DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-2-02

СТОХАСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ЭНЕРГИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С N-СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В. П. Кощеев
НИУ Московский авиационный институт, филиал «Стрела», г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация
✍ *koshcheev1@yandex.ru*

Аннотация: уравнение эволюции энергии динамической системы с n-степенями свободы построено с помощью условия несохранения адиабатического инварианта.

Ключевые слова: стохастическое уравнение, эволюция энергии, нелинейная динамическая система с n-степенями свободы, автоколебательные уравнения.

Для цитирования: Кощеев В. П. Стохастическое уравнение эволюции энергии динамической системы с n-степенями свободы. *Успехи кибернетики*. 2023;4(2):16–17. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-2-02.

Поступила в редакцию: 01.04.2023. *В окончательном варианте: 16.05.2023.*

A STOCHASTIC EQUATION OF THE ENERGY EVOLUTION IN A DYNAMIC SYSTEM WITH N-DEGREES OF FREEDOM

V. P. Koshcheev
Moscow Aviation Institute (National Research University), Strela Branch, Moscow oblast, Zhukovsky, Russian Federation
✍ *koshcheev1@yandex.ru*

Abstract: the equation of energy evolution in a dynamical system with N degrees of freedom is constructed using the condition of adiabatic invariant non-conservation.

Keywords: stochastic equation, energy evolution, nonlinear dynamical system with N degrees of freedom, auto-oscillatory equations.

Cite this article: Koshcheev V. P. A Stochastic Equation of the Energy Evolution in A Dynamic System with N-Degrees of Freedom. *Russian Journal of Cybernetics*. 2023;4(2):16–17. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-2-02.

Original article submitted: 01.04.2023. *Revision submitted: 16.05.2023.*

В [1] были построены стохастические уравнения эволюции динамической системы с одной и двумя степенями свободы. В [2, 3] с помощью [1] были построены стохастические уравнения эволюции энергии для уравнения Ван дер Поля и модели Келдыша с одной степенью свободы, которая описывает автоколебания (флаттер) динамической системы [4]. Было показано, что автоколебания подавляются, когда интенсивность белого шума превышает критическое значение. Этот эффект индуцированного шумом перехода для уравнения Ван дер Поля был впервые обнаружен в [5], что было отмечено в [6].

В настоящей работе будет построено стохастическое уравнение эволюции энергии динамической системы с n-степенями свободы.

Уравнение движения для i-ой динамической переменной запишем в виде:

$$\dot{p}_i + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_i} = f_i, \tag{1}$$

где $p_i = m\dot{x}_i$ — импульс, а m — масса частицы; $\bar{U} = \bar{U}(x_1,...,x_n)$ — потенциальная энергия; $f_i = \bar{f}_i + \delta f_i$; $\bar{f}_i = \bar{f}_i(x_1,...,x_n;\dot{x}_1,...,\dot{x}_n;t)$ — среднее значение, а δf_i — флуктуация возмущающей силы; $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$.

Определим энергию:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m} + \bar{U} \tag{2}$$

и скорость изменения энергии динамической системы с n-степенями свободы:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i. \tag{3}$$

Адиабатический инвариант динамической системы с n-степенями свободы $I_n = I_n(E)$ запишем в виде [7]:

$$I_n = \int_{C_{2n}} \prod_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx_i, \tag{4}$$

где $C_{2n} : E = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m} + \bar{U}$ — граница области, по которой производится интегрирование.

Свойства дифференциальных форм рассмотрены в [7–9]. Выполним интегрирование по импульсам всех динамических переменных. В результате получим:

$$I_n = \frac{(2m\pi)^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \int_{C_n} \left[E - \bar{U}(x_1,\ldots,x_n)\right]^{\frac{n}{2}} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \tag{5}$$

где $C_n : E = \bar{U}(x_1,\ldots,x_n)$ — граница области, по которой производится интегрирование; $\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ — гамма-функция.

Если энергия динамической системы не сохраняется $E = E(t)$, то не сохраняется и адиабатический инвариант $I_n = I_n\left[E(t)\right]$. Вычислим скорость изменения адиабатического инварианта:

$$\begin{gathered} \frac{dI_n}{dt} = \frac{dI_n}{dE}\frac{dE}{dt} \\ \frac{dI_n}{dt} = \frac{(2m\pi)^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{n}{2} \int_{C_n} \left[E - \bar{U}(x_1,\ldots,x_n)\right]^{\frac{n}{2}-1} \frac{dE}{dt} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \end{gathered} . \tag{6}$$

Так как левые части уравнений равны, то получим скорость изменения энергии динамической системы в виде:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\int_{C_n} \left[E - \bar{U}(x_1,\ldots,x_n)\right]^{\frac{n}{2}-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n} \int_{C_n} \left[E - \bar{U}(x_1,\ldots,x_n)\right]^{\frac{n}{2}-1} \frac{dE}{dt} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \tag{7}$$

где из уравнений $\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i$ и $E = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m} + \bar{U}$ следует исключить все p_i.

Если $n = 1$ или $n = 2$, то уравнение (7) совпадает с соответствующим результатом работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кощеев В. П. Стохастическое уравнение эволюции каналированных частиц. *Письма в ЖТФ*. 2001;27(18):61–64.
2. Кощеев В. П. Индуцированный шумом переход между стационарными состояниями осциллятора Ван дер Поля. *Письма в ЖТФ*. 2014;40(3):64–69.
3. Koshcheev V. P., Shtanov Y. N. Noise-Induced Self-Oscillation (Flutter) Suppression in the Keldysh Model. *ArXiv*:2111.02819.
4. Келдыш М. В. О демпферах с нелинейной характеристикой. *Тр. ЦАГИ*. 1944;557:26–37.
5. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Воздействие электронных флуктуаций на ламповый генератор. *ЖЭТФ*. 1955;28:509–523.
6. Хорстхемке В., Лефевр Р. *Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии*. М.: Мир; 1987. 400 с.
7. Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. М.: Наука; 1974. 432 с.
8. Зорич В. А. *Математический анализ*: Часть 2. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы; 1984. 640 с.
9. Яковлев Г. Н. *Лекции по математическому анализу*. Часть 2: учеб. пособие для вузов. М.: Издательство физико-математической литературы; 2001. 480 с.