DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-10

К ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ЯКОБИ

В. П. Кощеев
НИУ МАИ, филиал «Стрела», г. Жуковский, Российская Федерация, koshcheev1@yandex.ru

Аннотация: показано, что как произведение дифференциалов независимых переменных, так и произведение частных производных функции многих (нескольких) переменных преобразуются как кососимметрическая форма с одним и тем же определителем Якоби при переходе от одной системы координат к другой.

Ключевые слова: кососимметрическая форма, определитель Якоби.

Благодарности: исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-07-00236 а.

Для цитирования: Кощеев В. П. К задаче построения определителя Якоби. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):87–89. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-10.

ON THE JACOBIAN CONSTRUCTION

V. P. Koshcheev
Strela Branch, Moscow Aviation Institute, Zhukovsky, Russian Federation koshcheev1@yandex.ru

Abstract: it is shown that both the product of independent variable differentials and the product of partial derivatives of a multivariable function can be rearranged as an antisymmetric form with the same Jacobian as we convert from one reference system to another one.

Keywords: antisymmetric form, Jacobian.

Acknowledgements: this study is supported by RFBR, research project No. 20-07-00236 a.

Cite this article: Koshcheev V. P. On the Jacobian Construction. *Russian Journal of Cybernetics*. 2021;2(4):87–89. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-10.

Известно, что инвариантность формы первого дифференциала функции многих (нескольких) переменных в разных системах координат достигается с помощью дополнительного условия, согласно которому дифференциалы независимых переменных преобразуются как компоненты контравариантного вектора, а частные производные преобразуются как компоненты ковариантного вектора (см., например, [1–4]). Сперва рассмотрим функцию двух независимых переменных

$$f = f(u.v), \tag{1}$$

где

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} du = u_x dx + u_y dy, \\ dv = v_x dx + v_y dy, \end{cases} \tag{2}$$

где $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$, $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$.

Запишем систему уравнений (2) в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $J = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ — матрица Якоби.

Видно, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В результате получим

$$\left[\begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Так как матрица $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ не равна нулю, то

$$\begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Так как определитель произведения матриц одинаковых порядков в (6) равен произведению определителей этих матриц, то

$$\det\begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В результате получим

$$du \wedge dv = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} dx \wedge dy, \tag{8}$$

где $\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ — определитель Якоби.

Произведения дифференциалов в (8) записаны в обозначениях, которые приняты при записи дифференциальных форм [2, 4]. Тем не менее в замечательном учебнике [3] используются другие обозначения: «причем считают, что $dxdx = dydy = 0$ и $dxdy = -dydx$» [3, с. 136]. Покажем, что

$$du \wedge du = dv \wedge dv = 0 \qquad \text{и} \qquad du \wedge dv = -dv \wedge du. \tag{9}$$

Так как

$$\begin{cases} dv = v_x dx + v_y dy, \\ du = u_x dx + u_y dy, \end{cases}$$

то

$$\det\begin{pmatrix} dv & 0 \\ 0 & du \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}.$$

Тогда с помощью (7) и (8) получим

$$dv \wedge du = \det\begin{pmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix} dx \wedge dy = -\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} dx \wedge dy = -du \wedge dv.$$

Если

$$\begin{cases} du = u_x dx + u_y dy, \\ du = u_x dx + u_y dy, \end{cases}$$

то

$$\det\begin{pmatrix} du & 0 \\ 0 & du \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix} = 0\cdot\det\begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда

$$du \wedge du = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix} dx \wedge dy = 0 \cdot dx \wedge dy = 0.$$

Если определитель Якоби не равен нулю, то легко получить

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0 \qquad \text{и} \qquad dx \wedge dy = -dy \wedge dx.$$

Исходя из инвариантности формы первого дифференциала функции многих (нескольких) переменных в разных системах координат можно показать, что частные производные в разных системах координат связаны между собой с помощью транспонированной матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Легко увидеть, что произведение частных производных функции многих (нескольких) переменных преобразуется как кососимметрическая форма с тем же самым определителем Якоби при переходе от одной системы координат к другой

$$\det \begin{pmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} f_u & 0 \\ 0 & f_v \end{pmatrix}$$

или

$$f_x \wedge f_y = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} f_u \wedge f_v, \tag{11}$$

где $\det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$ — определитель Якоби.

Можно видеть, что произведение частных производных обладает свойствами кососимметрической формы

$$f_x \wedge f_x = f_y \wedge f_y = 0 \qquad \text{и} \qquad f_x \wedge f_y = -f_y \wedge f_x.$$

Таким образом, как произведение дифференциалов независимых переменных, так и произведение частных производных функции многих (нескольких) переменных преобразуются как кососимметрическая форма с одним и тем же определителем Якоби при переходе от одной системы координат к другой. Видно, что данный подход легко обобщается на случай большего числа независимых переменных. Можно говорить о дуальности отношения произведения дифференциалов к произведению частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа*. Том 2. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы; 1968.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. *Основы математического анализа*: В 2-х частях. Часть 2. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы; 2008.
3. Яковлев Г. Н. Лекции по математическому анализу. Ч. 2: Учеб, пособие для вузов. М.: Издательство физико-математической литературы; 2001.
4. Зорич В. А. *Математический анализ*: В 2-х частях. Часть 2. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы; 1984.