

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-4-03

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ КОНЕЧНОСТИ ЧЕЛОВЕКА С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ**Д. В. Горбунов^{1,a}, Т. В. Гавриленко^{1,2}**¹ Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация² Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,

г. Сургут, Российская Федерация

^a ✉ Gorbunov.dv@mail.ru

Аннотация: любое моделирование процессов, в том числе биологических, базируется на закономерностях, происходящих как внутри, так и снаружи объекта моделирования. Изучение динамики поведения сложных биосистем позволило установить некоторые закономерности, которые осложняют возможность эффективно моделировать динамику тех или иных параметров тем, что подобные системы обладают хаотической, самоорганизующейся структурой. В биосистемах нет возможности повторить начальное x_i , любое промежуточное x_n и конечное x_k состояния как системы в целом, так и любой отдельной подсистемы. В этой связи моделирование сложных биосистем должно базироваться на хаотических закономерностях. Созданная математическая модель позволяет максимально точно моделировать движение конечности человека в двумерной плоскости. В основу математической модели положены три принципа: во-первых, включение регуляторных механизмов модели осуществляется на основе теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью; во-вторых, траектория удержания конечности в пространстве (моделирование тремора человека) изменяет свое направление случайным образом в ограниченном диапазоне, что позволяет решить проблему моделирования системы с самоорганизующейся структурой; в-третьих, все изменения биосистемы происходят на основе случайных чисел. Созданная математическая модель является масштабируемой, что позволит в дальнейшем привести ее к трехмерному варианту с возможностью изменять количество мышечных пучков, задействованных в движении конечности человека.

Ключевые слова: математическое моделирование, движение конечности, хаотическая динамика.

Для цитирования: Горбунов Д. В., Гавриленко Т. В. Математическое моделирование движений конечности человека с хаотической динамикой. *Успехи кибернетики*. 2022;3(4):24–31. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-4-03.

SIMULATION OF HUMAN LIMB MOVEMENTS WITH CHAOTIC DYNAMICS**D. V. Gorbunov^{1,a}, T. V. Gavrilenko^{1,2}**¹ Surgut State University, Surgut, Russian Federation² Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation^a ✉ Gorbunov.dv@mail.ru

Abstract: any simulation of processes, including biological ones, follows the patterns occurring both inside and outside of the object. The study of complex biosystem dynamics identified some such patterns which complicate the simulation of system parameter dynamics since such systems have a chaotic, self-organizing structure. In biosystems, it is impossible to reproduce the initial x_i , any intermediate x_n and final x_k states of both the entire system and any subsystem. Simulation of complex biosystems should consider chaotic patterns. The proposed simulation model accurately represents the 2D movement of a human limb. The model implements three principles: the regulatory circuits of the model are represented by differential equations with discontinuous right-hand side; the limb trajectory (tremor simulation) direction is changed randomly in a limited range to simulate a self-organizing system; any changes to the biosystem are random. The model is scalable and can be applied to a 3D study with more muscle bundles controlling the movement of a human limb.

Keywords: simulation, limb movement, chaotic dynamics.

Cite this article: Gorbunov D. V., Gavrilenko T. V. Simulation of Human Limb Movements with Chaotic Dynamics. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(4):24–31. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-4-03.

Одним из вариантов проведения исследований в области изучения динамических объектов, в том числе биологических, является разработка модели, которая способна эффективно воспроизвести динамику поведения моделируемой системы. Для теоретической биофизики математическое моделирование позволяет более детально изучить, что происходит в биомеханической системе при осуществлении двигательных актов, а также детально исследовать процессы, проходящие не только в биомеханической системе, но и в нервно-мышечной, и в центральной нервной системе в целом. Создание математической модели открывает возможность изучать патологические процессы, что позволит разработать новые эффективные методы и способы диагностирования заболеваний при переходе к персонализированной медицине. Математическое моделирование биомеханической системы можно использовать при тестировании различных устройств (например, носимых устройств против тремора) или для подготовки спортсменов и т. д.

Функциональные системы организма человека работают в режиме самоорганизации с хаотической динамикой. На рис. 1 представлен пример хаотической динамики биомеханической системы. На этом рисунке виден некоторый уровень удержания позиции (длинный пунктир) и перемещение конечности в окрестности этого уровня (сплошная линия), а также траектория перемещения конечности (короткий пунктир).

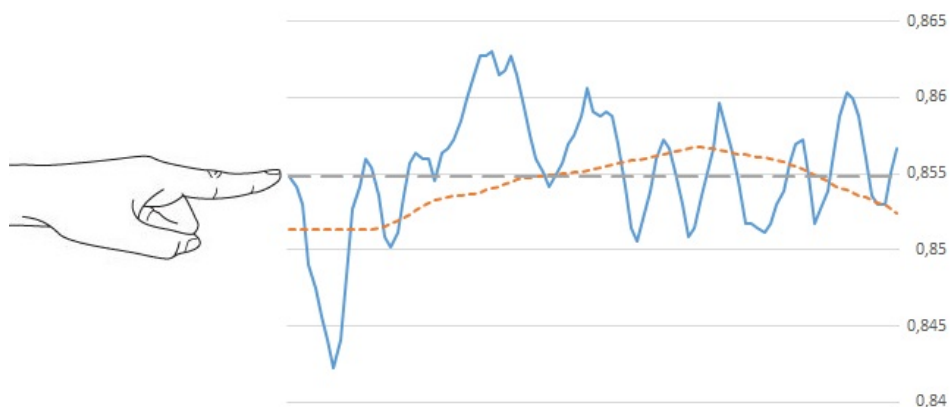


Рис. 1. Схематическое изображение симуляционной модели в интерпретации машинного алгоритма с уровнем удержания $x = \text{const}$

Биомеханические параметры системы непрерывно и хаотически изменяются (подтверждена гипотеза Н.А. Бернштейна «повторение без повторения» [1]). Установлено, что траектория движения конечности в пространстве $x \neq \text{const}$ (пример реального движения и траектории этого движения приведен на рис. 2, А и рис. 2, В соответственно). Соответственно, определение траектории удержания позиции можно осуществить с помощью дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, что облегчит построение математической модели биомеханической системы человека.

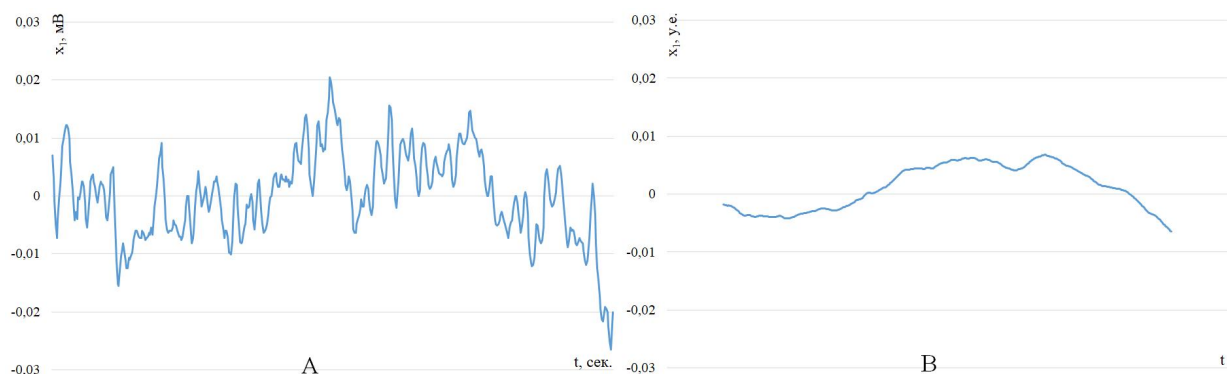


Рис. 2. Временная развертка треморограммы (А) и её траектория движения (В)

Как уже было отмечено ранее, движение биомеханической системы непрерывно изменяет вектор состояния системы (в двумерном случае в момент времени Δt_n система движется вверх, в другой Δt_{n+1} — вниз, движение вектора состояния системы осуществляется без возможности прогнозирования). На данный момент времени не было эффективных моделей, способных воспроизвести работу биомеханической системы с самоорганизующейся структурой, базирующихся на хаотической динамике движений биомеханической системы. Процесс создания эффективной модели, вероятнее всего, аналогичен поиску решения А. Ф. Филипповым [2]. Эффективность работы модели означает высокую степень приближения данных, полученных в ходе вычислительного эксперимента, к данным, полученным в ходе проведения натурных экспериментов в соответствии с установленными закономерностями динамики параметров биомеханической системы. В работе приведены два способа оценки эффективности: на основе математической статистики [3–5] и на основе теории хаоса-самоорганизации [6, 7].

Математическая модель биомеханической системы

При создании математической модели в основу был положен принцип случайного изменения параметров, т. е. все параметры генерируются из диапазонов на основе вихря Мерсенна [8]. Структура мышечных пучков в математической модели максимально приближена к структуре реальных мышечных пучков. На рис. 3 представлены некоторые мышечные пучки (рис. 3, А, рис. 3, С), между которыми проходит идеализированный уровень удержания конечности в пространстве (рис. 3, В). Сами же модельные мышечные пучки, как и реальные мышцы, обладают тремя типами мышечных волокон (на рис. 3, А и рис. 3, С обозначены разными размерами) [9]. В биосистемах отдельные мышечные волокна подчиняются закону «все или ничего», т. е. отдельное мышечное волокно либо сокращается (был преодолен барьерный уровень возбуждения мотонейрона), либо не сокращается. В работу могут быть включены только те мышечные волокна, которые готовы к работе, таким образом в математической модели реализован механизм утомления.

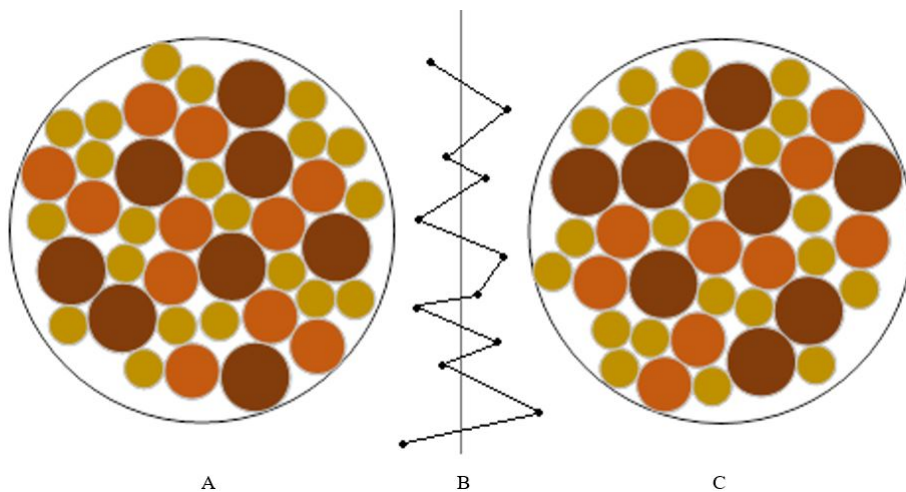


Рис. 3. Мышечная структура симуляционной модели

Разработанную симуляционную модель можно представить в математической форме:

$$S_i = \begin{cases} S_{i-1} + \sum_{e=1}^{s_{qp}} \sum_{k=1}^{a_{qp}} \sum_{j=1}^{l_{qp}} f_1(m_{pe}^+; t_{se}^+) f_2(m_{pk}^+; t_{ak}^+) f_3(m_{pj}^+; t_{lj}^+), \\ S_i \leq g_z(t), m_{pe}^+ - 1, m_{pk}^+ - 1, m_{pj}^+ - 1, z \in N, z < h, h \in N, \\ S_{i-1} + \sum_{e=1}^{s_{qn}} \sum_{k=1}^{a_{qn}} \sum_{j=1}^{l_{qn}} f_1(m_{ne}^+; t_{se}^+) f_2(m_{nk}^+; t_{ak}^+) f_3(m_{nj}^+; t_{lj}^+), \\ S_i \leq g_z(t), m_{ne}^+ - 1, m_{nk}^+ - 1, m_{nj}^+ - 1, z \in N, z < h, h \in N, \end{cases} \quad (1)$$

где S_i — моделируемый сигнал, s_{qp} , a_{qp} , l_{qp} , s_{qn} , a_{qn} , l_{qn} — количество мышечных волокон определенной группы мышц, которые могут быть включены в работу модели, f_i , $i=1 \dots 6$ — функция включения

определенной группы мышц и генерации потенциала усилия, m_{pe}^+ , m_{pk}^+ , m_{pj}^+ , m_{ne}^+ , m_{nk}^+ , m_{nj}^+ — значения счетчика, отслеживающего утомление определенного мышечного волокна из определенной группы мышц, $t_{se}^+ \in [x_{se}; y_{se}]$, $t_{ak}^+ \in [x_{ak}; y_{ak}]$, $t_{lj}^+ \in [x_{lj}; y_{lj}]$ — случайное значение потенциала мышечного волокна из определенного диапазона, $t_{se}^- \in [x_{se}; y_{se}]$, $t_{ak}^- \in [x_{ak}; y_{ak}]$, $t_{lj}^- \in [x_{lj}; y_{lj}]$ — случайное «отрицательное» значение потенциала мышечного волокна из определенного диапазона, $g_z(t)$ — генерация уровня удержания определенной позиции на i -ой итерации, h — значения счетчика удержания позиции $g_z(t)$. Счет удержаний h жизненно необходим для адекватной работы модели, т. к. хаотический принцип организации функциональных систем не позволяет на длительном интервале времени Δt удерживать изолинию, т. е. уровень удержания позиции $g_z(t) \neq const$ на определенном Δt .

Включение мышечного волокна в работу осуществляется в том случае, если мышечные волокна не утомлены. Такой принцип работы мышечных волокон и групп мышц можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} f_1(m_{pe}^-, t_{se}^+) = f_1(m_{pe}^- * -1, t_{se}^+), P = 1 \\ f_2(m_{pk}^-, t_{ak}^+) = f_2(m_{pk}^- * -1, t_{ak}^+), P = 1 \\ f_3(m_{pj}^-, t_{lj}^+) = f_3(m_{pj}^- * -1, t_{lj}^+), P = 1 \\ f_4(m_{ne}^-, t_{se}^-) = f_4(m_{ne}^- * -1, t_{se}^-), P = 1 \\ f_5(m_{nk}^-, t_{ak}^-) = f_5(m_{nk}^- * -1, t_{ak}^-), P = 1 \\ f_6(m_{nj}^-, t_{lj}^-) = f_6(m_{nj}^- * -1, t_{lj}^-), P = 1 \end{cases}, \quad (2)$$

где P — функция вероятности включения $N = 0, 1$. Уровень удержания позиции $g_z(t)$ устанавливается по формуле:

$$g_z(t) = Q(t, c), \quad S < g_z(t), \quad z = 0, \quad h \in N, \quad z + 1, \quad z < h, \quad (3)$$

где $Q(t)$ — случайное значение из определенного диапазона. Функция $Q(t)$ производит генерацию нового уровня, если $z = h$, или когда наступает условие $g_z(t) < S_i$ при включенных в работу «отрицательных» мышцах, или $g_z(t) > S_i$ при работе «положительных» мышц.

Функция $Q(t)$ производит генерацию нового уровня, если $z = h$, или когда наступает условие $g_z(t) < S_i$ при включенных в работу «отрицательных» (Neg) мышцах, или $Q > S_i$ при работе «положительных» (Pos) мышц. В свою очередь диапазон генерации уровня удержания позиции варьируется на каждой итерации генерации $g_z(t)$. Смещение диапазона генерации уровня удержания записывается в следующей форме:

$$Q(c) = \begin{cases} A \in [-x + \Delta t; y + \Delta t], A(t) \geq \frac{g_{z-1}(t)}{2}, \Delta t = g_{z-1}(t), y < y_0 = const \\ A \in [-x - \Delta t; y - \Delta t], A(t) < \frac{g_{z-1}(t)}{2}, \Delta t = g_{z-1}(t), x > -x_0 = const \end{cases}, \quad (4)$$

где A — значение уровня удержания позиции, x , y — нижняя и верхняя границы генерации траектории, Δt — приращение к границам траектории.

Стоит отметить, что уравнения (3) и (4) способны описывать только произвольные движения человека, т. е. тремор. Для описания произвольных (теппинг) движений необходим другой механизм генерации уровня удержания позиции конечности в пространстве.

Визуализация результатов работы математической модели

Для визуализации данных, полученных на основе вычислительного эксперимента, представлен характерный пример, сопоставленный с данными, полученными на основе натурного эксперимента. На рис. 4, А временная развертка экспериментальной выборки, а на рис. 4, В — модельной выборки.

Из рис. 4, В видно, что модельная выборка имеет пилообразный вид и этим существенно отличается от выборки, полученной в ходе проведения натурного эксперимента (4, А). Такое существенное отличие связано с точностью проводимых экспериментов. Экспериментальная выборка получена на биоизмерительном комплексе (частотой квантования $\mu = 100$ Гц). Выборки, полученные в ходе проведения вычислительного эксперимента, получены на процессорном времени, что существенно превышает частоту дискретизации биоизмерительного комплекса, вследствие чего при построении АЧХ

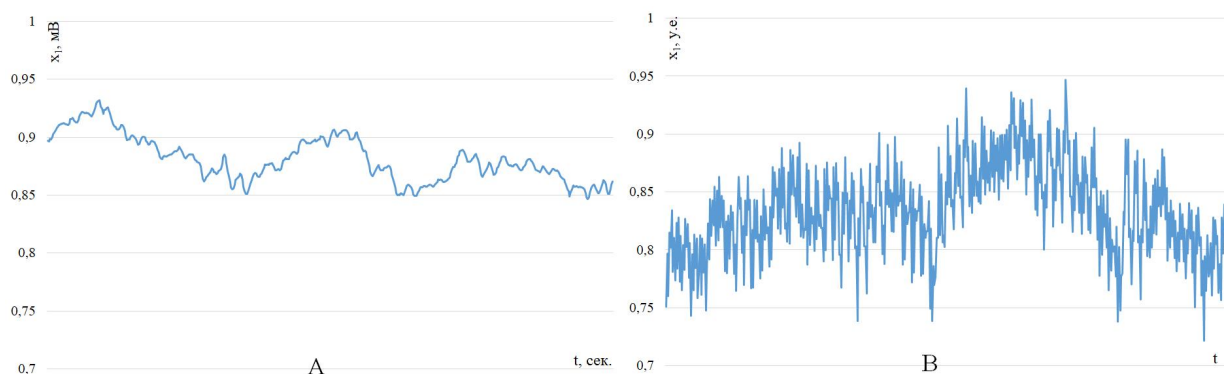


Рис. 4. Временная развертка: А — экспериментальной выборки; В — модельной выборки

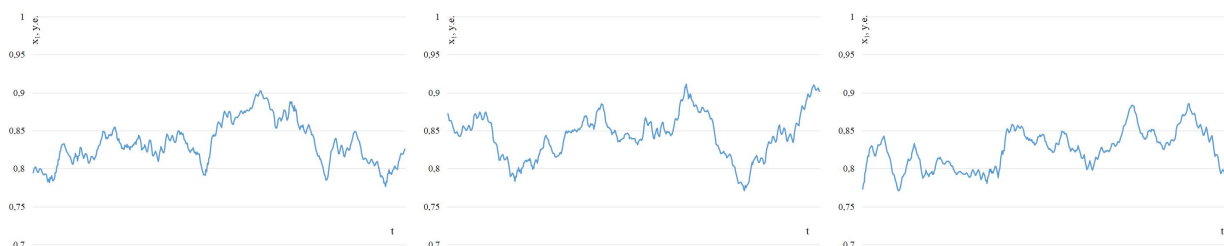


Рис. 5. Временные развертки сглаженных модельных выборок

видны всплески на частоте 50 Гц. Для устранения выбросов на АЧХ применялся простой фильтр высоких частот в виде скользящей средней. Результат применения фильтра представлен на серии выборок, полученных при проведении вычислительного эксперимента (рис. 5).

Сравнение экспериментальных и модельных данных методами математической статистики

Для проверки эффективности результатов вычислительных экспериментов строились матрицы парных сравнений (пары сравнения: экспериментальная выборка — экспериментальная выборка; модельная выборка — модельная выборка; экспериментальная выборка — модельная выборка). При построении подобных матриц для экспериментальных выборок установлена некоторая устойчивость числа пар совпадений (под словом «совпадения» понимается возможность отнесения сравниваемой пары к одной генеральной совокупности). Число совпадений для однородных треморограмм всегда в районе $k \approx 12\%$ (рис. 6, А) [6]. Для модельных выборок треморограмм установлено, что число таких совпадений находится на уровне $k \approx 12\%$ (рис. 6, В).

При сравнении экспериментальных и модельных выборок оказалось, что математическая статистика не может установить достоверные различия между сравниваемыми парами, т. к. число совпадений $k \approx 12\%$. Это демонстрирует высокую эффективность работы математической модели. Результат построения одной из многих таких матриц парных сравнений экспериментальных и модельных данных $k_{em} = 29$ (таблица 1).

Таким образом, продемонстрирована высокая эффективность разработанной математической модели. Представленная модель позволит осуществлять тестирование технически сложных устройств (например, носимых устройств против тремора), детально изучать патологические процессы и совершенствовать методы диагностирования этих процессов. С помощью данной модели открывается возможность разработки компенсационных механизмов для управления человеко-машинными системами.

Сравнительный анализ модельных и экспериментальных данных методами теории хаоса-самоорганизации

Определение понятия квазиаттрактора и способ расчета его параметров подробно представлены в журнале «Доклады Академии наук» [10]. С помощью расчетов параметров квазиаттракторов в рамках теории хаоса-самоорганизации можно проводить сравнительную оценку полученных выборок, а также осуществлять проверку полученных выборок на однородность [6]. Следует подчеркнуть, что выборки, полученные в рамках проведения натурных и вычислительных экспериментов, были однородны. На рис. 7, А представлен фазовый портрет для выборки, полученной в ходе натурального

Таблица 1

Матрица парных сравнений экспериментальных и модельных выборок треморограмм (число совпадений $k_{em} = 29$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.01	.00	.00	.00
2	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.34	.00	.00	.00
3	.00	.07	.00	.00	.00	.00	.91	.00	.00	.00	.00	.00	.94	.00	.00
4	.00	.00	.00	.00	.07	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.64	.00	.00	.00
5	.00	.99	.00	.00	.00	.00	.30	.00	.02	.00	.22	.00	.43	.00	.10
6	.00	.75	.00	.00	.00	.00	.23	.00	.07	.00	.50	.00	.27	.00	.01
7	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
8	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
9	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
10	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
11	.00	.00	.00	.00	.18	.00	.00	.01	.00	.00	.00	.60	.00	.00	.00
12	.00	.01	.00	.00	.00	.00	.69	.14	.28	.00	.00	.00	.51	.03	.14
13	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.09	.10	.63	.00	.00	.00	.10	.01	.65
14	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
15	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.23	.00	.00	.00

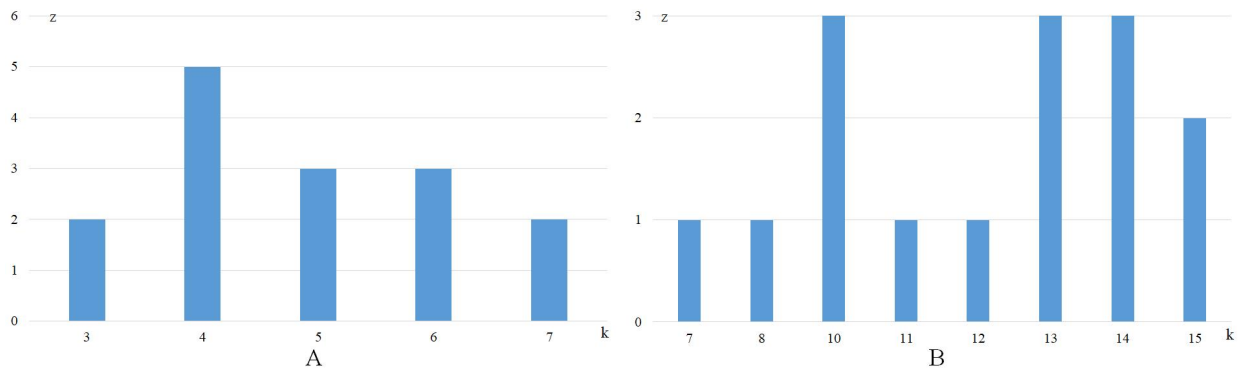


Рис. 6. Временные развертки сглаженных модельных выборок

эксперимента, здесь ось x_1 — значение треморограммы, а $x_2 = dx_1/dt$ — скорость изменения x_1 . На рис. 7, В представлен фазовый портрет для модельной выборки движения конечности.

С помощью рис. 7 можно сделать вывод, что траектории фазовых портретов имеют схожую динамику. Визуальное сравнение фазовых портретов (экспериментальная выборка (рис. 7, А) и модельная выборка (рис. 7, В)) позволяет сделать вывод, что разные выборки максимально приближены к динамике биомеханической системы организма человека. В таблице 2 приведены результаты расчетов площадей квазиаттракторов для двух серий экспериментов по 15 выборок — для экспериментальных выборок (S_1^1, S_2^1) и для модельных выборок (S_1^2, S_2^2). Математическая статистика не может установить значимые различия для выборок S квазиаттракторов.

Заключение

При проведении исследования были выявлены проблемы, с целью решения которых потребовалось разработать математическую модель на основе теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью для биомеханической системы человека. В результате установлено, что разработанная математическая модель может с высокой эффективностью воспроизводить динамику поведения биомеханической системы. При сравнительном анализе данных, полученных в ходе проведения вычислительных и натурных экспериментов, на основе математической статистики и методов теории хаоса-самоорганизации установлена высокая эффективность математической модели. Также следует подчеркнуть, что математическая модель способна воспроизводить хаотическую динамику движений в рамках

Таблица 2

Значение площадей квазиаттракторов для выборок треморограмм: экспериментальных (S^1) и модельных (S^2) данных

	S^1 , у.е.	S^2 , у.е.	S^1 , у.е.	S^2 , у.е.
1	9.82	11.76	18.78	10.97
2	18.77	13.82	8.37	14.29
3	8.37	8.70	10.09	10.03
4	7.32	12.29	7.41	11.04
5	5.45	10.60	8.38	13.77
6	18.29	14.99	6.45	13.07
7	8.38	12.00	11.64	12.84
8	9.38	8.98	13.78	10.15
9	4.99	13.48	10.88	13.98
10	11.64	9.89	10.33	15.10
11	6.11	12.67	17.20	9.86
12	20.70	12.92	8.90	12.48
13	17.20	12.27	5.84	12.18
14	10.88	10.00	8.06	15.54
15	10.33	13.93	12.96	13.01
< S >	11.18	11.89	10.60	12.47
	уровень значимости $p_1 = 0.49$		уровень значимости $p_2 = 0.19$	

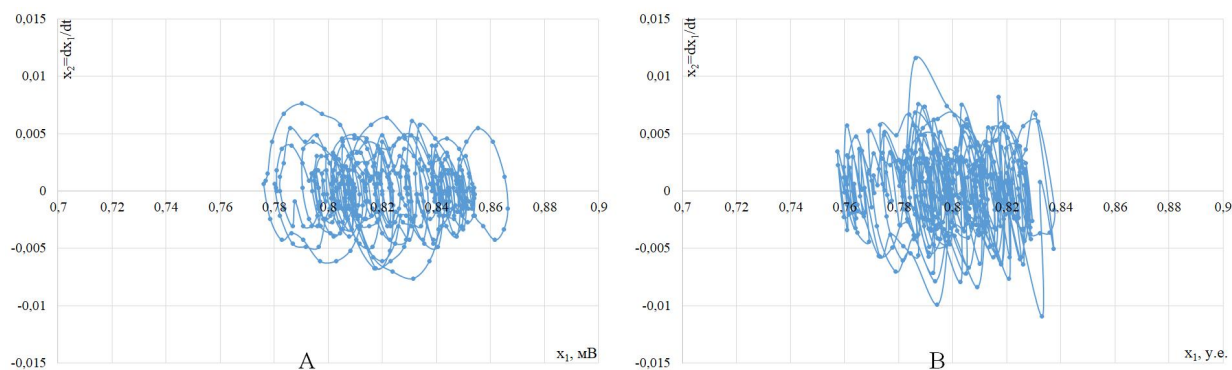


Рис. 7. Фазовые плоскости для треморограмм: А — реальная выборка; В — модельная выборка

гипотезы Н.А. Бернштейна «повторение без повторения». Для теоретической биофизики математическая модель может использоваться в целях раскрытия механизмов работы не только биомеханической системы, но и нервно-мышечной системы, а также, при усложнении модели, — и центральной нервной системы. С помощью предложенной модели открываются новые возможности тестирования различных технических систем (например, человеко-машинных систем, манипуляторов, носимых устройств против тремора и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн Н. А. *О построении движений*. М. : Медгиз; 1947.
2. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. *Матем. сб.* 1960;51(1):99–128.
3. Еськов В. В., Гавриленко Т. В., Еськов В. М. и др. Феномен статистической неустойчивости систем третьего типа — complexity. *Журнал технической физики*. 2017;87(11):1609–1614. DOI: 10.21883/JTF.2017.11.45117.2158.
4. Еськов В. М., Еськов В. В., Гавриленко Т. В. и др. Формализация эффекта «повторение без повторения» Н.А. Бернштейна. *Биофизика*. 2017;62(1):168–176.
5. Еськов В. В., Еськов В. М., Вохмина Ю. В. Гипотеза Н. А. Бернштейна и статистическая неустойчивость выборок параметров треморограмм. *Вестник кибернетики*. 2018;29(1):33–38.

6. Горбунов Д. В. Однородность и неоднородность параметров движений человека. *Сложность. Разум. Постнеклассика*. 2018;4:68–75. DOI: 10.12737/article_5c2201c82feb71.88457170.
7. Иляшенко Л. К., Баженова А. Е., Берестин Д. К. и др. Хаотическая динамика параметров треморограмм в условиях стресс-воздействий. *Российский журнал биомеханики*. 2018;22(1):74–84. DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2018.1.06.
8. Nishimura T. Tables of 64-bit Mersenne twisters. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*. 2000;10(4):234–357.
9. Капилевич Л. В. *Физиологические методы контроля в спорте*. Томск : Изд-во Томского политехнического университета; 2009.
10. Бетелин В. Б., Еськов В. М., Галкин В. А. и др. Стохастическая неустойчивость в динамике поведения сложных гомеостатических систем. *Доклады Академии наук*. 2017;472(6):642–644. DOI: 10.7868/S0869565217060044.
11. Горбунов Д. В. Симуляционное моделирование движения конечности человека. *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2020;23(1):32–43.