DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-8

СХЕМА ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ ИНДУКЦИИ НА СМЕЩЕННЫХ СЕТКАХ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

И. В. Бычин[1,2,a], **А. В. Гореликов**[1,2], **А. В. Ряховский**[1,2]
[1] *Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Сургут, Российская Федерация*
[2] *Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация*
[a] *igor-bychin@yandex.ru*

Аннотация: для модели неидеальной магнитной гидродинамики в рамках метода контрольного объема рассматривается вариант схемы дискретизации уравнения индукции магнитного поля. Для дискретизации уравнения индукции используется алгоритм ограниченного переноса, обеспечивающий соленоидальность численного решения. Приводится подробный вывод дискретного аналога уравнения индукции в произвольных ортогональных криволинейных координатах для смещённых структурированных расчетных сеток. Конвективные потоки в уравнении индукции аппроксимируются по противопоточной схеме с квадратичной интерполяцией с использованием метода отложенной коррекции.

Ключевые слова: уравнение индукции, дискретный аналог, численный метод, магнитная гидродинамика.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-04-60123).

Для цитирования: Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Схема дискретизации уравнения индукции на смещенных сетках в ортогональных криволинейных координатах. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):60–73. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-8.

DISCRETIZATION SCHEME OF THE INDUCTION EQUATION ON A STAGGERED GRIDIN ORTHOGONAL CURVILINEAR COORDINATES

Igor V. Bychin[1,2,a], **Andrey V. Gorelikov**[1,2], **Aleksey V. Ryakhovsky**[1,2]
[1] *Surgut Branch of Federal State Institute "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Surgut, Russian Federation*
[2] *Surgut State University, Surgut, Russian Federation*
[a] *igor-bychin@yandex.ru*

Abstract: a discretization scheme of the magnetic field induction equation is considered for the model of nonideal magnetic hydrodynamics within the framework of the control volume method. A constrained transfer algorithm is used to discretize the induction equation, which provides a solenoidal numerical solution. A detailed elaboration of the discrete analog of the induction equation in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates for staggered structured computational grids is presented. The convective flows in the induction equation are approximated with the counterflow scheme using quadratic interpolation and the deferred correction method.

Keywords: induction equation, discrete analog, numerical method, magnetohydrodynamics.

Acknowledgements: this work is financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project #20-04-60123).

Cite this article: Bychin I. V., Gorelikov A. V., Ryakhovsky A. V. Discretization Scheme of the Induction Equation on a Staggered Gridin Orthogonal Curvilinear Coordinates. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):60–73. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-8.

Введение

С середины 90-х годов XX века разработано достаточно большое количество программных комплексов (MagIC, UCSC Code, Calypso, ETH code, GeoFEM и т. д.) [1–5] для математического моделирования геодинамо, с помощью которых получен ряд наблюдаемых характеристик геомагнитного поля. Полученные результаты позволили существенно продвинуться в понимании процессов, формирующих магнитное поле Земли. Тем не менее необходимо отметить, что в многочисленных исследованиях [1, 6–8], проведенных с использованием вышеупомянутых программных комплексов, изучались, в основном, квазиламинарные режимы течений, что оставляет вопросы о реалистичности полученных результатов.

В кодах для моделирования геодинамо реализована математическая модель магнитогидродинамической естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся сферическом слое, и, как правило, для численного решения используются спектральные и псевдоспектральные методы [1–8]. Широкое использование спектральных и псевдоспектральных методов обусловлено тем, что для сферической геометрии они предпочтительней с точки зрения скорости сходимости и вычислительной эффективности по сравнению с локальными методами (конечно-разностные, конечно-объемные, конечно-элементные методы) [4, 9]. Несмотря на это, локальные методы обладают рядом преимуществ, например, таких как: возможность расчета в областях со сложной геометрической формой и использование широкого спектра моделей турбулентности, т.е. в этом смысле локальные методы являются более универсальными. В настоящее время существует ряд работ, посвященных созданию численных методов и программного обеспечения для решения задач геодинамо [4, 9] в рамках локальных подходов.

При использовании локальных методов одна из основных проблем — это получение численного решения уравнения индукции, удовлетворяющего сеточному уравнению неразрывности. Существуют различные подходы для обеспечения бездивергентности магнитного поля: использование векторного потенциала [10]; метод искусственного скалярного потенциала [11–12]; введение в уравнение индукции градиента псевдодавления [9, 13–16]; метод Пауэлла, который широко применяется в астрофизических приложениях и основан на записи уравнений в форме, допускающей существование магнитных монополей [17]; алгоритм ограниченного переноса, основанный на использовании интегральной формы закона электромагнитной индукции Фарадея [11, 13, 18]. Перечисленные методы устранения численного магнитного заряда не являются универсальными и обладают своими преимуществами и недостатками. Например, коррекция магнитного поля в методе скалярного потенциала нелокальна и поэтому локальные ошибки в дивергенции магнитного поля могут мгновенно распространяться на всю область [19]. Другие методы, например, метод Пауэлла, не являются, строго говоря, консервативными.

Результаты, представленные в данной статье, являются продолжением работ авторов по разработке и модификации численных методов решения задач магнитной гидродинамики (МГД) и созданию программного обеспечения для моделирования геодинамо [20–21]. В настоящей работе рассмотрена схема дискретизации уравнения индукции магнитного поля, разработанная в рамках метода контрольного объема [22–23] и использующая алгоритм ограниченного переноса [18]. Дискретный аналог уравнения индукции записывается для смещённых структурированных расчетных сеток в произвольных ортогональных криволинейных координатах.

Дискретизация расчетной области

Будем считать, что расчетная область G — это ограниченная область в трехмерном пространстве, в которой введены произвольные ортогональные координаты — $\{x_\alpha\}$ (здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2, 3 и определяют номер координаты точки или компоненты вектора); $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ — соответствующий правый ортонормированный базис, $\{H_\alpha\}$ — коэффициенты Ламе. Пусть область G можно разбить системой координатных поверхностей на непересекающиеся подобласти (контрольные объемы) $D_{(i)} := D_{i_1 i_2 i_3}$ $(i_\alpha = 1, \ldots, n_\alpha)$, n_α — количество координатных поверхностей вдоль направления x_α, здесь и далее набор индексов (i_1, i_2, i_3) кратко обозначается (i). Пусть $P_{(i)}$ — точка, находящаяся в геометрическом центре контрольного объема $D_{(i)}$. Сеточные значения компонент магнитного поля будем определять в точках на гранях контрольных объемов, т.е. использовать дискретизацию на смещённых (разнесённых) структурированных расчетных сетках [11]. Для дискретизации уравнения индукции на смещённых сетках удобно использовать точки с целыми и полуцелыми индексами, полагая, что расчетные точки с одним полуцелым индексом находятся в центрах граней контрольных объемов, расчетные точки с двумя полуцелыми индексами находятся в центрах рёбер контрольных объемов, а расчетные точки с тремя полуцелыми индексами находятся в вершинах контрольных объемов. Для описания смещённой расчетной сетки с использованием целых и полуцелых индексов введем операторы сдвига, действующие на наборах индексов:

$$h_\alpha^k(i) := h_\alpha^k(i_1, i_2, i_3) = \left(h_\alpha^k(i_1), h_\alpha^k(i_2), h_\alpha^k(i_3)\right) , \tag{1}$$

$$h_\alpha^k(i_\beta) := i_\beta + \frac{k}{2}\delta_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, верхний индекс k принимает значения во множестве целых чисел и определяет направление и величину сдвига индекса i_β по направлению x_α. Операторы сдвига очевидно коммутируют друг с другом.

Введём следующие компактные обозначения для точек смещённой расчетной сетки:

$$P\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := P_{h_\alpha^k(i)}, \qquad P\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} := P_{h_\beta^p h_\alpha^k(i)}, \qquad P\begin{bmatrix} q & p & k \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix} := P_{h_\gamma^q h_\beta^p h_\alpha^k(i)}.$$

Нижние греческие индексы в квадратных скобках определяют направление смещения по расчётной сетке, а индексы над ними – величину сдвига по соответствующему направлению. Для сеточных значений зависимых и независимых переменных вводятся следующие обозначения:

$$f\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := f\left(P\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}\right), \qquad f\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} := f\left(P\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right), \qquad f\begin{bmatrix} q & p & k \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix} := f\left(P\begin{bmatrix} q & p & k \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}\right),$$

где f — произвольная переменная или элемент расчётной сетки (координата точки, длина ребра и т.д.). Аналогичные обозначения вводятся для суммы и произведения сеточных значений функций, например,

$$(f+g)\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := f\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + g\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}, \qquad (fg)\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := f\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}\; g\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

В рамках введенных обозначений, если $k = \pm 1$, то точки $P\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ — это центры граней $S_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ контрольного объема $D_{(i)}$, ортогональных координатной линии x^α. Граница контрольного объема $\partial D_{(i)} = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{3} S_\alpha\begin{bmatrix} \pm 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$; $\delta S_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ — площадь соответствующей грани контрольного объема. Если $k, p = \pm 1$, то точки $P\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ — это центры рёбер $l_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = S_\beta\begin{bmatrix} p \\ \beta \end{bmatrix} \bigcap S_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ контрольного объема $D_{(i)}$, расположенных вдоль координатных линий x^γ ($\alpha \neq \beta \neq \gamma$); $\delta l_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ — длина соответствующего ребра. Граница грани $S_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ — $\partial S_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = \bigcup\limits_{p=-1,\,1}\left(l_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \bigcup l_\beta\begin{bmatrix} p & k \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}\right)$. Если $k, p = \pm 1$ и $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, то точки $P\begin{bmatrix} q & p & k \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ — это вершины контрольного объема $D_{(i)}$.

Дискретный аналог уравнения индукции магнитного поля

В МГД [24] уравнение индукции можно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_{\mathrm{m}} \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0. \tag{3}$$

Здесь: $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{u}$ — скорости жидкости, t — время, $\nu_{\mathrm{m}} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ — коэффициент магнитной вязкости, c — скорость света, σ — удельная электрическая проводимость жидкости. Из (3) непосредственно следует, что равенство нулю дивергенции $\mathbf{B}$ в начальный момент времени обеспечивает соленоидальность магнитного поля и в последующие моменты времени, это свойство решения желательно сохранить и для дискретного аналога уравнения индукции. Уравнение (3) можно записать в форме закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\,c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \tag{4}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, которая в модели МГД имеет вид:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{c}{4\pi\sigma}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}. \tag{5}$$

Для получения дискретного аналога в данной работе используется подход, известный в вычислительной магнитной гидродинамике как алгоритм ограниченного переноса (CTA — constrained transport algorithm) [18]: уравнение (4) умножается на $e_\alpha\, dS_\alpha\, dt$ (dS_α — элемент площади на координатной поверхности, ортогональной e_α) и затем интегрируется по грани $S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix}\right]$ и по промежутку времени $[t_0, t]$. При вычислении поверхностного интеграла используются теорема Стокса и интегральная теорема о среднем. При интегрировании по времени в данной работе использована полностью неявная схема [23, 24]. В результате дискретный аналог уравнения индукции (3) записывается в виде:

$$\frac{1}{\delta t}\left(B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} - B^0_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}\right) \delta S_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = -c \sum_{\beta,\,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,\,1} p\, E_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, k \in \{-1, 1\}), \tag{6}$$

где $B_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix}\right]$ — сеточное значение компонент индукции магнитного поля B_α на текущем временном слое t в центре грани $S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix}\right]$, $B^0_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix}\right]$ — сеточное значение B_α на предыдущем временном слое t_0; $E_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right]$ — сеточное значение E_γ в центре ребра $l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right]$; $\delta t = t - t_0$ — шаг по времени; $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — символ Леви-Чивиты.

Дискретный аналог уравнения неразрывности

Сеточные значения $\mathrm{div}B$ вычисляются в центрах контрольных объемов $D_{(i)}$ по формуле:

$$\mathrm{DIV}\,\mathbf{B}\,|_{P_{(i)}} = \frac{1}{\delta V_{(i)}} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{k=-1,\,1} k\, B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} \delta S_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $\delta V_{(i)}$ — объем $D_{(i)}$, внешняя нормаль на грани $S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix}\right]$ — $\mathbf{n} = k\,\mathbf{e}_\alpha$. Правая часть (7) — это поток $\mathbf{B}$ через границу $D_{(i)}$, отнесенный к его объему. Пусть в момент времени t_0 сеточные значения $B^0_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix}\right]$ удовлетворяют дискретному аналогу уравнения неразрывности, т.е. $\mathrm{DIV}\,\mathbf{B}^0\big|_{P_{(i)}} = 0$. Тогда подстановка $B_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix}\right] \delta S_\alpha \left[\begin{smallmatrix} k \\ \alpha \end{smallmatrix}\right]$ из дискретного аналога уравнения индукции (6) в правую часть (7) дает:

$$\mathrm{DIV}\,\mathbf{B}\,|_{P_{(i)}} = -\frac{c\delta t}{\delta V_{(i)}} \sum_{\alpha,\beta,\,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\sum_{k,p=-1,\,1} kp\, E_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right). \tag{8}$$

Сумма в круглых скобках в правой части (8) симметрична по индексам α и β, и, следовательно, её свертка с символом Леви-Чивиты равна нулю, т.е.

$$\mathrm{DIV}\,\mathbf{B}\,|_{P_{(i)}} = 0. \tag{9}$$

Таким образом, решение дискретного аналога уравнения индукции (8) удовлетворяет сеточному уравнению неразрывности (9) на текущем временном слое, при условии, что B^0 соленоидально на предыдущем временном слое, т.е. $\mathrm{DIV}\,\mathbf{B}^0\big|_{P_{(i)}} = 0$.

Аппроксимация плотности тока проводимости

Следуя [18], напряженность электрического поля (5) можно записать в виде суммы:

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{\sigma}\mathbf{j}, \tag{10}$$

где $\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ — напряженность, обусловленная движением проводящей среды, а $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\,\mathbf{B}$ — плотность тока проводимости. Сначала разберем вопрос об аппроксимации плотности тока проводимости. Для этого рассмотрим координатную поверхность, ортогональную оси x_γ и проходящую через точку $P \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right]$, лежащую в центре ребра $l_\gamma \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right]$ ($\alpha \neq \beta \neq \gamma$, $p, k \in \{-1, 1\}$). На данной координатной поверхности построим замкнутый контур, образованный координатными линиями x_α и x_β, проходящими через ближайшие, соседние с $P \left[\begin{smallmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right]$ четыре точки $P \left[\begin{smallmatrix} p\pm1 & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right]$, $P \left[\begin{smallmatrix} p & k\pm1 \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right]$. Точки $P \left[\begin{smallmatrix} p\pm1 & k \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right]$,

$P\begin{bmatrix} p & k\pm1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ находятся в центрах граней контрольных объемов, и в них вычисляются соответствующие сеточные значения компонент $B_\alpha\begin{bmatrix} p\pm1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $B_\beta\begin{bmatrix} p & k\pm1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ вектора магнитной индукции. Часть координатной поверхности $x_\gamma = const$ внутри построенного контура обозначим $\tilde{S}_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, тогда сам контур будет её краем $\partial\tilde{S}_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$. Для равномерной по направлениям x_α и x_β сетки точка $P\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ находится в центре $\tilde{S}_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$. Введем обозначения: $\delta\tilde{S}_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ — площадь$\tilde{S}_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$; $\delta\tilde{l}_\alpha\begin{bmatrix} p\pm1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\delta\tilde{l}_\beta\begin{bmatrix} p & k\pm1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ — длины сторон контура $\partial\tilde{S}_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

Сеточное значение компоненты плотности тока проводимости $j_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ в центре ребра $l_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ получим с использованием формулы Стокса для rot **B** при интегрировании по $\tilde{S}_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$:

$$j_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \frac{c}{4\pi}\delta\tilde{S}_\gamma^{-1}\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \sum_{\lambda,\,\rho=1}^{3} \varepsilon_{\gamma\lambda\rho} \sum_{q=-1,\,1} q\,(B_\rho\,\delta\tilde{l}_\rho)\begin{bmatrix} q & p & k \\ \lambda & \beta & \alpha \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Заметим, что ненулевой вклад в правую часть (11) дадут только те слагаемые, у которых индексы λ и ρ совпадают с α или β, поскольку должно выполняться условие $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, эти слагаемые будут содержать $B_\alpha\begin{bmatrix} p\pm1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\ \delta\tilde{l}_\alpha\begin{bmatrix} p\pm1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $B_\beta\begin{bmatrix} p & k\pm1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\ \delta\tilde{l}_\beta\begin{bmatrix} p & k\pm1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

Вычислим вклад тока проводимости в правую часть дискретного аналога уравнения индукции (6):

$$-\frac{c}{\sigma}\sum_{\beta,\,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,\,1} p\,(j_\gamma\,\delta l_\gamma)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Подстановка $j_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ из (11) в (12) дает:

$$\begin{aligned}
&-\frac{c}{\sigma}\sum_{\beta,\,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,\,1} p\,(j_\gamma\,\delta l_\gamma)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \\
&= -\nu_m \sum_{\beta,\,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,\,1} p\,\delta l_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\delta\tilde{S}_\gamma^{-1}\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\left(\sum_{\lambda,\,\rho=1}^{3} \varepsilon_{\gamma\lambda\rho} \sum_{q=-1,\,1} q\,(B_\rho\,\delta\tilde{l}_\rho)\begin{bmatrix} q & p & k \\ \lambda & \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) = \\
&= -\sum_{\beta,\,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p,q=-1,1} pq\,\left(\nu_m\,\delta l_\gamma \delta\tilde{S}_\gamma^{-1}\right)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\sum_{\lambda,\,\rho=1}^{3} \varepsilon_{\gamma\lambda\rho}\,\left(B_\rho\,\delta\tilde{l}_\rho\right)\begin{bmatrix} q & p & k \\ \lambda & \beta & \alpha \end{bmatrix} = \\
&= -\sum_{\beta,\,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p,q=-1,1} pq\,\left(\nu_m\,\delta l_\gamma \delta\tilde{S}_\gamma^{-1}\right)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\left\{\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}\,(B_\beta\,\delta\tilde{l}_\beta)\begin{bmatrix} q & p & k \\ \alpha & \beta & \alpha \end{bmatrix} + \varepsilon_{\gamma\beta\alpha}\,(B_\alpha\,\delta\tilde{l}_\alpha)\begin{bmatrix} q & p & k \\ \beta & \beta & \alpha \end{bmatrix}\right\} = \\
&= -\sum_{\beta,\,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p,q=-1,1} pq\,\left(\nu_m\,\delta l_\gamma \delta\tilde{S}_\gamma^{-1}\right)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\left\{\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}\,(B_\beta\,\delta\tilde{l}_\beta)\begin{bmatrix} p & k+q \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \varepsilon_{\gamma\beta\alpha}\,(B_\alpha\,\delta\tilde{l}_\alpha)\begin{bmatrix} p+q & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right\} = \\
&= \sum_{\substack{\beta,\,\gamma=1 \\ (\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3} \ \sum_{p,q=-1,1} pq\,\left(\nu_m\,\delta l_\gamma \delta\tilde{S}_\gamma^{-1}\right)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\ \left\{\ (B_\alpha\,\delta\tilde{l}_\alpha)\begin{bmatrix} p+q & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - (B_\beta\,\delta\tilde{l}_\beta)\begin{bmatrix} p & k+q \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\ \right\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, вклад тока проводимости (12) можно записать в виде суммы двух слагаемых:

$$-\frac{c}{\sigma}\sum_{\beta,\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum_{p=-1,1}p\left(j_\gamma\,\delta l_\gamma\right)\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}=$$

$$=\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\(\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\ \sum_{p,q=-1,1}pq\ \left(\nu_m\,\delta l_\gamma\delta\tilde{S}_\gamma^{-1}\right)\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\ \left(B_\alpha\,\delta\tilde{l}_\alpha\right)\begin{bmatrix}p+q & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\(\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\ \sum_{p,q=-1,1}(-pq)\ \left(\nu_m\,\delta l_\gamma\delta\tilde{S}_\gamma^{-1}\right)\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\ \left(B_\beta\,\delta\tilde{l}_\beta\right)\begin{bmatrix}p & k+q\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}. \quad (13)$$

Введем коэффициенты диффузии, которые вычисляются в центрах рёбер $l_\gamma\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ контрольного объёма $D_{(i)}$:

$$d_\gamma\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}:=\left(\nu_m\,\delta l_\gamma\delta\tilde{S}_\gamma^{-1}\right)\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix},\qquad (\alpha\neq\beta\neq\gamma, p,k\in\{-1,1\}), \quad (14)$$

и рассмотрим каждое слагаемое в выражении (13) по отдельности. Первое слагаемое в правой части (13) запишем в виде:

$$\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\(\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\ \sum_{p,q=-1,1}pq\ \left(\nu_m\,\delta l_\gamma\delta\tilde{S}_\gamma^{-1}\right)\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\ \left(B_\alpha\,\delta\tilde{l}_\alpha\right)\begin{bmatrix}p+q & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}=$$

$$=-\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\(\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\ \sum_{p=-1,1}d_\gamma\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\ \left(B_\alpha\,\delta\tilde{l}_\alpha\right)\begin{bmatrix}k\\ \alpha\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\(\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\ \sum_{p=-1,1}d_\gamma\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\ \left(B_\alpha\,\delta\tilde{l}_\alpha\right)\begin{bmatrix}2p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}. \quad (15)$$

Второе слагаемое в правой части (13) обозначим $\Omega_\alpha^j\begin{bmatrix}k\\ \alpha\end{bmatrix}$ и запишем в виде:

$$\Omega_\alpha^j\begin{bmatrix}k\\ \alpha\end{bmatrix}=-\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\(\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\ \sum_{p,q=-1,1}pq\ \left(\nu_m\,\delta l_\gamma\delta\tilde{S}_\gamma^{-1}\right)\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\ \left(B_\beta\,\delta\tilde{l}_\beta\right)\begin{bmatrix}p & k+q\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}=$$

$$=-\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\(\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\ \sum_{p=-1,1}pk\,\tilde{d}_\gamma\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\ \left(B_\beta\,\delta\tilde{l}_\beta\right)\begin{bmatrix}p & 2k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}-$$

$$-\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\(\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\ \sum_{p=-1,1}p(-k)\,\tilde{d}_\gamma\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\ \left(B_\beta\,\delta\tilde{l}_\beta\right)\begin{bmatrix}p\\ \beta\end{bmatrix}=$$

$$=k\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\(\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\ \sum_{p=-1,1}p\,\tilde{d}_\gamma\begin{bmatrix}p & k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\ \left\{\left(B_\beta\,\delta\tilde{l}_\beta\right)\begin{bmatrix}p\\ \beta\end{bmatrix}-\left(B_\beta\,\delta\tilde{l}_\beta\right)\begin{bmatrix}p & 2k\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\right\}. \quad (16)$$

$\Omega^j_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ содержит восемь сеточных значений компонент индукции магнитного поля: $B_\beta \begin{bmatrix} p \\ \beta \end{bmatrix}$, $B_\beta \begin{bmatrix} p & 2k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, ($\beta = 1, 2, 3$, $\beta \neq \alpha$, $p = \pm 1$). Таким образом, вклад тока проводимости в правую часть уравнения индукции (6) можно записать в виде:

$$-\frac{c}{\sigma}\sum_{\beta,\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum_{p=-1,1} p\left(j_\gamma\,\delta l_\gamma\right)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= -\sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ (\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\sum_{p=-1,1} d_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\left(B_\alpha\,\delta\tilde{l}_\alpha\right)\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} +$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ (\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\sum_{p=-1,1} d_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\left(B_\alpha\,\delta\tilde{l}_\alpha\right)\begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Omega^j_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Аппроксимация конвективной составляющей напряженности электрического поля с использованием схемы QUICK и метода отложенной коррекции

В данной работе для аппроксимации конвективных потоков в уравнении индукции использована противопоточная схема с квадратичной интерполяцией QUICK [23, 25] в комбинации с методом отложенной коррекции [23, 26] для улучшения устойчивости, скорости сходимости и устранения возможных нефизических осцилляций решения.

Учитывая, что $\tilde{E}_\gamma = -\frac{1}{c}\sum\limits_{\tau,\rho=1}^{3}\varepsilon_{\gamma\tau\rho}u_\tau B_\rho$, вычислим вклад $\tilde{E}$ в правую часть уравнения (6):

$$-c\sum_{\beta,\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum_{p=-1,1} p\,\tilde{E}_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\delta l_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \sum_{\beta,\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum_{p=-1,1} p\sum_{\tau,\rho=1}^{3}\varepsilon_{\gamma\tau\rho}(u_\tau B_\rho)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\delta l_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{\beta,\gamma=1}^{3}\sum_{p=-1,1} p\sum_{\tau,\rho=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\tau\rho}(u_\tau B_\rho\delta l_\gamma)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{\beta,\gamma=1}^{3}\sum_{p=-1,1} p\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}(u_\alpha B_\beta\delta l_\gamma)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta\alpha}(u_\beta B_\alpha\delta l_\gamma)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) =$$

$$= -\sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\sum_{p=-1,1} p(u_\beta B_\alpha\delta l_\gamma)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\sum_{p=-1,1} p(u_\alpha B_\beta\delta l_\gamma)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Схему QUICK для неравномерной сетки можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} F\Phi(x) = {} & F\left(\Theta(F)\Phi_b + \Theta(-F)\Phi_c\right) + \\ & + F\left\{\Theta(F)\left(k_a(\Phi_a - \Phi_b) + k_c(\Phi_c - \Phi_b)\right) + \Theta(-F)\left(k_b(\Phi_b - \Phi_c) + k_d(\Phi_d - \Phi_c)\right)\right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Theta(F) = \begin{cases} 0, F < 0 \\ 1, F \geq 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда. Сеточные значения зависимой переменной Φ в (19) вычисляются в точках $a < b < c < d$ и равны соответственно: Φ_a, Φ_b, Φ_c, Φ_d. Точка x, в которой аппроксимируется конвективный поток $F\Phi(x)$, лежит на отрезке $[b, c]$ координатной линии x_β. Коэффициенты в (19) вычисляются по формулам:

$$k_a = \frac{(x-b)(x-c)}{(b-a)(c-a)}, k_c = \frac{(x-b)(x-a)}{(c-b)(c-a)}, k_b = \frac{(x-c)(x-d)}{(c-b)(d-b)}, k_d = \frac{(x-c)(x-b)}{(d-c)(d-b)}. \quad (20)$$

Введем функцию:

$$f_Q^{\beta}\left(\Phi(x)\right) = \Theta(F)\left(k_a(\Phi_a - \Phi_b) + k_c(\Phi_c - \Phi_b)\right) + \Theta(-F)\left(k_b(\Phi_b - \Phi_c) + k_d(\Phi_d - \Phi_c)\right), \qquad (21)$$

где верхний индекс указывает координатную линию, вдоль которой осуществляется аппроксимация. Тогда (19) запишется в виде:

$$F\Phi(x) = F\left(\Theta(F)\Phi_b + \Theta(-F)\Phi_c\right) + F f_Q^{\beta}\left(\Phi(x)\right). \qquad (22)$$

Полагая в (21) и (22) $F = u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi(x) = B_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_a = B_\alpha \begin{bmatrix} p-3 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_b = B_\alpha \begin{bmatrix} p-1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_c = B_\alpha \begin{bmatrix} p+1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_d = B_\alpha \begin{bmatrix} p+3 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, получим следующую аппроксимацию потоков $(u_\beta B_\alpha) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ в (18):

$$(u_\beta B_\alpha) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \left(\Theta\left(u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) B_\alpha \begin{bmatrix} p-1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Theta\left(-u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) B_\alpha \begin{bmatrix} p+1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) + u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} f_Q^{\beta}\left(B_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right), \qquad (23)$$

где

$$f_Q^{\beta}\left(B_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) = \Theta\left(u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) \left(k_a \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p-3 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\alpha \begin{bmatrix} p-1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) + k_c \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p+1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\alpha \begin{bmatrix} p+3 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right)\right) + $$
$$+ \Theta\left(-u_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) \left(k_b \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p-1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\alpha \begin{bmatrix} p+1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) + k_d \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p+3 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\alpha \begin{bmatrix} p+1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right)\right). \qquad (24)$$

Коэффициенты k_a, k_b, k_c, k_d в (24) получаются по формулам (20) подстановками: $x = x_\beta \begin{bmatrix} p \\ \beta \end{bmatrix}$, $a = x_\beta \begin{bmatrix} p-3 \\ \beta \end{bmatrix}$, $b = x_\beta \begin{bmatrix} p-1 \\ \beta \end{bmatrix}$, $c = x_\beta \begin{bmatrix} p+1 \\ \beta \end{bmatrix}$, $d = x_\beta \begin{bmatrix} p+3 \\ \beta \end{bmatrix}$.

Таким образом, по схеме QUICK первое слагаемое в правой части (18) записывается в виде:

$$- \sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,\,1} p(u_\beta B_\alpha \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \left((u_\beta B_\alpha \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} -1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - (u_\beta B_\alpha \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) =$$

$$= B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} \sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \left(\Theta\left(-u_\beta \begin{bmatrix} -1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} -1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - \Theta\left(u_\beta \begin{bmatrix} 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \left(\Theta\left(u_\beta \begin{bmatrix} -1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} -1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} -2 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - \Theta\left(-u_\beta \begin{bmatrix} 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} 1 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} 2 & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) -$$

$$- \sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,\,1} p(u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} f_Q^{\beta}\left(B_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) =$$

$$= -\left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,\,1} p\Theta\left(pu_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{\substack{\beta,\gamma=1 \\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,\,1} p\Theta\left(pu_\beta \begin{bmatrix} -p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) (u_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} -p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} -2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} +$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\ \sum_{p=-1,\,1}(-p)(u_\beta\delta l_\gamma)\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix} f_Q^\beta\left(B_\alpha\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}\right)=$$

$$=-\left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\ \sum_{p=-1,\,1}p\Theta\left(pu_\beta\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}\right)\ (u_\beta\delta l_\gamma)\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}\right)B_\alpha\begin{bmatrix}k\\ \alpha\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\ \sum_{p=-1,\,1}(-p)\Theta\left(-pu_\beta\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}\right)\ (u_\beta\delta l_\gamma)\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}B_\alpha\begin{bmatrix}2p\ k\\ \beta\ \ \alpha\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\ \sum_{p=-1,\,1}(-p)(u_\beta\delta l_\gamma)\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix} f_Q^\beta\left(B_\alpha\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}\right)$$

$$=-\left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\ \sum_{p=-1,\,1}p\left(\Theta(pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}\right)\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}\right)B_\alpha\begin{bmatrix}k\\ \alpha\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\ \sum_{p=-1,\,1}(-p)\left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}\right)\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}B_\alpha\begin{bmatrix}2p\ k\\ \beta\ \ \alpha\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\ \sum_{p=-1,\,1}(-p)F_{\beta\gamma}\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix} f_Q^\beta\left(B_\alpha\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}\right), \tag{25}$$

где введены обозначения:

$$F_{\beta\gamma}\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}=u_\beta\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}\delta l_\gamma\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}, (\alpha\neq\beta\neq\gamma,\ p\in\{-1,1\}). \tag{26}$$

Согласно методу отложенной коррекции, в матрицу системы линейных уравнений, которые получаются в результате дискретизации по схеме QUICK, вносятся слагаемые, соответствующие аппроксимации по противопоточной схеме, а остальные слагаемые вносятся в источниковый член дискретного аналога и рассчитываются по значениям зависимой переменной на предыдущей итерации. Преобразуем первое слагаемое в правой части (25) в соответствии с методом отложенной коррекции:

$$-\left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\ \sum_{p=-1,\,1}p\left(\Theta(pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}\right)\begin{bmatrix}p\ k\\ \beta\ \alpha\end{bmatrix}\right)B_\alpha\begin{bmatrix}k\\ \alpha\end{bmatrix}=$$

$$= -\left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,1} (-p)\left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}\right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} +$$

$$+ \left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,1} (-p)\left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}\right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} -$$

$$- \left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,1} p\left(\Theta(pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}\right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= -\left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,1} (-p)\left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})F_{\beta\gamma}\right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} +$$

$$+ \left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,1} (-p)F_{\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Таким образом, (25) записывается в виде:

$$- \sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,1} p(u_\beta B_\alpha \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= -\left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,1} (-p)\left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})\,F_{\beta\gamma}\right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,1} (-p)\left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})\,F_{\beta\gamma}\right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Omega^Q_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}, \tag{28}$$

и первые два слагаемых в правой части (28) соответствуют схеме вверх по потоку, а остальные слагаемые содержатся в $\Omega^Q_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$, которое определяется по формуле:

$$\Omega^Q_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := \sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3} \sum_{p=-1,1} (-p)F_{\beta\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \left(B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + f^\beta_Q \left(B_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \right). \tag{29}$$

Аналогично, полагая в (21) и (22): $F = u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi(x) = B_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_a = B_\beta \begin{bmatrix} p & k-3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_b = B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_c = B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\Phi_d = B_\beta \begin{bmatrix} p & k+3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, получим аппроксимацию потоков $(u_\alpha B_\beta) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ в (18):

$$(u_\alpha B_\beta) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \left(\Theta\left(u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Theta\left(-u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) +$$
$$+ u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} f_Q^\alpha \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right), \tag{30}$$

где

$$f_Q^\alpha \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) = \Theta\left(u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) \left(k_a \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k-3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) + k_c \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right)\right) +$$
$$+ \Theta\left(-u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) \left(k_b \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) + k_d \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k+3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right)\right). \tag{31}$$

Коэффициенты k_a, k_b, k_c, k_d в (31) получаются по формулам (20) подстановками:$x = x_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$, $a = x_\alpha \begin{bmatrix} k-3 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $b = x_\alpha \begin{bmatrix} k-1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $c = x_\alpha \begin{bmatrix} k+1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $d = x_\alpha \begin{bmatrix} k+3 \\ \alpha \end{bmatrix}$.

Введем обозначение для второго слагаемого в правой части (18):

$$\Omega_\alpha^F \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^{3} \sum_{p=-1,\,1} p(u_\alpha B_\beta \delta l_\gamma) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Тогда с учетом (30) $\Omega_\alpha^F \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ аппроксимируется по формуле:

$$\Omega_\alpha^F \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^{3} \sum_{p=-1,\,1} pF_{\alpha\gamma} \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \left(\Theta\left(u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) B_\beta \begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. + \Theta\left(-u_\alpha \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) B_\beta \begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + f_Q^\alpha \left(B_\beta \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right) \right). \tag{33}$$

Таким образом, аппроксимация вклада $\tilde{E}$ в уравнение индукции (6) запишется в виде:

$$-c \sum_{\beta,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,\,1} p\, \tilde{E}_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} =$$
$$= - \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^{3} \sum_{p=-1,\,1} (-p) \left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})\, F_{\beta\gamma}\right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) B_\alpha \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} +$$
$$+ \sum_{\substack{\beta, \gamma = 1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma}}^{3} \sum_{p=-1,\,1} (-p) \left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})\, F_{\beta\gamma}\right) \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha \begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha^Q \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha^F \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Окончательная форма записи дискретного аналога уравнения индукции

Запишем правую часть (6) с учетом (17) и (34):

$$-c \sum_{\beta,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{p=-1,\,1} p\, E_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta l_\gamma \begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{c}{\sigma}\sum_{\beta,\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum_{p=-1,1} p\,(j_\gamma\,\delta l_\gamma)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - c\sum_{\beta,\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum_{p=-1,1} p\,\tilde{E}_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\,\delta l_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= -\left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\sum_{p=-1,1}\left(d_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\delta\tilde{l}_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} - p\left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})\,F_{\beta\gamma}\right)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right)\right)B_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} +$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ (\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\sum_{p=-1,1}\left(d_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\delta\tilde{l}_\alpha\begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - p\left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})\,F_{\beta\gamma}\right)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right)B_\alpha\begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} +$$

$$+\,\Omega^j_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \Omega^Q_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \Omega^F_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Определим коэффициенты при B_α и источниковый член $\Omega_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ для дискретного аналога уравнения индукции (6) по формулам:

$$a_{\alpha\beta\gamma}\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} := d_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\delta\tilde{l}_\alpha\begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} - p\left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})\,F_{\beta\gamma}\right)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, (\alpha\neq\beta\neq\gamma, p, k\in\{-1,1\}), \tag{36}$$

$$a_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := \sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\sum_{p=-1,1} a_{\alpha\beta\gamma}\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \tag{37}$$

$$\Omega_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = \Omega^j_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \Omega^Q_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} + \Omega^F_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} -$$

$$-\left(\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma}}^{3}\sum_{p=-1,1}\left(d_\gamma\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\left\{\delta\tilde{l}_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} - \delta\tilde{l}_\alpha\begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right\} - p\left(\Theta(-pF_{\beta\gamma})\,F_{\beta\gamma}\right)\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right)\right)B_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Тогда дискретный аналог уравнения индукции (6) запишется в виде:

$$\frac{1}{\delta t}\left(B_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} - B^0_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}\right)\delta S_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = -\,a_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}B_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} +$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\gamma=1\\ (\alpha\neq\beta\neq\gamma)}}^{3}\sum_{p=-1,1} a_{\alpha\beta\gamma}\begin{bmatrix} p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}B_\alpha\begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \Omega_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}, (\alpha = 1,2,3, k\in\{-1,1\}). \tag{39}$$

Уравнение (39) содержит 25 сеточных значений компонент индукции магнитного поля: 9 сеточных значений $B_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$, $B_\alpha\begin{bmatrix} 2p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $B_\alpha\begin{bmatrix} 4p & k \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ $(\beta = 1,2,3,\, \beta\neq\alpha,\, p=\pm1)$ и 16 сеточных значений $B_\beta\begin{bmatrix} p & k-3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $B_\beta\begin{bmatrix} p & k-1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $B_\beta\begin{bmatrix} p & k+1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $B_\beta\begin{bmatrix} p & k+3 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ $(\beta = 1,2,3,\ \beta\neq\alpha,\ p=\pm1)$. Сеточные значения компонент вектора индукции, входящие в источниковый член $\Omega_\alpha\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}$ согласно методу отложенной коррекции, берутся с предыдущей итерации.

Заключение

Представлена разработанная в рамках метода контрольного объема численная схема дискретизации уравнения индукции магнитного поля в модели неидеальной магнитной гидродинамики. Для дискретизации уравнения индукции использован алгоритм ограниченного переноса, обеспечивающий соленоидальность численного решения. Конвективные потоки в уравнении индукции аппроксимированы по схеме QUICK в комбинации с методом отложенной коррекции, что дает второй порядок аппроксимации по пространственным переменным на равномерной сетке. Предложенная в статье численная схема реализована для сферических координат в разрабатываемом авторами МГД-коде для математического моделирования геодинамо. Программный код разработан с использованием технологии CUDA, набора расширений к языку программирования Фортран (CUDA Fortran) и адаптирован для гибридных вычислительных систем с графическими процессорами. Результаты тестов разработанного кода [27] демонстрируют достаточно точное соответствие эталонным решениям задачи моделирования геодинамо с вакуумными и псевдовакуумными граничными условиями [2–4], полученным с помощью спектральных и псевдоспектральных методов. В частности, отклонение от эталонных значений средней кинетической и магнитной энергии составляет менее одного процента на расчетных сетках, содержащих 980000 контрольных объемов в сферическом слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Glatzmaier G. A., Roberts P. H. A Three-Dimensional Self-Consistent Computer Simulation of a Geomagnetic Field Reversal. *Nature*. 1995;377:203–209. DOI: 10.1038/377203a0.
2. Christensen U. R., Aubert J., Cardin P., Dormy E., Gibbons S., Glatzmaier G. A., Grote E., Honkura Y., Jones C., Kono M., Matsushima M., Sakuraba A., Takahashi F., Tilgner A., Wicht J., Zhang K. A Numerical Dynamo Benchmark. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2001;128:25–34. DOI: 10.1016/S0031-9201(01)00275-8.
3. Jackson A., Sheyko A., Marti P., Tilgner A., Cebron D., Vantieghem S., Simitev R., Busse F., Zhan X., Schubert G., Takehiro S., Sasaki Y., Hayashi Y.-Y., Ribeiro A., Nore C., Guermond J.-L. A Spherical Shell Numerical Dynamo Benchmark with Pseudo-Vacuum Magnetic Boundary Conditions. *Geophysical Journal International*. 2014;196(2):712–723. DOI: 10.1093/gji/ggt425.
4. Matsui H., Heien E., Aubert J., Aurnou J. M., Avery M., Brown B., Buffett B. A., Busse F., Christensen U. R., Davies C. J., Featherstone N., Gastine T., Glatzmaier G. A., Gubbins D., Guermond J.-L., Hayashi Y.-Y., Hollerbach R., Hwang L. J., Jackson A., Jones C. A., Jiang W., Kellogg L. H., Kuang W., Landeau M., Marti P., Olson P., Ribeiro A., Sasaki Y., Schaeffer N., Simitev R. D., Sheyko A., Silva L., Stanley S., Takahashi F., Takehiro S.-I., Wicht J., Willis A. P. Performance Benchmarks for a Next Generation Numerical Dynamo Model. *Geochem. Geophys. Geosyst*. 2016;17(5):1586–1607. DOI: 10.1002/2015GC006159.
5. Reshetnyak M. Yu. *Simulation in Geodynamo*. Saarbrucken: Lambert Academic Publ.; 2013. 180 p.
6. Olson P. L., Glatzmaier G. A., Coe R. S. Complex Polarity Reversals in a Geodynamo Model. *Earth Planet. Sci. Lett*. 2011;304:168–179. DOI: 10.1016/j.epsl.2011.01.031.
7. Olson P., Driscoll P., Amit H. Dipole Collapse and Reversal Precursors in a Numerical Dynamo. *Phys. Earth. Planet. Inter*. 2009;173:121–140. DOI: 10.1016/j.pepi.2008.11.010.
8. Jones C. A. Convection-Driven Geodynamo Models. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 2000;358:873–897. DOI: 10.1098/rsta.2000.0565.
9. Vantieghem S., Sheyko A., Jackson A. Applications of a Finite-Volume Algorithm for Incompressible MHD Problems. *Geophysical Journal International*. 2016;204(2):1376–1395. DOI: 10.1093/gji/ggv527.
10. Matsui H., Okuda H. Development of a Simulation Code for MHD Dynamo Processes Using the GeoFEM Platform. *Int. J. Comput. Fluid Dyn*. 2004;18(4):323–332. DOI: 10.1080/1061856031000154784.
11. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2001. 608 с.
12. Бетелин В. Б., Галкин В. А., Гореликов А. В. Алгоритм типа предиктор-корректор для численного решения уравнения индукции в задачах магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. *Доклады Академии наук*. 2015;464(5):525–528. DOI: 10.7868/S0869565215290034.
13. Toth G. The Div b=0 Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes. *J. Comput. Phys*. 2000;161:605–652. DOI: 10.1006/jcph.2000.6519.
14. Harder H., Hansen U. A Finite-Volume Solution Method for Thermal Convection and Dynamo Problems in Spherical Shells. *Geophysical Journal International*. 2005;161(2):522–532. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2005.02560.x.

15. Chan K. H., Zhang K., Li L., Liao X. A New Generation of Convection-Driven Spherical Dynamos Using EBE Finite Element Method. *Phys. Earth Planet. Int*. 2007;163(14):251–265. DOI: 10.1016/j.pepi.2007.04.017.
16. Guermond J.-L., Laguerre R., Léorat J., Nore C. An Interior Penalty Galerkin Method for the MHD Equations in Heterogeneous Domains. *J. Comput. Phys*. 2007;221(1):349–369. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.06.045.
17. Powell K. G., Roe P. L., Linde T. J., Gombosi T. I., De Zeeuw D. L. A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*. 1999;154(2):284–309. DOI: 10.1006/jcph.1999.6299.
18. Iskakov A. B., Descombes S., Dormy E. An Integro-Differential Formulation for Magnetic Induction in Bounded Domains: Boundary Element-Finite Volume Method. *J. Comput. Phys*. 2004;197(2):540–554. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.12.008.
19. Teyssier R., Commercon B. Numerical Methods for Simulating Star Formation. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*. 2019;6:1–35. DOI: 10.3389/fspas.2019.00051.
20. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Исследование установившихся режимов естественной конвекции во вращающемся сферическом слое. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2016;1:48–59.
21. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Численное решение начально-краевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля в шаре. *Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика*. 2020;64:15–30. DOI: 10.17223/19988621/64/2.
22. Patankar S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington DC: Hemisphere Publishing; 1980. 197 p.
23. Versteeg H. K., Malalasekera W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Harlow: Pearson Education Limited; 2007. 503 p.
24. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. *Магнитная гидродинамика*. М.: Логос; 2011. 324 с.
25. Leonard B. P. A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1979;19(1):59–98. DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3.
26. Hayase T., Humphrey J. A. C., Greif R. A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures. *Journal of Computational Physics*. 1992;98(1):108–118. DOI: 10.1016/0021-9991(92)90177-Z.
27. Бычин И. В. Тестирование магнитогидродинамического кода на задачах естественной конвекции и геодинамо. *Успехи кибернетики*. 2021;2(1):6–13. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-1-1.