

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-4-02

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОИСТОГО ТЕЧЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ЦИЛИНДРЕ С РАДИУСОМ, ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ВО ВРЕМЕНИ****В. А. Галкин<sup>а</sup>, А. О. Дубовик<sup>б</sup>**

*Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Сургут, Российская Федерация*

*Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация*

<sup>а</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9721-4026>, [val-gal@yandex.ru](mailto:val-gal@yandex.ru)

<sup>б</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4158-9646>, [alldubovik@gmail.com](mailto:alldubovik@gmail.com)

*Аннотация:* рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики, описывающая течение вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени. На границе области течения выполняется условие прилипания. Исследование данного класса задач связано с задачами управления параметрами несжимаемой жидкости за счет воздействий различных типов, например, с помощью объемного воздействия магнитным полем и движения границы области течения. В рамках модели слоистого течения жидкости получен класс точных решений уравнений магнитной гидродинамики в бесконечном цилиндре с радиусом, изменяющимся во времени. Результаты расчетов получены на основе метода контрольных объемов с полностью неявной схемой по времени. Разностный аналог дифференциальных уравнений имеет второй порядок точности по пространственной переменной и первый порядок точности по времени. Найденные точные решения использованы для верификации результатов расчетов численного моделирования и показали их совпадение в пределах точности используемых разностных аппроксимаций. Результаты расчетов показали устойчивость на серии проведенных испытаний с уменьшающимся шагом сетки.

*Ключевые слова:* магнитная гидродинамика, точные решения, переменная область течения.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме № FNEF-2022-0007 «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления», рег. № 1021060909180-7-1.2.1.

*Для цитирования:* Галкин В. А., Дубовик А. О. Моделирование слоистого течения в неограниченном цилиндре с радиусом, изменяющимся во времени. *Успехи кибернетики*. 2022;3(4):14–23. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-4-02.

**SIMULATION OF LAYERED FLOW IN AN INFINITE CYLINDER WITH A TIME-VARYING RADIUS****V. A. Galkin<sup>а</sup>, A. O. Dubovik<sup>б</sup>**

*Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation*

*Surgut State University, Surgut, Russian Federation*

<sup>а</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9721-4026>, [val-gal@yandex.ru](mailto:val-gal@yandex.ru)

<sup>б</sup> ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4158-9646>, [alldubovik@gmail.com](mailto:alldubovik@gmail.com)

*Abstract:* we considered a system of magnetohydrodynamic equations which describes a viscous conducting fluid flow in a time-varying domain. The no-slip condition is satisfied at the boundary of the flow domain. The study of such problems is relevant to controlling the incompressible fluid properties by various means such as a volumetric application of a magnetic field, or the flow domain boundary shift. Within the layered fluid flow model, we obtained a class of exact solutions of the magnetohydrodynamic equations for an infinite cylinder with a time-varying radius. The calculation used the control volume approach with a completely implicit time-dependent scheme. The difference analog of differential equations has the second order of accuracy for its spatial variable and the first order of accuracy for time. The exact solutions we found were used to verify the results of the numerical simulation. They match the accuracy of

the difference approximations. The calculation results are stable in a series of tests with a decreasing grid spacing.

*Keywords:* magnetohydrodynamics, exact solutions, variable flow domain.

*Acknowledgements:* this study is a part of the government contract 47 GP with the Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences, project No. FNEF-2022-0007 Advancing Distribution System Simulation and Computation Methods, reg. No. 1021060909180-7-1.2.1.

*Cite this article:* Galkin V. A., Dubovik A. O. Simulation of Layered Flow in an Infinite Cylinder with a Time-Varying Radius. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(4):14–23. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-4-02.

### Введение

В рамках модели магнитной гидродинамики (МГД) рассматривается течение вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени. Исследование данного класса задач связано с задачами управления параметрами несжимаемой жидкости. Например, в качестве управляющих воздействий могут рассматриваться изменение границы области течения или объемное воздействие магнитным полем. Постановка такой задачи представлена в [1].

Данная статья является продолжением серии публикаций авторов, посвященных исследованию точных решений уравнений гидродинамики, магнитной гидродинамики в переменных во времени областях [1–3]. В данной работе в рамках модели МГД получен класс точных решений, описывающий слоистое течение жидкости в бесконечном цилиндре с радиусом, изменяющимся во времени. Задача о слоистом течении вязкой проводящей жидкости в бесконечном цилиндре фиксированного радиуса исследовалась авторами в [4].

Большинство современных исследований течений жидкости в областях, изменяющихся во времени, касается исключительно вопросов численного моделирования [5–9], в то время как теоретическим исследованиям уделяется крайне мало внимания. Исследование точных решений задач гидродинамики или магнитной гидродинамики важно не только для разработки серий тестовых задач для верификации результатов вычислительных экспериментов, но и для качественного анализа рассматриваемых в этих задачах процессов и явлений. Среди теоретических результатов в этой области отметим работу [10]. В ней рассматривается течение вязкой жидкости в цилиндрической области с меняющимся радиусом и представлен осесимметричный класс точных решений уравнений гидродинамики в трубе с линейной зависимостью части компонент скорости от одной пространственной переменной, полученный методом функции тока.

### Математическая модель

Система уравнений МГД [11–13], описывающая течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости в цилиндрической системе координат в открытой пространственной области  $\{\rho, \varphi, z\} \in D(t)$ ,  $t > 0$ , имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) H_\rho = (\mathbf{H} \cdot \nabla) v_\rho + \mu_m \left( \Delta H_\rho - \frac{H_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) H_\varphi + \frac{v_\varphi H_\rho}{\rho} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) v_\varphi + \frac{v_\rho H_\varphi}{\rho} + \mu_m \left( \Delta H_\varphi - \frac{H_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) H_z = (\mathbf{H} \cdot \nabla) v_z + \mu_m \Delta H_z, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\rho - \frac{v_\varphi^2}{\rho} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( P + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \cdot \nabla) H_\rho - \frac{H_\varphi^2}{4\pi\rho_0\rho} + \mu \left( \Delta v_\rho - \frac{v_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\varphi + \frac{v_\varphi v_\rho}{\rho} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( P + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \cdot \nabla) H_\varphi + \frac{H_\varphi H_\rho}{4\pi\rho_0\rho} + \mu \left( \Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( P + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \cdot \nabla) H_z + \mu \Delta v_z, \quad (7)$$

$$\rho_0 c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right) = \varepsilon \Delta T + \varsigma \left\{ 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\rho}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\rho}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{\rho} \right)^2 \right\} + \frac{\mu_m}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{H})^2, \quad (8)$$

где  $\mathbf{H} \equiv \{H_\rho, H_\varphi, H_z\}$  — вектор напряженности магнитного поля,  $\mathbf{v} \equiv \{v_\rho, v_\varphi, v_z\}$  — вектор скорости жидкости,  $t$  — время,  $\mu_m$  — магнитная вязкость жидкости,  $\rho_0$  — плотность жидкости,  $P$  — давление,  $\mu$  — кинематическая вязкость жидкости,  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении,  $\varepsilon$  — теплопроводность,  $\varsigma$  — динамическая вязкость,  $T$  — температура жидкости,  $\chi = \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_p}$  — коэффициент температуропроводности, используемый далее. Операторы  $\text{div } \mathbf{F}$ ,  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) f$ ,  $\Delta f$ ,  $(\text{rot } \mathbf{H})^2$  определяются следующими выражениями:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) f = v_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{v_\varphi}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \\ (\text{rot } \mathbf{H})^2 = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Отметим, что в рамках данной модели решение уравнения энергии (8) не составляет труда при известных полях скорости и напряженности магнитного поля и рассматривается отдельно после их нахождения. Область течения  $D(t)$  предполагается изменяющейся во времени. В качестве граничных условий для вектора скорости рассматривается условие прилипания, для вектора напряженности магнитного поля — условие Дирихле, для поля температуры — условие теплонепроницаемости стенок.

Пусть область  $\bar{D}(t)$  — бесконечный цилиндр  $\rho \in [0; R(t)]$ ,  $R(t) > 0$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ ,  $z \in (-\infty; +\infty)$  с осью, параллельной  $Oz$ ,  $R(t)$  — радиус цилиндра. Рассмотрим слоистое течение жидкости, при котором вектор скорости жидкости имеет вид  $\mathbf{v} \equiv \{0, v_\varphi(\rho, t), v_z(\rho, t)\}$ . Предположим, что магнитное поле параллельно оси цилиндра, т. е.  $\mathbf{H} \equiv \{0, 0, H_z(\rho, t)\}$  и, кроме того,  $P \equiv p(\rho, t)$ ,  $T \equiv T(\rho, t)$ .

В рамках модели слоистого течения жидкости предполагается, что  $v_\rho \equiv 0$  в  $D(t)$ , но в таком случае для удовлетворения граничного условия прилипания на границе цилиндра необходимо потребовать выполнения

$$v_\rho|_{\rho=R(t)} = R'(t),$$

т. е. радиальная компонента скорости течения на границе области терпит разрыв. Далее будет показано, что  $R(t) \sim \sqrt{t}$ . Тогда  $v_\rho(\rho, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. асимптотически функция  $v_\rho$  непрерывно равна нулю в области течения. Рассматриваемый здесь случай известен как отрывное течение, при котором происходит как бы «отрыв» течения в пограничном слое и линии тока перемещаются в глубь области течения [14, 15]. В рамках рассматриваемой модели слоистого течения жидкости это перемещение происходит за счет увеличения радиуса цилиндра  $D(t)$ , при этом линии тока сохраняют слоистую структуру течения.

### Результаты теоретического исследования

В [4] показано, что в рамках модели слоистого течения жидкости, с учетом сделанных предположений, решение системы уравнений (1) – (8) равносильно решению более простой системы уравнений:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \mu_m \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \right), \quad (9)$$

$$\frac{v_\varphi^2}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{1}{4\pi\rho_0} H_z \frac{\partial H_z}{\partial \rho}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \mu \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} \right) \right) - \mu \frac{v_\varphi}{\rho^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \mu \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{\mu_m}{4\pi\rho_0 c_p} \left( \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\mu}{c_p} \left\{ \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{v_\varphi}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right)^2 \right\}. \quad (13)$$

Каждое из уравнений (9)–(13) может быть решено отдельно, при этом поле давления из уравнения (10) и поле температуры из уравнения (13) находятся после определения всех компонент вектора скорости и напряженности магнитного поля из уравнений (9), (11), (12). Граничные и начальные условия системы (9) – (13) имеют вид:

$$v_z|_{\rho=R(t)} = 0, \quad v_z|_{t=0} = v_{z,0}(\rho), \quad (14)$$

$$v_\varphi|_{\rho=R(t)} = 0, \quad v_\varphi|_{t=0} = v_{\varphi,0}(\rho), \quad (15)$$

$$H_z|_{\rho=R(t)} = h_z(t), \quad H_z|_{t=0} = H_{z,0}(\rho), \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\rho=R(t)} = 0, \quad T|_{t=0} = 0. \quad (17)$$

Рассмотрим подробно решение уравнения (12) с граничным и начальным условием (14). Преобразуем выражение (12), положив  $\rho/\sqrt{\mu}$  за новую переменную, обозначив ее также  $\rho$ . Получим

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \right). \quad (18)$$

Сделаем замену переменных в уравнении (18)  $\{\rho, t\} \rightarrow \{y, t\}$ ,  $y = g(\rho, t)$ . Функцию  $g$  выберем таким образом, чтобы 1) переменные в уравнении (12) разделялись и 2) граничное условие в (14), рассматриваемое при  $\rho = R(t)$ , переходило в граничное условие, рассматриваемое при  $y = const$ . Для выполнения этих условий достаточно положить  $y = \rho/R(t)$ ,  $R(t) = \sqrt{At + B}$ ,  $A, B$  – некоторые константы. В новых переменных задача (18), (14) имеет вид:

$$R^2(t) \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right), \quad u|_{y=1} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(y), \quad (19)$$

где  $y \in [0; 1]$ ,  $u(y, t) \stackrel{def}{=} v_z(\rho, t)$ ,  $\gamma = R'(t)/R(t)$ ,  $u_0(y) = v_{z,0}(yR(0))$ . Задача (19) является представлением задачи (12), (14) в лагранжевой системе координат.

Положим  $u(t, y) = T(t)\theta(y)$ ,  $R^2(t)T'/T = \lambda$ , где собственные значения  $\lambda$  находятся из решения следующей задачи:

$$\lambda\theta - \left( \gamma y + \frac{1}{y} \right) \theta' = \theta'', \quad \theta(1) = 0, \quad \theta(0) < \infty. \quad (20)$$

Представим задачу (20) в эквивалентном виде, положив

$$\eta(y) = \sqrt{y} e^{\frac{\gamma y^2}{4}} \theta(y). \quad (21)$$

Получим следующую задачу:

$$-\lambda\eta = L\eta \equiv -\eta'' + \left( \frac{\gamma^2}{4} y^2 + \gamma - \frac{1}{4y^2} \right) \eta, \quad \eta(1) = 0, \quad \eta(0) = O(\sqrt{y})|_{y \rightarrow 0}. \quad (22)$$

Рассмотрим дифференциальный оператор  $L$  задачи (22). Областью определения этого оператора является подмножество гильбертова пространства  $H$ , состоящее из функций, дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[0; 1]$  и удовлетворяющих граничным условиям из (22). Непосредственно из (22) с учетом граничных условий видно, что оператор  $L$  симметричен, кроме того, оператор  $L$  положительный. Чтобы показать отрицательность собственных значений  $\lambda$  (т. е.  $-\lambda$  положительны), достаточно преобразовать задачу (20) к эквивалентному виду, положив

$$\omega(y) = e^{\frac{\gamma y^2}{2}} \theta(y).$$

Задача (20) примет вид:

$$-\varepsilon \omega y e^{-\gamma \frac{y^2}{2}} = - \left( y e^{-\gamma \frac{y^2}{2}} \omega' \right)', \quad \omega(1) = 0, \quad \omega(0) < \infty,$$

где  $\varepsilon = \lambda + 2\gamma$ . Из последнего представления непосредственно следует отрицательность собственных значений  $\varepsilon$ , а, следовательно, и  $\lambda$  при  $\gamma > 0$ .

Задача (22) является задачей Штурма–Лиувилля [16, 17]. От рассмотренной в [17] задачи Штурма–Лиувилля задача (22) отличается граничным условием в точке  $y = 0$  и отсутствием свойства положительности  $u$  функции:

$$q(y) \equiv \frac{\gamma^2}{4} y^2 + \gamma - \frac{1}{4y^2}.$$

Однако, как показано ранее, условие  $q(y) \geq 0$  не является необходимым для положительности оператора  $L$ . Таким образом, все свойства задачи Штурма–Лиувилля, рассмотренные в [17], [18], присущи и задаче (22), т. е. система собственных функций  $\{\eta_n\}$  и собственных значений  $\{\lambda_n\}$  обладает следующими свойствами:

1. Множество собственных значений не пусто и не имеет конечных предельных точек.
2. Собственные значения вещественные и конечной кратности, спектр задачи простой.
3. Собственные функции можно выбрать вещественными и ортонормальными так, что  $\eta_n \in C^2([0; 1])$ .
4. Собственные значения отрицательны.
5. Множество собственных значений счетно.
6. Справедлива теорема В. А. Стеклова, согласно которой всякая функция из области определения оператора  $L$  разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.

7. Система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля полна в  $H([0; 1])$ .

Учитывая (21), решение задачи (22) можно выразить через решение задачи (20), которое будем искать в виде степенного ряда

$$\theta(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k.$$

Задача (20) имеет следующее решение:

$$\theta_n(y) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j y^{2j}, \quad a_0 \in R, \quad a_1 = a_0 \frac{\lambda_n}{4}, \quad a_j = a_{j-1} \frac{\lambda_n - 2\gamma(j-1)}{4j^2} \quad \text{при } j \geq 2. \quad (23)$$

Собственные функции известны с точностью до произвольного множителя  $a_0$ . Собственные значения определяются из решения задачи  $\theta_n(1) = 0$ . Ряд (23) сходится равномерно по переменной  $y \in [0; 1]$  и по  $\lambda \in (-\infty; +\infty)$ , что можно показать, воспользовавшись признаком Даламбера. Из вида собственных функций (23) следует, что уравнение (20) также удовлетворяется в точке  $y=0$ .

Решение задачи (19) имеет вид:

$$u(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (At + B)^{\lambda_n/A} \theta_n(y), \quad c_n = \frac{B^{-\lambda_n/A}}{\|\eta_n\|^2} \int_0^1 u_0(y) y \exp\left\{\gamma y^2/2\right\} \theta_n(y) dy, \quad (24)$$

$$\|\eta_n\| = \left( \int_0^1 y \exp\left\{\gamma y^2/2\right\} \theta_n^2(y) dy \right).$$

Выполняя обратную замену, получаем решение задачи (12), (14):

$$v_z(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (At + B)^{\lambda_n/A} \theta_n(\rho / (\sqrt{\mu} R(t))). \quad (25)$$

Задача (9), (16) отличается от ранее рассмотренной задачи (12), (14) лишь неоднородным граничным условием на правом конце и присутствием магнитной вязкости вместо кинематической. Решение задачи (9), (16) можно получить, используя редукцию и соотношения (25). Ее решение имеет вид:

$$H_z(\rho, t) = \frac{\rho}{R(t)} h_z(t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (At + B)^{\lambda_n/A} \theta_n(\rho / (\sqrt{\mu_m} R(t))) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t) (At + B)^{\lambda_n/A} \theta_n(\rho / (\sqrt{\mu_m} R(t))),$$

$$d_n(t) = \frac{1}{\|\eta_n\|^2} \int_0^t \int_0^1 y \exp(\gamma y^2 / 2) \theta_n(y) g(y, t) dy (At + B)^{-1-\lambda_n/A} d\tau,$$

$$g(y, t) = \sqrt{\mu_m} \left( \frac{h_z(t)}{y} - yR^2(t) h'_z(t) + \gamma y h_z(t) \right),$$

где  $c_n$ , так же как и в (24), – коэффициенты Фурье разложения начального условия, получаемого после замены переменных в (16), по системе собственных функций задачи (20),  $\|\eta_n\|$  те же, что и в (24), а  $n \in N$ .

С задачей (11), (15) можно провести аналогичные преобразования, что и при решении задачи (9), (16):

$$R^2(t) \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \frac{u}{y^2}, \quad u|_{y=1} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(y).$$

Здесь  $u(y, t) \stackrel{def}{=} v_\varphi(\rho, t)$ ,  $u_0(y) = v_{\varphi,0}(yR(0))$ . Далее получаем так же задачу Штурма–Лиувилля, обладающую уже другими собственными значениями и собственными функциями, но для которой справедливы свойства 1–7. Задача Штурма–Лиувилля в случае (11), (15), сохраняя прежние обозначения, имеет вид:

$$-\lambda \eta = -\eta'' + \left( \frac{\gamma^2}{4} y^2 + \gamma - \frac{3}{4y^2} \right) \eta, \quad \eta(1) = 0, \quad \eta(0) = O(\sqrt{y})|_{y \rightarrow 0}.$$

Решение этой задачи, учитывая (21), найдем среди решений следующей задачи:

$$\lambda \theta - \left( \gamma y + \frac{1}{y} \right) \theta' + \frac{\theta}{y^2} = \theta'', \quad \theta(1) = 0, \quad \theta(0) < \infty. \tag{26}$$

Для задачи (26) имеем:

$$\theta_n(y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j y^{2j-1}, \quad a_1 \in R, \quad a_j = a_{j-1} \frac{\lambda_n - \gamma(2j-1)}{4j(j-1)} \quad \text{при } j \geq 2. \tag{27}$$

Собственные значения определяются так же из решения задачи  $\theta_n(1) = 0$ . Решение задачи (11), (15) имеет такой же вид, как и (25), с той лишь разницей, что коэффициенты  $c_n$  и  $\|\eta_n\|$ ,  $n \in N$  в (25) определяются с учетом (27), а начальное условие следует брать из (15). Из (27) следует, что уравнение (26) удовлетворяется также в точке  $y=0$ .

Преобразуем уравнение энергии (13). Введем новые переменные, сохранив старые обозначения  $\rho, H_z, v_z, v_\varphi$ :

$$\frac{\rho}{\sqrt{\chi}}, \quad \sqrt{\frac{\mu_m}{\rho_0 c_p \chi}} H_z, \quad \sqrt{\frac{\mu}{c_p \chi}} v_z, \quad \sqrt{\frac{\mu}{c_p \chi}} v_\varphi.$$

Задача (13), (17) имеет тот же вид, что и задача (9), (16), изменяется лишь тип граничного условия на правом конце, и решается аналогично:

$$R^2(t) \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(y).$$

Для нее так же рассматриваются аналоги выражений (20)–(22):

$$\lambda\theta - \left(\gamma y + \frac{1}{y}\right)\theta' = \theta'', \quad \theta'(1) = 0, \quad \theta(0) < \infty. \quad (28)$$

Используя (21), задачу (28) можно представить в эквивалентном виде:

$$-\lambda\eta = -\eta'' + \left(\frac{\gamma^2}{4}y^2 + \gamma - \frac{1}{4y^2}\right)\eta, \quad 2\eta'(1) - (1 + \gamma)\eta(1) = 0, \quad \eta(0) = O(\sqrt{y})|_{y \rightarrow 0}.$$

Справедливы свойства 1–7 задачи Штурма–Лиувилля, а ее решение имеет вид (23), где, однако, собственные значения определяются не из условия  $\theta_n(1) = 0$ , а из условия  $\theta'_n(1) = 0$ . Ряд для  $\theta'_n(1)$ , получаемый из (23) почленным дифференцированием, так же сходится равномерно по  $\lambda \in (-\infty; +\infty)$ , что можно показать, используя признак Даламбера. С учетом последнего, решение (13), (17) имеет вид:

$$T(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t) (At + B)^{\lambda_n/A} \theta_n(\rho / (\sqrt{\chi}R(t))),$$

$$d_n(t) = \frac{1}{\|\eta_n\|^2} \int_0^t \int_0^1 y \exp(\gamma y^2/2) \theta_n(y) g(y, t) dy (A\tau + B)^{-1-\lambda_n/A} d\tau, \quad (29)$$

$$g(y, t) = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial y} - \frac{v_\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2.$$

Использовать аналитические выражения в виде рядов для  $v_z(\rho, t)$ ,  $H_z(\rho, t)$ ,  $v_\varphi(\rho, t)$  для представления (29) нельзя, поскольку для них сумма производных членов ряда не сходится к производной сумме. Например, функция  $u(y, 0) = \sin y$  может быть разложена в ряд (24) при  $t = 0$ , который, как показано ранее, сходится равномерно. Но в таком случае из (23) следует, что для всех собственных функций  $\theta'_n(0) = 0$  и, следовательно, сумма производных членов ряда равна нулю при  $y = 0$ , в то время как  $u'(y, 0)|_{y=0} = 1$ .

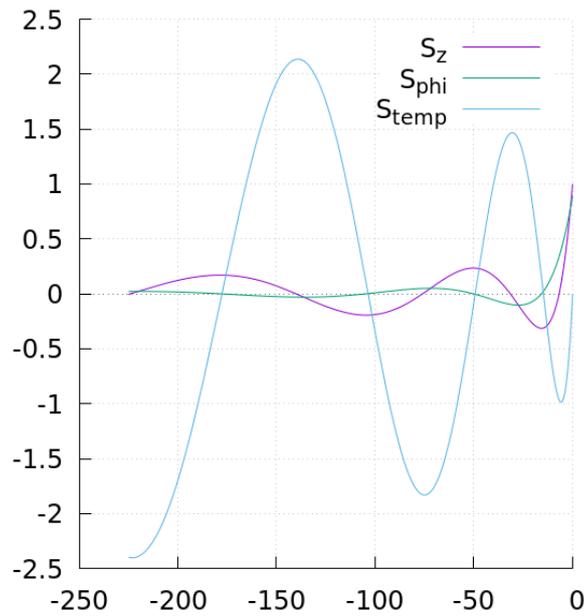
### Результаты расчетов

Для вычисления собственных значений и собственных функций задачи использовалась библиотека «длинной арифметики» GMP [19]. На рис. 1. представлены графики функций  $S(\lambda)$  (в случае задачи (20)  $S(\lambda) \equiv \theta(1)$ ), нули которых являются собственными значениями для задач (20), (26), (28) для компонент  $v_z$  и  $H_z$ ,  $v_\varphi$ ,  $T$  соответственно.

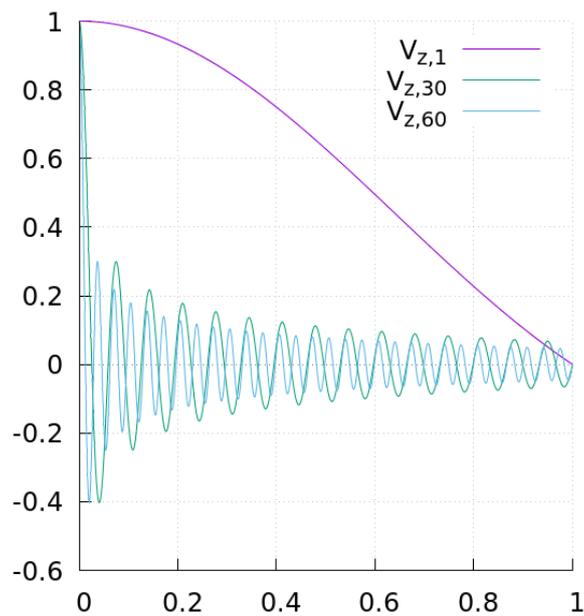
Собственные значения быстро возрастают по модулю, и находить нули  $S(\lambda)$ , используя стандартные типы данных, имеющие двойную точность, не представляется возможным. Для нахождения собственных значений ряд  $S(\lambda)$  ограничивался 300 членами, если взять еще 50 членов, то корни ряда  $S(\lambda)$  не изменятся в пределах первых значащих 16 чисел после запятой. Всего было вычислено по 60 собственных значений и собственных функций в каждой из задач. Этого количества оказалось достаточным для получения разложения в ряд Фурье, например для задачи (20), с точностью порядка  $10^{-4}$ . Для представления чисел с плавающей запятой использовалось 32 байта. Графики собственных функций для задачи (20) представлены на рис. 2.

Решение задачи (18) для нахождения  $v_z$ , как и аналогичных задач для нахождения  $H_z$ ,  $v_\varphi$ ,  $T$ , выполнено методом контрольных объемов [20] с полностью неявной схемой по времени и центрально-разностной аппроксимацией по пространственной переменной. После приведения подобных слагаемых в дискретном аналоге полученная система линейных алгебраических уравнений на каждом шаге по времени решалась методом Гаусса–Зейделя.

Численные результаты, представленные ниже, получены при условии, что шаг по пространственной переменной  $y$  составляет  $h=0.01$ , по времени  $t - \Delta t=0.0001$ . Вычислительная устойчивость алгоритма контролировалась проведением расчетов на сетках с последовательным уменьшением шагов. Вычисления показывают, что результаты расчетов соответствуют второму порядку аппроксимации относительно шага сетки по пространственной переменной.



**Рис. 1.** Графики функций, нули которых являются собственными значениями для задач (20), (26), (28)



**Рис. 2.** Графики собственных функций, соответствующие различным собственным значениям задачи (20)

Тестовые расчеты проведены в случае, когда все параметры жидкости полагались равными единице,  $l(t) = \sqrt{2t + 1}$ . Функции в (14)–(17), определяющие начальные и граничные условия, имеют вид:

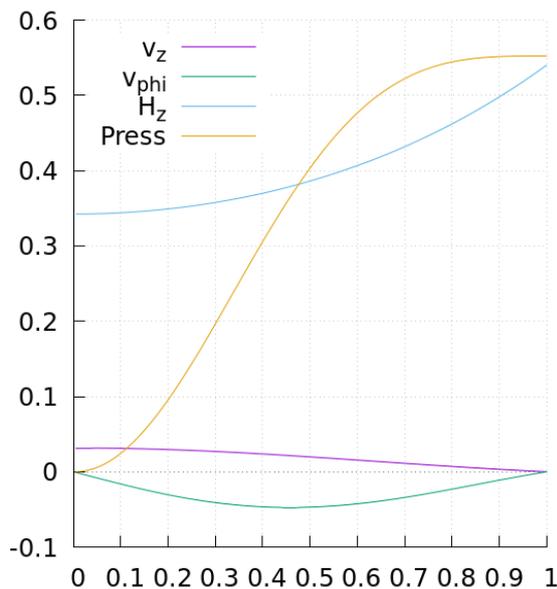
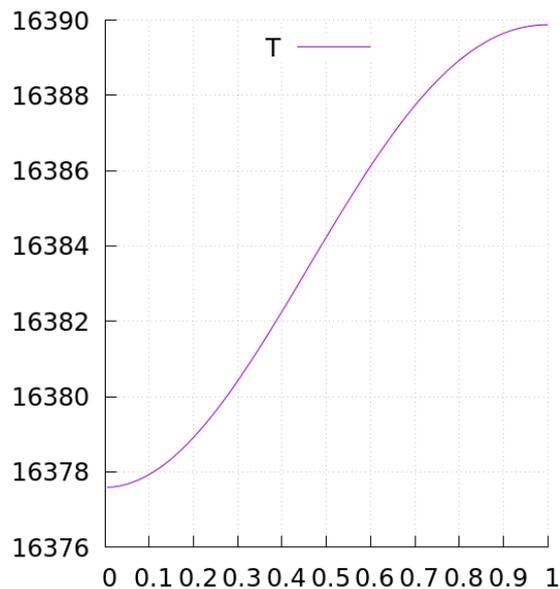
$$v_{z,0} = \sin \pi \rho, \quad v_{\varphi,0} = \rho(\rho - 1) \cdot 10^4,$$

$$H_z(t) = e^{t-1} \cos 1, \quad H_{z,0} = e^{-1} \cos \rho.$$

Результаты оценки погрешности численного решения задачи в сравнении с их аналитическим решением в условный момент времени  $t=1$  представлены в табл. Графики компонент вектора скорости, вектора напряженности магнитного поля, поля давления и поля температуры при  $t=1$  представлены на рис. 3–4.

## Оценка погрешности расчетов в сравнении с аналитическим решением

Величина	$\max_{x_2}  f_{num} - f_{an} $	$\max_{x_2}  f_{num} - f_{an}  / f_{an} \cdot 100\%$
$v_z$	$4 \cdot 10^{-5}$	0.12
$v_\varphi$	$3 \cdot 10^{-4}$	0.5
$H_z$	$7 \cdot 10^{-4}$	0.2

Рис. 3. Графики  $v_z$ ,  $v_\varphi$ ,  $H_z$ ,  $P$  при  $t = 1$ Рис. 4. График  $T$  при  $t = 1$ 

Рисунки 3, 4 иллюстрируют тепловыделение в течении вязкой проводящей жидкости в результате объемного воздействия магнитным полем и движения границы области течения.

**Заключение**

Таким образом, для рассмотренного класса задач построен единообразный вычислительный алгоритм, позволяющий для слоистого течения жидкости рассчитать как поле скоростей течения, вектор напряженности магнитного поля, поле давления, так и поле температуры. Проведенные расчеты позволяют утверждать, что метод контрольных объемов верифицирован на основе сравнения найденного точного решения с численным.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Бетелин В. Б., Галкин В. А. Задачи управления параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения. *ДАН*. 2015;463(2):149–151. DOI: 10.7868/S0869565215200037.
2. Галкин В. А., Дубовик А. О. О моделировании слоистого течения вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени. *Матем. моделирование*. 2020;32(4):31–42. DOI: 10.20948/mm-2020-04-03.
3. Галкин В. А., Дубовик А. О. Моделирование трехмерного потенциального течения жидкости в области, изменяющейся во времени. *ЖВМ и МФ*. 2022;62(7):1180–1186. DOI: 10.31857/S0044466922050052.
4. Галкин В. А., Дубовик А. О. О моделировании слоистого течения вязкой несжимаемой жидкости во вращающейся трубе. *Вестник кибернетики*. 2017;2(26):58–65.
5. Antuono M., Sun P. N., Marrone S., Colagrossi A. The  $\delta$ -ALE-SPH Model: an Arbitrary Lagrangian-Eulerian Framework for the  $\delta$ -SPH Model with Particle Shifting Technique. *Computer & Fluids*. 2020;104806. DOI: 10.1016/j.compfluid.2020.104806.

6. Mohammed A. and others. CFD and Statistical Approach to Optimize the Average Air Velocity and Air Volume Fraction in an Inert-Particles Spouted-Bed Reactor (IPSBR) System. *Heliyon*. 2021;7(3):E06369. DOI: 10.1016/j.heliyon.2021.e06369.
7. Ren X., Xu K., Shyy W. A Multi-Dimensional High-Order DG-ALE Method Based on Gas-Kinetic Theory with Application to Oscillating Bodies. *Journal of Computational Physics*. 2016;316:700–720. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.04.028.
8. Elgeti S., Sauerland H. Deforming Fluid Domains within the Finite Element Method: Five Mesh Based Tracking Methods in Comparison. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2016;23:323–361. DOI: 10.1007/s11831-015-9143-2.
9. Бурого Н. Г., Никитин И. С., Якушев В. Л. Применение наложенных сеток к расчету течений в областях переменной геометрии. *Сб. трудов XX юбилейной междунар. конф. по выч. механике и совр. прикладным системам*. 2017:395–397. DOI:10.13140/RG.2.2.27386.39369.
10. Князев Д. В., Колпаков И. Ю. Точные решения задачи о течении вязкой жидкости в цилиндрической области с меняющимся радиусом. *Нелинейная динамика*. 2015;11(1):89–97.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука; 1982. 620 с.
12. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. *Магнитная гидродинамика*. М.: Логос; 2005. 328 с.
13. Черняк В. Г., Суетин П. Е. *Механика сплошных сред: учебн. пособ. для вузов*. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2006. 352 с.
14. Ландау Л. Л., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика*. М.: Наука; 1986. 736 с.
15. Седов Л. И. *Механика сплошных сред. Т. 2*. М.: Наука; 1970. 568 с.
16. Левитан Б. М., Саргсян И. С. *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*. М.: Наука; 1988. 432 с.
17. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики*. М.: Наука; 1981. 512 с.
18. Бардзокас Д. И., Фильштинский Л. А., Фильштинский М. Л. *Актуальные проблемы физических полей в деформируемых средах: В 5 т. Т. 1. Математический аппарат физических и инженерных наук*. М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; 2010. 864 с.
19. *The GNU Multiple Precision Arithmetic Library*. Режим доступа: <http://gmplib.org>.
20. Патанкар С. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости*. М.: Энергоатомиздат; 1984. 152 с.