

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-1-2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ДЛЯ ИСКУССТВЕННОГО ЛЕДОВОГО ОСТРОВА**Д. С. Конов^а, М. В. Муратов^б, В. А. Бирюков^в***Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Российская Федерация*^а ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4309-4660>, konov1999@gmail.com^б ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4958-8856>, max.muratov@gmail.com^в ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0109-8567>, biryukov.vova@gmail.com

Аннотация: в работе изучается двумерный ледовый остров в Арктике. Сформулирована задача Стефана для изменения фазового состояния вещества. Разработан численный метод ее решения. Этот метод модифицирован для учета эффектов внешней среды, которые не учитывает физическая модель. Кратко обсуждены идеи для учета солености воды и льда, скорости ветра, а также течения воды, эти подходы реализованы в программе. Для разработанной модели проведен ряд численных экспериментов на ледовом острове. Для этого ледового острова найдено распределение температур в разных постановках, в том числе с учетом массива донного грунта глубиной 10 метров после намораживания и через 150 дней в экстремальных условиях.

Ключевые слова: искусственные ледовые острова, задача Стефана, параболические уравнения, квазилинейное уравнение теплопроводности.

Благодарности: работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда № 19-11-00023.

Для цитирования: Конов Д. С., Муратов М. В., Бирюков В. А. Численное решение задачи Стефана для искусственного ледового острова. *Успехи кибернетики*. 2022;3(1):14–19. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-1-2.

NUMERICAL SOLUTION OF THE STEFAN PROBLEM FOR AN ARTIFICIAL ICE ISLAND**D. S. Konov^a, M. V. Muratov^b, V. A. Biryukov^c***Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Russian Federation*^а ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4309-4660>, konov1999@gmail.com^б ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4958-8856>, max.muratov@gmail.com^с ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0109-8567>, biryukov.vova@gmail.com

Abstract: we studied a two-dimensional ice island in Arctic. A phase transition problem also called the Stefan problem is stated. A numerical method for solving it is developed. This method is modified to consider the environment effects which are not present in the physical model. We also briefly discuss approaches to including ice and water salinity, wind speed, and water currents as they are software-implemented. A series of numerical experiments for the ice island are conducted using the simulation model. The temperature fields inside the ice island after are found also taking into account the presence of a 10 m thick seabed soil after freezing and for various extreme environmental conditions.

Keywords: artificial ice islands, Stefan problem, parabolic equations, quasilinear heat conductivity equation.

Acknowledgements: this work is supported by the Russian Science Foundation, project No. 19-11-00023.

Cite this article: Konov D. S., Muratov M. V., Biryukov V. A. Numerical Solution of the Stefan Problem for an Artificial Ice Island. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(1):14–19. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-1-2.

Введение

Сегодня особенно актуальны задачи освоения месторождений полезных ископаемых в Арктике. Тяжелые климатические условия и низкий уровень развития инфраструктуры региона делают классические методы менее привлекательными экономически, нежели метод искусственных островов [1].

Один из типов искусственных островов – грунтовые, но для их сооружения требуется перемещение материалов для отсыпки, ледовые же острова лишены этого недостатка. Кроме того, искусственные ледовые острова позволяют избежать проблем, которые свойственны конвенциональным методам освоения Арктики, например деформации подводной поверхности земли и ущерба водным биоресурсам [2]. Искусственные ледовые острова можно разделить на несколько типов: плавающие и опирающиеся на дно (гравитационные) [3]. Возведение и эксплуатация таких островов – это сложнейшая задача. В данной работе рассматриваются подходы для численного моделирования тепловых процессов в толще гравитационных ледовых островов и применение численной модели для прогнозирования их устойчивости.

В работе обсуждается двумерная модель ледового острова. Изображение острова представлено на рисунке 1. Теплофизические характеристики, которые использовались в численном моделировании, представлены в таблице (в системе СИ). Также считаем, что температура плавления льда $T_0 = 0^\circ\text{C}$, а его удельная теплота плавления $\lambda = 334$ кДж/кг.

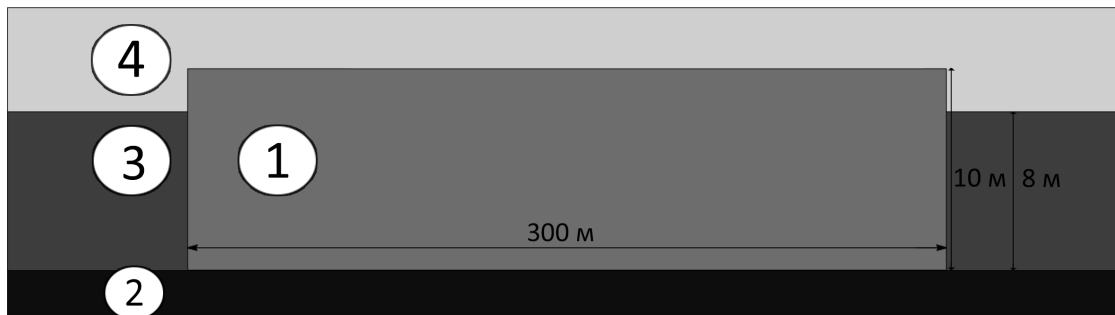


Рис. 1. Модель ледового острова. Расшифровка индексов веществ представлена в таблице

Таблица

Теплофизические свойства веществ (СИ)

№	Вещество	Плотность	Теплопроводность	Удельная теплоёмкость
1	Лед	917	0,591	2100
2	Донный грунт	2500	0,8	750
3	Вода	1000	2,22	4180
4	Воздух	1,60	0,022	—

Математическая модель тепловых процессов

Тепловые процессы в области, содержащей вещества в разных фазовых состояниях, могут приводить к превращению одних фаз в другие. Математически их взаимодействие описывается с помощью уравнений теплопроводности для каждой фазы и некоторого граничного условия на поверхности раздела фаз (условие Стефана). При этом форма и размер фаз изменяются со временем. Такая постановка задачи Стефана называется классической. Для таких задач доказано существование и единственность решения, а также непрерывная зависимость от начальных данных [4]. Аналитическое решение удастся получить для узкого класса простых задач, которые не представляют серьезного интереса. А численное решение может быть затруднено, так как в многомерном случае могут возникнуть сложности с явным отслеживанием границы. Поэтому переформулируем задачу Стефана в терминах теплосодержания (энтальпии). Тогда условие на границе выполнится автоматически и у нас останется квазилинейное уравнение теплопроводности, которое допускает решение методами сквозного счета.

Введем сначала энтальпию (теплосодержание):

$$Q = \begin{cases} \rho_S C_S T, & T < T_p \\ \rho_L C_L (T - T_p) + \rho_S C_S T_p + \rho_S \lambda, & T > T_p \end{cases}.$$

В этой формуле T_p — температура фазового перехода, ρ_S, C_S, ρ_L, C_L — плотность и удельная теплоемкость. Укажем, что, в отличие от обратного преобразования, переход от температуры к энтальпии не является непрерывным. Всем промежуточным значениям теплосодержания соответствуют промежуточные состояния вещества, когда одна его часть находится в одном фазовом состоянии, а другая — в другом. Уравнения задачи Стефана в классической формулировке для двумерного случая тогда переписутся в виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(Q) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(Q) \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad T = T(Q) \quad (1)$$

$$Q(x, y, t) |_{t=0} = Q(T_0(x, y, t)) |_{t=0} \quad (2)$$

$$\left(\alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \vec{n} \right) |_{\Gamma} = \gamma. \quad (3)$$

Этот вид будем называть энтальпийной формулировкой. Уравнение (1) — квазилинейное уравнение теплопроводности, (2) — переформулированное в терминах теплосодержания начальное условие. Уравнение (3) — смешанные граничные условия. Аналогичное уравнение можно записать и в трехмерном случае. Коэффициент теплопроводности для вещества с промежуточными значениями теплопроводности определим так, чтобы он был непрерывен:

$$k(Q) = \begin{cases} k_S, & Q < Q_- \\ k_S + (k_L - k_S) \cdot \frac{Q - Q_-}{Q_+ - Q_-}, & Q_- < Q < Q_+ \\ k_L, & Q > Q_+ \end{cases}$$

Численная модель

Для решения задачи Стефана в энтальпийной формулировке в двумерном случае выбираем продольно-поперечную схему, также известную как схема Писмена–Рекфорда. Для аналогичной задачи она оказалась оптимальной по производительности [5], так как является безусловно спектрально устойчивой [6], что позволяет свободно выбирать шаг по времени, но при этом с помощью прогонки ее уравнения решаются за линейное по числу узлов время. Порядок аппроксимации по пространству и времени τ^2, h^2 . Тогда уравнение (1) в численном представлении переписется:

$$\frac{\tilde{Q}_{ml} - Q_{ml}^n}{\tau/2} = \Lambda_{xx} Q_{ml}^{n+1/2} + \Lambda_{yy} Q_{ml}^n$$

$$\frac{Q_{ml}^{n+1} - \tilde{Q}_{ml}}{\tau/2} = \Lambda_{xx} Q_{ml}^{n+1/2} + \Lambda_{yy} Q_{ml}^{n+1}.$$

Где операторы численного дифференцирования:

$$\Lambda_{xx} Q = k_{m+\frac{1}{2}l} \frac{t_{m+1l} - t_{ml}}{h_x^2} + k_{m-\frac{1}{2}l} \frac{t_{m-1l} - t_{ml}}{h_x^2}$$

$$\Lambda_{yy} Q = k_{ml+\frac{1}{2}} \frac{t_{ml+1} - t_{ml}}{h_y^2} + k_{ml-\frac{1}{2}} \frac{t_{ml-1} - t_{ml}}{h_y^2}.$$

Значение сеточной функции температуры (t_{m+1l}) получаем из сеточной функции теплопроводности.

В квазилинейном случае, так как коэффициент теплопроводности и теплоемкость зависят от фазового состояния вещества, перейти сразу на следующий временной слой, не проиграв в скорости (используя прогонку), можно только с помощью спуска к точному решению методом Ньютона и неявной аппроксимации градиентов искомой функции.

Трехмерная схема Писмена–Рекфорда уже не будет обладать безусловной устойчивостью. В этом случае можно ограничить шаг по времени, чтобы добиться устойчивости, или использовать устойчивую схему, например, Дугласа–Гана.

Дополнения численного метода и программная реализация

При моделировании возникает ряд сложностей. Во-первых, надо учесть возможную сложную и переменную форму расчетной области. Отметим, что данный метод позволяет решать задачи для областей не только прямоугольной формы, но и произвольных ступенчатых областей [6, с. 367]. Поэтому можно аппроксимировать некоторую сложную форму расчетной области некоторой ступенчатой областью. Необходимо учитывать, что лед, тая в верхней части острова, может стекать вниз, таким образом изменяя вещество в конкретном узле сетки. Для этого после каждого шага можно проверять узел на условие таяния и в случае, если теплосодержание выше порогового, заменять вещество воздухом.

Во-вторых, необходимо учитывать течение воды, для этого можно всей растаявшей воде выше определенной температуры присвоить температуру, равную заданной.

Реализация всех этих эффектов подразумевает модификацию значений теплосодержания и вещества в узлах сетки после решения численных уравнений при достижении определенных условий.

Ветер и тепловой поток от атмосферы можно учесть, если обобщить коэффициент теплопроводности и использовать коэффициент теплоотдачи. Солнечную радиацию можно учесть либо с помощью неоднородности, либо с помощью увеличения температуры атмосферы, чтобы дополнительный тепловой поток совпадал с тепловым потоком от Солнца.

Соленость воды можно считать однородной, так как взаимодействие острова происходит только с малой поверхностью. Также необходимо учитывать, что сам лед может иметь переменную соленость. Так как полости с соленой водой внутри острова много меньше его характерных размеров, то их учет можно провести, изменив теплофизические характеристики льда.

Толщина льда в зависимости от скорости ветра и влияние солености на таяние льда более подробно рассмотрены в работах [7, 8].

Задача решается в несколько этапов. Вначале происходит проверка корректности входных данных и строится равномерная сетка по переданным данным. После этого вычисляется начальное поле теплосодержаний. Далее происходит последовательный переход на следующие шаги по времени, при этом каждый шаг несколько раз решает уравнения методом прогонки, пока не будет достигнута требуемая точность. Каждый переход на промежуточный слой допускает параллельное выполнение. Для этого каждый шаг разбивается на ряд отдельных итераций, которые можно решить параллельно: $i_x = 1, 2, \dots, N_x$ для первого полушага и $i_y = 1, 2, \dots, N_y$ — для второго. Для распараллеливания используется OpenMP.

Численные эксперименты

Далее перейдем к численным экспериментам на основе разработанной модели. Исследование состоит из двух расчетов. Сначала для определенной конфигурации ледового острова определяется распределение температуры в его толще после намораживания. После этого на полученном распределении ставятся эксперименты с целью протестировать устойчивость ледового острова. Теплофизические характеристики веществ в расчетах указаны в таблице. Были протестированы две конфигурации ледового острова. Расчетная область для задачи без промерзания грунта представляет собой массив из льда с геометрическими размерами острова, на границе которого расположены вода, донный грунт и воздух. Расчетная область для задачи с промерзанием донного грунта увеличена в два раза. Во всех экспериментах шаг по координате $h_x = h_y = 0,05$ м и шаг по времени $\tau = 50$ с. Расчетный период во всех случаях — 150 дней.

В первом эксперименте используется расчетная область без донного грунта. Начальная температура льда равна -10 °С. Граничные условия — постоянная температура в точке контакта с воздухом, водой и донным грунтом, соответственно равная -40 °С, $+3$ °С, $+5$ °С. После 150 дней установления провели два численных эксперимента, где начальные условия соответствуют финальному распределению температуры после начального расчета, а температура воздуха поменялась на $+3$ °С. В первом расчете область уменьшается только сверху при таянии льда, а во втором — еще и с обеих сторон (учитывается перемешивание воды). Результаты представлены на рис. 2, 3, 4. Слева на этих рисунках можно видеть распределение температуры на краю острова, а справа — их форму.

Из рисунка 6 видно, что смешивание воды ведет к быстрому таянию острова снизу. Дело в том, что граничное условие на постоянство температуры ведет к таянию тонкой прослойки воды на границе с дном. Далее постоянная температура воды гарантировала крупную разницу температур со льдом и как следствие — аномально большой тепловой поток через нижнюю грань. Для решения

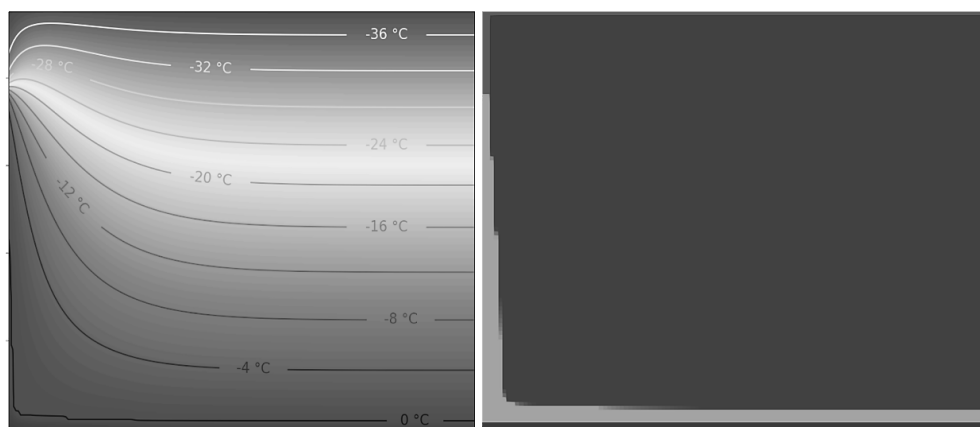


Рис. 2. Ледовый остров после намораживания

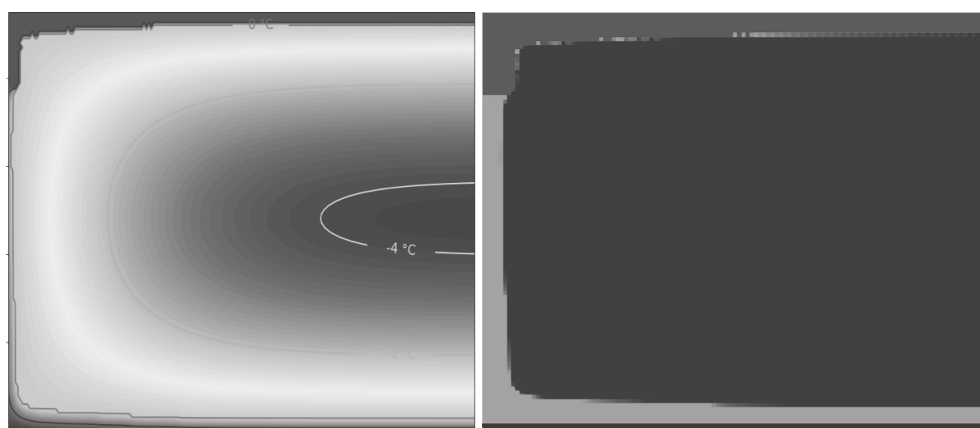


Рис. 3. Ледовый остров после 150 дней при температуре воздуха $+3\text{ }^{\circ}\text{C}$ без учета смешивания воды

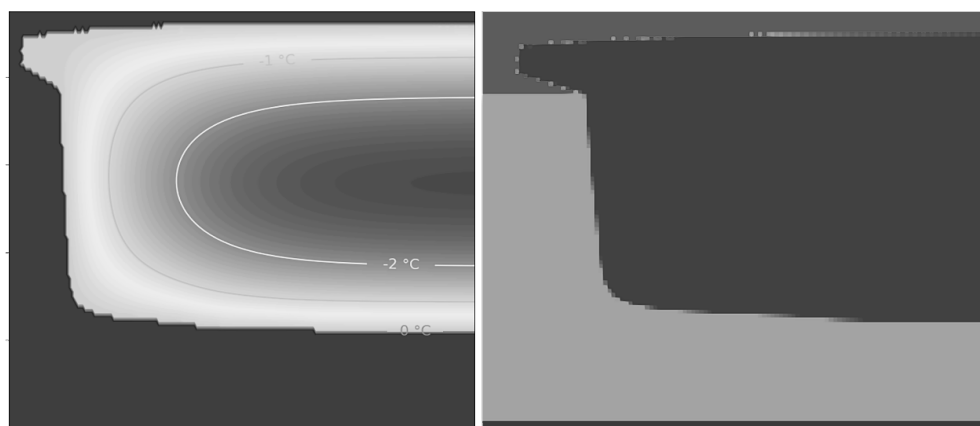


Рис. 4. Второй расчет. Ледовый остров после 150 дней при температуре воздуха $+3\text{ }^{\circ}\text{C}$ с учетом смешивания воды

этой проблемы был проведен второй численный эксперимент. В нем используется область с грунтом. Условия на границе с воздухом и водой не изменяются, но тепловой поток установлен равным нулю по нижней и боковым граням массива донного грунта. Результаты представлены на рис. 5, 6.

Таким образом, в работе представлен метод моделирования эволюции ледовых островов, позволяющий изучить все основные факторы, влияющие на его таяние. С его использованием произведены численные эксперименты в разных постановках. На их основании подтверждена сезонность ледовых островов.

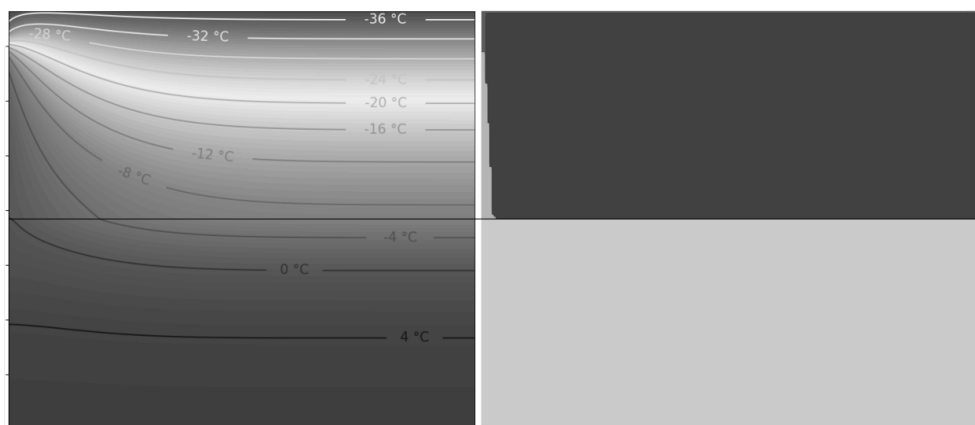


Рис. 5. Ледовый остров и массив донного грунта после намораживания

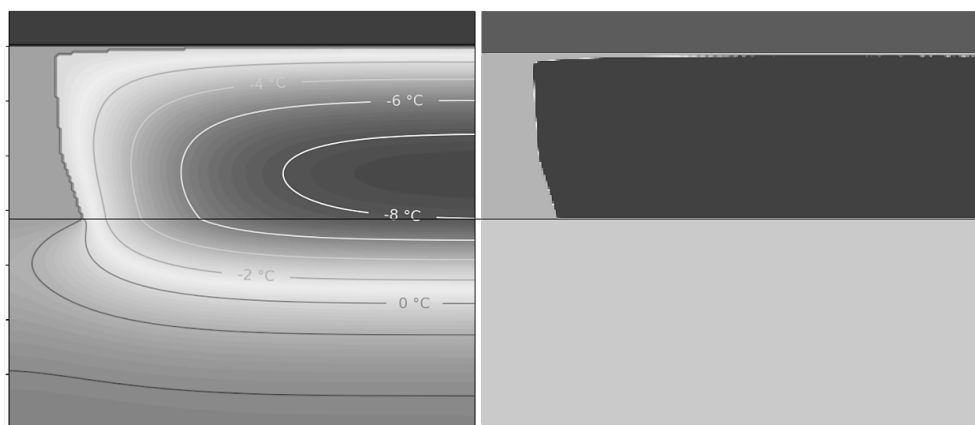


Рис. 6. Ледовый остров после 150 дней при температуре воздуха $+10\text{ }^{\circ}\text{C}$ с учетом смешивания воды и промерзания донного грунта

ЛИТЕРАТУРА

1. Горгуца Е. Ю., Курило Е. Ю. Строительство искусственных ледовых островов в условиях Арктики. *Гидротехника. XXI век*. 2017;4:54–57.
2. Курило Е. Ю. Посадка искусственного ледового острова на дно в Карском море. *Alfabuild*. 2017;2(2):66–69.
3. C-CORE (2005). Ice Island Study. Final Report. Prepared for Minerals Management Service, US Department of the Interior. Prepared by C-CORE. Report No. R-05-014-241 v1.0, August 2005.
4. Мейрманов А. М. *Задача Стефана*. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние; 1986. 240 с.
5. Албу А. Ф. *Применение методологии быстрого автоматического дифференцирования к решению задач управления тепловыми процессами с фазовыми переходами*: автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. 2016.
6. Самарский А. А. *Введение в численные методы*. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»; 1987. С. 359–367.
7. Comfort G., Abdelnour R. Ice Thickness Prediction: A Comparison of Various Practical Approaches. *CGU HS Committee on River Ice Processes and the Environment, 17th Workshop on River Ice 2013*, Edmonton, Alberta.
8. Nkoko Nossa A. Method for Prediction of Sea Ice Thickness Based on the Blowing Air Temperature and Speed. *Master Thesis at University of Liege*, 2015.