — на самом деле они намного глубже и интереснее. Более того, как я и предполагал, результат, о котором они упоминают, был известен с I–II веков н.э. — он следует из ряда результатов, содержащихся в «Сферике» Менелая, где рассматривается геометрия сферических треугольников. Например, это прямое следствие того, что сумма углов в сферическом треугольнике всегда больше двух прямых углов (это положение 12 в [10]), или того, что в любом сферическом треугольнике ABC , где D и E обозначают средние точки AB и BC соответственно, а DE — наикратчайшая дуга, соединяющая эти точки, $DE > AC/2$ (положение 27 в [10]). Локальная изометрическая проекция открытой области сферы на открытую область евклидовой плоскости сохранила бы оба эти свойства треугольников. Очевидно, что ни один из них не является евклидовым треугольником.

В конце 9-го раздела своей работы Эйлер пишет: «С помощью вычислений доказано, что идеальное отображение сферы на плоскость невозможно». Поскольку он не дал определения идеальной карты, смысл этого предложения следует понимать в контексте — следуя аргументам, которые приводят к нему.

Недавно Сю Чариотс и И. Пападоперакис (C. Charitos, I. Papadoperakis) написали работу «О невозможности существования идеальной карты 2-сферы на евклидовой плоскости» («On the non-existence of a perfect map from the 2-sphere to the Euclidean plane») [11], в которой они дают точное изложение результата Эйлера и приводят подробное доказательство.

Для правильного изложения результата Эйлера дадим следующее определение. Карта f , полу-

⁴ Pasar de una forma geométrica esférica a un soporte plano, bidimensional y normalmente con forma rectangular provoca que algo se pierda siempre en la translación, como ya demostró el matemático Leonhard Euler en 1778, en su obra De repraesentatione superficiei sphaericae super plano.

ченная проекцией области S 2-сферы на евклидову плоскость, называется идеальной, если у каждой точки области есть окрестности, в которых выполняются следующие два условия:

- (1) f образует меридианы и параллели в виде двух полей линий, взаимно образующих одни и те же углы;
- (2) f сохраняет произвольные расстояния вдоль меридианов и параллелей.

Таким образом, на идеальной карте меридианы и параллели — это два ортогональных поля линий. Кроме того, идеальная карта сохраняет длины вдоль меридианов и параллелей. Следует отметить, что на сферическом глобусе меридианы являются геодезическими, а параллели — нет. Тот факт, что расстояния по меридианам сохраняются в любом случае, означает, что сохраняются и расстояния между точками на этих линиях. Из этого следует, хотя это и не столь очевидно, что расстояния между точками на параллелях идеальной карты также сохраняются.

Идея доказательства Эйлера заключалась в том, чтобы выразить геометрические условия в виде системы частных дифференциальных уравнений и показать, что эта система не имеет решения.

Кроме того, Эйлер в своей работе, показав невозможность создания идеальной карты, доказывает еще несколько результатов. Он заявляет, что, поскольку идеальной карты не существует, необходимо искать наилучшие аппроксимации. Ученый пишет: «Мы вынуждены рассматривать неточные представления, так что сферическая фигура в чем-то отличается от своего изображения на плоскости». Затем исследователь рассматривает несколько конкретных проекций сферы, систематически осуществляя поиск удовлетворяющих им дифференциальных уравнений в частных производных. Эйлер рассматривает несколько классов карт: конформные карты (он называет их «симилитудами малого масштаба»), карты, сохраняющие площадь, и карты, где проекции всех меридианов перпендикулярны заданной оси, в то время как проекции всех параллелей параллельны ей. Ученый приводит примеры карт, удовлетворяющих каждому из трех вышеперечисленных свойств, и в каждом случае изучает их линейные и угловые искажения.

Географические карты и построение параллелей и меридианов на развертках

Важной особенностью статьи Эйлера [2] и других статей, которые мы рассмотрим ниже, является то, что большинство требуемых свойств географических карт сформулировано с точки зрения того, каким образом эти карты преобразуют две географически наиболее известные развертки сферы, а именно развертки по параллелям и по меридианам.

Вспомним, что, если поверхность Земли считается сферой, то *параллели* — это семейство окружностей, равноудаленных от экватора. Экватор — это наибольшая окружность, перпендикулярная оси вращения Земли и отделяющая северное полушарие от южного. В геометрии сферы параллели — это геометрические окружности, то есть равноудаленные от центра точки. Центром является либо северный, либо южный полюс (окружность на сфере имеет два центра). Кроме того, параллели — это малые окружности, то есть пересечения сферы с плоскостями, не проходящими через центр (за исключением экватора), которые также считаются параллелями (на нулевом расстоянии от самих себя) и представляют собой большую окружность, т.е. пересечение сферы с плоскостью, проходящей через центр. Эта разница важна, потому что большие окружности на сфере являются геодезическими, а малые — нет. Эти развертки имеют две точки сингулярности на северном и южном полюсах.

Вторая развертка, используемая в работе [2], — развертка по *меридианам*. Их лепестки представляют собой большие окружности, перпендикулярные экватору, или, что аналогично, большие окружности, проходящие через северный и южный полюса. В отличие от параллелей, все меридианы представляют собой большие окружности, а значит, являются геодезическими. Они имеют две точки сингулярности на северном и южном полюсах.

Со времен древнегреческой географии развертки по параллелям и меридианам играют важную роль в составлении карт — как регионов Земли, так и участков небесной сферы. На рис. 1 показано изображение небесной сферы, датированное I веком н.э. Это развертка по параллелям и меридианам. Такое же изображение может представлять собой поверхность Земли.

Свойства изображений меридианов и параллелей — важные факторы ряда известных проекций. Например, в стереографической проекции с центром на северном полюсе параллели проецируются в концентрические окружности с центром на проекции южного полюса, а меридианы — в прямые, пересекающиеся на северном полюсе. Проекция из центра сферы на плоскость, касательную к южному

полюсу (гномоническая проекция), используется со времен Фалеса. Ее свойства аналогичны: параллели проецируются в окружности с центром на южном полюсе, а меридианы — в прямые, проходящие через этот полюс.

Развертки по параллелям и по меридианам перпендикулярны. Их изображения на географической карте обычно имеют вид, показанный на рис. 1.



Рис. 1. *Небесная сфера с двумя перпендикулярными развертками по параллелям и меридианам. Фрагмент настенной росписи I века н.э. Метрополитен-музей, Нью-Йорк, отдел греческого и римского искусства (фото автора)*

В том же году, что и статья «De repraesentatione superficiei sphaericae super plano», были опубликованы две других работы Эйлера по географии: «De proiectione geographica superficiei sphaericae» [12] и «De proiectione geographica Deslisiana in mappa generali imperii russici usitata» [13]. Последняя упомянутая статья требует ряда комментариев.

Статья [13] рассматривает проецирование со сферы, использовавшееся Жозефом-Никола Делилем. Он на протяжении ряда лет был главным географом и руководителем астрономического департамента Петербургской академии наук. Он отвечал за составление новых точных карт Российской империи. С 1735 по 1740 год Эйлер помогал Делилю в этой работе, пока сам не стал руководителем географического департамента Академии, после того как между Делилем и администрацией Академии возник конфликт по поводу так называемого «Русского атласа» («Atlas Russicus») — проекта, начатого Петром I, за который отвечал Делиль и который он все время откладывал. В 1740 г. Делиль был отстранен, а руководство проектом «Русский Атлас» передано Эйлеру.

В статье Эйлер начинает с обзора основных свойств стереографической проекции, используемой географом Иоганном Матиасом Хасе. В 1739 г. в Нюрнберге Хасе опубликовал карту России, известную под названием «Географическая карта Российской империи и Татарии, как большой, так и малой, в Европе и Азии» («Imperii Russici et Tatariae universae tam majoris et asiaticae quam minoris et europaeae tabula»).

Эйлер упоминает о свойствах двух разверток по параллелям и меридианам — в частности о том, что их изображения пересекаются под прямым углом (на самом деле карта конформная, то есть углосохраниющая). Далее Эйлер рассматривает неудобства такой проекции: длины сильно искажены



Рис. 2. Карта северной части Тихого океана с восточной частью Азии и северной частью Америки из атласа Эйлера «Atlas Geographicus» (Берлин, 1753 г.)

на больших расстояниях, особенно для карт, представляющих крупные области Земли, а кривизна изображений меридианов на географической карте неодинакова несмотря на то, что меридианы представляют собой окружности. В частности, Камчатка искажена в четыре раза сильнее по сравнению с участком в центре карты.

В п. 5 статьи Эйлер перечисляет четыре свойства идеальной географической карты: 1) проекции меридианов — прямые; 2) градусы широты вдоль меридианов одинаковы; 3) проекции параллелей пересекаются с проекциями меридианов под прямым углом; 4) в каждой точке карты соотношение градусов по параллели к градусам по меридиану такое же, как и на сфере. Затем он заявляет, что, поскольку этого невозможно достичь, то вместо последнего условия можно потребовать, чтобы отклонение отношения градусов широты и долготы в каждой точке от их истинного соотношения было как можно меньше (в идеале эта ошибка должна быть незаметной).

Затем он упоминает построение карты Делиля. На этой карте сначала выбираются две граничные параллели, ограничивающие представляемую область. В случае карты Российской империи эти крайние параллели проходят на широтах 40° и 70° . Затем выбираются еще две особые параллели, на которых соотношения градусов широты и долготы являются точными. Эйлер пишет, что эти две параллели выбираются таким образом, чтобы минимизировать максимальное отклонение соотношений градусов широты и долготы по всей карте. Он пишет, что, как установил Делиль, оптимальным выбором таких параллелей является их равноудаленность от центральной параллели карты и от крайних выбранных параллелей. Кроме того, расстояния должны сохраняться на всех меридианах, а максимальное отклонение по всей карте должно быть сведено к минимуму. На рис. 3 представлена карта, составленная Делилем по его методу.

Начиная с п. 7, Эйлер рассматривает математическую модель семейства прямых, представляющих собой меридианы, находящиеся на расстоянии одного градуса друг от друга. Он отмечает, что одним из преимуществ проекции Делиля является то, что если меридианы представлены прямыми линиями, то изображения других больших окружностей не сильно отклоняются от прямых (п. 22 [13]).



Рис. 3. Карта Российской империи Жозефа-Никола Делиля (Санкт-Петербург, 1745 г.) [14]

Делиль дает точные оценки этого отклонения (п. 23 и далее).

В пп. 10–16 Эйлер приводит математические подробности и показывает разницу между этим представлением и реальной ситуацией в крайних точках, а в пп. 17–23 он производит фактические вычисления для особого случая — карты Российской империи. В последних разделах статьи Эйлер изучает изображения больших окружностей на сфере и показывает, что разница между этими изображениями и круговыми дугами незаметна. Он рассчитывает радиус такой дуги, который, по его мнению, очень велик, и приходит к выводу, что самые короткие линии на карте не сильно отличаются от прямых.

В заключение еще раз подчеркнем, что в трактовке Эйлером проекции Делиля, как и в теореме, о которой мы говорили выше, на идеальных картах, имеются важные требования к двум проекциям, определяемым параллелями и меридианами.

Помимо статьи [13], в которой он описал метод составления географических карт Делиля, Эйлер пояснил этот же метод в работе «Atlas Geographicus omnes orbis terrarum regiones in XLI tabulis exhibens» [15], опубликованной Королевской Прусской академией наук в 1753 г. в Берлине, где он прослужил 25 лет между двумя периодами работы в Санкт-Петербурге. Атлас содержит 45 карт. Он издан под редакцией Эйлера, который также написал предисловие от 13 мая 1753 г. В атласе используется несколько видов проекций больших участков Земли. Во всех этих проекциях меридианы перпендикулярны параллелям.

Карта, изображенная на рис. 2, взята из этого атласа. Это последняя карта в атласе. Она построена методом Делиля. Эйлер в предисловии комментирует этот метод. Эйлер пишет, что метод Делиля кажется ему наиболее подходящим для правильного представления северных регионов земного шара. Он напоминает, что в этом представлении меридианы являются прямыми и их градусы равны: изображения двух меридианов, удаленных друг от друга на один градус, сходятся таким образом, что на двух заранее выбранных широтах отношение градусов долготы к градусам широты такое же, как и в реальности. Как указано выше, это свойство он представляет в статье [13]. Для территории Российской империи после выбора двух граничных параллелей на 40 и 70 градусах выбраны две параллели, находящиеся на одной высоте по границам представленного региона, а также проходящие через его центр на $47^{\circ}30'$ и $62^{\circ}30'$. Ниже этих двух широт соотношения между градусами долготы и широты являются точными. В остальных местах они почти точны (разница незаметна). Кроме того, в этом

представлении все меридианы (которые являются прямыми) соединяются в одной точке. Эта точка не является Северным полюсом: она находится на семь градусов за полюсом. Если принять эту точку за центр, то проекции параллелей представляют собой окружности. Эйлер пишет, что не следует считать недостатком этой карты ни то, что центр, в котором пересекаются все меридианы, находится так далеко от полюса, ни то, что на этой карте параллели, образующие полуокружности, занимают не 180° по долготе, а гораздо больше — иногда даже до 250° .

Лагранж, чье имя ассоциируется с Эйлером сразу в нескольких аспектах, подчеркивал в своей работе по построению географических карт следующий факт: единственное, что нам нужно сделать при составлении географической карты, — это задать проекции меридианов и параллелей по определенному правилу (см. [16, с. 640]). Это простое замечание легло в основу развития современной математической картографии. Мы попытались изложить эту идею, приведя примеры из работ Эйлера и Делиля. Другие примеры представлены в работах Ламберта, Гаусса, Бонне и прочих. Готовящаяся к печати книга [5] содержит раздел, посвященный картографии эпохи Эйлера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Papadopoulos A. *Euler and Chebyshev: From the Sphere to the Plane and Backwards*. 2016. hal-01352229.
2. Euler L. De repraesentatione superficiei sphaericae super plano. *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae*. 1777, p. 107–132. *Opera Omnia*. Series 1, Volume 28, pp. 248–275.
3. Feeman T. G. *Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps*. AMS, Providence, RA; 2002.
4. Corrales Rodriganez C. Dallo spazio come contenitore allo spazio come rete. In: *Matematica e cultura 2000*. Papers from the conference held at the Università Ca' Foscari di Venezia, Venice, March 26–27, 1999. Ed. M. Emmer. Collana Matematica e Cultura. Milan: Springer-Verlag Italia; 2000.
5. Caddeo R., Papadopoulos A., Zhukova A. *Spherical Geometry in the Eighteenth Century*, book to appear.
6. Osserman R. Mathematical Mapping from Mercator to the Millennium. *Mathematical Adventures for Students and Amateurs* / Ed. D. F. Hayes and T. Shubin. Mathematical Association of America; 2004. P. 233–257.
7. Robinson P. L. The Sphere is not Flat. *The American Mathematical Monthly*. 2006;113(2):171–173.
8. Knoebel A., Lodder J., Laubenbacher R., Pengelley D. *Mathematical Masterpieces: Further Chronicles by the Explorers*. Springer Verlag; 2007.
9. Gray J. *Simply Riemann, Simply Charly*. New York; 2020.
10. Rashed R., Papadopoulos A. *Menelaus' Spherics: Early Translation and al-Māhānī/al-Harawī's Version (Critical edition of Menelaus' Spherics from the Arabic manuscripts, with historical and mathematical commentaries)*. De Gruyter, Series: Scientia Graeco-Arabica, 21, 2017. 890 p.
11. Charitos C., Papadoperakis I. On the Non-existence of a Perfect Map from the 2-sphere to the Euclidean Plane. *Eighteen Essays in Non-Euclidean Geometry*. Ed. V. Alberge and A. Papadopoulos. Zürich: Eur. Math. Soc.; 2019. P. 125–134.
12. Euler L. De proiectione geographica superficiei sphaericae. *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae*. 1777, p. 133–142. *Opera Omnia*. Series 1, Volume 28, pp. 276–287.
13. Euler L. De proiectione geographica Deslisliana in mappa generali imperii russici usitata. *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae*. 1777, p. 143–153. *Opera Omnia*. Series 1, Volume 28.
14. Delisle J.-N. *A Proposal for the Measurement of the Earth in Russia*, Read at a Meeting of the Academy of Sciences of St. Petersburg, Jan. 21. 1737. by Mr Jos. Nic. de L'Isle, First Professor of Astronomy, and F. R. S., Translated from the French, Printed at St. Petersburg, Phil. Trans. R. Soc. Lond. 40, 27–49 (1737).
15. Euler L. Preface of the *Atlas Geographicus omnes orbis terrarum regiones in XLI tabulis exhibens*, Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Prusse, Berlin, 1753. *Opera Omnia*. Series 3, Volume 2, p. 305–317.
16. De Lagrange J.-L. Sur la construction des cartes géographiques. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, année 1779, Premier mémoire, *Œuvres complètes*, tome 4, 637–664. Second mémoire *Œuvres complètes*, tome 4, 664–692.